СОФИЙСКИ УНИВЕРСИТЕТ „СВ. КЛИМЕНТ ОХРИДСКИ“
ПИСМЕН КОНКУРСЕН ИЗПИТ ПО МАТЕМАТИКА I

24 март 2013 г.

Тема №3.

ПРИМЕРНИ РЕШЕНИЯ НА ЗАДАЧИТЕ

Задача 1. В триъгълника ABC имаме $AC = 7$, $BC = 3$ и $\cos\sphericalangle ABC = \dfrac{1}{2}$. Да се намерят страната AB, лицето S на триъгълника ABC и $\sin\sphericalangle CAB$.

Решение: Нека да означим $a = BC = 3$, $b = AC = 7$, $c = AB$, $\alpha = \sphericalangle CAB$ и $\beta = \sphericalangle ABC$. От косинусовата теорема получаваме $7^2 = 3^2 + c^2 - 2c \cdot 3 \cdot \dfrac{1}{2}$ или $c^2 - 3c - 40 = 0$, т.е. $AB = c = 8$. Сега от факта, че $\beta = 60^\circ$ и синусовата теорема получаваме $\sin\alpha = \sin\beta \cdot \dfrac{a}{b} = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \cdot \dfrac{3}{7} = \dfrac{3\sqrt{3}}{14}$. Така за лицето имаме $S = \dfrac{b \cdot c \cdot \sin\alpha}{2} = \dfrac{a \cdot c \cdot \sin\beta}{2} = 6\sqrt{3}$.

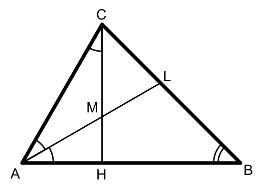
Задача 2. Да се реши уравнението $\sqrt{x+2} + \sqrt{2x+5} = 1$.

Решение: След повдигане на квадрат от даденото уравнение получаваме $2\sqrt{(x+2)(2x+5)} = -3(x+2)$, а след още едно повдигане на квадрат $x^2 - 4 = 0$. Корените на това уравнение са 2 и -2. Проверката показва, че само $x = -2$ е решение на задачата.

Забележка. *Даденото уравнение има смисъл при* $x \geqq -2$, *а то е еквивалентно на уравнението* $x^2 - 4 = 0$ *само при* $x \leqq -2$. *След проверка се оказва, че* $x = -2$ *е решение на задачата.*

Задача 3. Ъглополовящата на ъгъл CAB в триъгълника ABC пресича височината CH в точка M. Да се намери радиусът R на описаната около триъгълника ABC окръжност при условие, че $CM = 2$, $\sphericalangle CAB = 60^\circ$ и $\sphericalangle ABC = 45^\circ$.

Решение: Понеже AM е ъглополовяща в правоъгълния триъгълник AHC, то имаме $\dfrac{1}{2} = \cos 60^\circ = \dfrac{AH}{AC} = \dfrac{HM}{CM} = \dfrac{HM}{2}$ или $HM = 1$. От $CH = CM + MH = 3$ и факта, че триъгълникът BCH е правоъгълен и равнобедрен получаваме $BC = 3\sqrt{2}$. Сега от синусовата теорема за триъгълника ABC намираме $R = \dfrac{BC}{2\sin 60^\circ} = \dfrac{3\sqrt{2}}{2\frac{\sqrt{3}}{2}} = \sqrt{6}$.

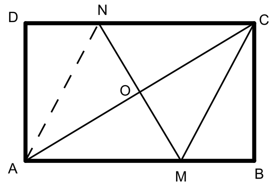


Задача 4. Да се реши неравенството $\dfrac{|x-1| - |x+1|}{x+2} \geqq 0$.

Решение: Неравенството има смисъл при $x \neq -2$. **I.** при $x \in (-\infty, -1] \setminus \{-2\}$ имаме $|x-1| = -(x-1)$ и $|x+1| = -(x+1)$, т.е. получаваме неравенството $\dfrac{-(x-1)+(x+1)}{x+2} \geqq 0$ или $\dfrac{2}{x+2} \geqq 0$, което в интервала $(-\infty, -1] \setminus \{-2\}$ има решения $x \in (-2, -1]$. **II.** при $x \in (-1, 1]$ имаме $|x-1| = -(x-1)$ и $|x+1| = (x+1)$, т.е. $\dfrac{-(x-1)-(x+1)}{x+2} \geqq 0$ или $\dfrac{-2x}{x+2} \geqq 0$, което в интервала $(-1, 1]$ има решения $x \in (-1, 0]$. **III.** при $x \in (1, \infty)$ имаме $|x-1| = (x-1)$ и $|x+1| = (x+1)$, т.е. имаме неравенството $\dfrac{(x-1)-(x+1)}{x+2} \geqq 0$ или $\dfrac{-2}{x+2} \geqq 0$, което в интервала $(1, \infty)$ няма решение. Така окончателно получаваме $x \in (-2, 0]$.

Задача 5. Даден е правоъгълник $ABCD$ със страни $AB = 5$ и $BC = 4$, за който пресечната точка на диагоналите AC и BD е означена с O. Точката M лежи върху страната AB така, че $AM = CM$, а N е пресечната точка на страната CD с правата OM. Да се намери дължината на отсечката MN.

Решение: За диагонала AC по теоремата на Питагор имаме $AC = 2AO = \sqrt{5^2+4^2} = \sqrt{41}$. Сега да означим $AM = CM = x$, тогава от правоъгълния триъгълник MBC имаме $(5-x)^2+4^2 = x^2$ или $10x = 41$, откъдето $x = \dfrac{41}{10}$. От $AO = OC$ и свойствата на успоредните прави, пресечени с трета получаваме, че $\Delta AOM \cong \Delta CON$. Сега от равнобедрения ΔACM и $AO = OC$ следва, че $MO \perp AC$ и $MN = 2MO$. Така от правоъгълния триъгълник AOM имаме



$$MN = 2MO = 2\sqrt{x^2 - AO^2} = 2\sqrt{\left(\frac{41}{10}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{41}}{2}\right)^2} = 2\sqrt{\frac{41}{4}\left(\frac{41}{25}-1\right)} = 2\sqrt{\frac{41}{4}\cdot\frac{16}{25}} = \frac{4\sqrt{41}}{5}.$$

Задача 6. Да се реши уравнението $x + \log_5(26 - 5^x) = 2$.

Решение: Уравнението има смисъл при $5^x < 26$ или $x < \log_5 26$. От даденото уравнение последователно получаваме $\log_5 5^x + \log_5(26 - 5^x) = 2\log_5 5$, $\log_5 5^x(9 - 2^x) = \log_5 5^2$ или $5^x(26 - 5^x) = 5^2$. Въвеждаме ново неизвестно $y = 5^x$ и стигаме до уравнението $y(26 - y) = 25$, което има корени $y_1 = 1$ или $y_2 = 25$. След връщане към неизвестното x имаме $5^x = 1 = 5^0$ или $5^x = 25 = 5^2$, т.е. $x_1 = 0$ или $x_2 = 2$. След проверка в дефиниционното множество ($5^0 < 26$ и $5^2 = 25 < 26$) или директно в даденото уравнение получаваме, че задачата има две решения $x_1 = 0$ или $x_2 = 2$.

Задача 7. В кръжок по математическа логика участват няколко ученици. По време на заниманията всеки от тях играе роля, която е известна на останалите – или е „лъжец“ (винаги лъже), или е „честен“ (винаги казва истината). На всеки от кръжочниците, във връзка с всеки от останалите, се задава въпросът: *„Какъв е той (тя)– „лъжец“ или „честен“?“*. В резултат са получени общо 26 отговора „честен“ и 30 – „лъжец“. Колко ученици членуват в кръжока, колко от тях са „лъжци“ и колко „честни“ ?

Решение: Нека в кръжока членуват z ученици, от които x „лъжци“ и y „честни“, където $x, y, z \in \mathbb{N}$. Тогава на всеки от учениците, членуващи в кръжока ($z = x+y$ на брой) са зададени по $(z-1)$ въпроса (за всеки от останалите), т.е. общият брой въпроси (отговори) е $26+30 = 56 = z(z-1)$ и така получаваме $z = 8$ (понеже 8.7=56 или като единственият положителен (естествен) корен на последното уравнение). Да видим откъде са се получили отговорите **„лъжец“** – всеки „лъжец“ е посочил всички „честни“ и всеки „честен“ е посочил всички „лъжци“, т.е. $30 = 2xy$. Сега за x и y имаме следните връзки $\left|\begin{array}{l} x+y=8 \\ xy=15 \end{array}\right.$, откъдето получаваме $\left|\begin{array}{l} x=3 \\ y=5 \end{array}\right.$ или $\left|\begin{array}{l} x=5 \\ y=3 \end{array}\right.$. Така окончателно получихме, че броят на кръжочниците е 8, от които $3^{\text{-ма}}$ „лъжци“ и $5^{\text{-има}}$ „честни“ или $5^{\text{-има}}$ „лъжци“ и $3^{\text{-ма}}$ „честни“.

Задача 8. Нека $x_1 < x_2$ са корените на квадратното уравнение $x^2 - px + q = 0$. Да се намерят стойностите на p и q при условие, че числата x_1, x_2, $p+3$ и $q+3$ в този ред образуват аритметична прогресия.

Решение: От формулите на Виет имаме $x_1+x_2 = p$, $x_1x_2 = q$. По условие имаме аритметичната прогресия $\div\, x_1, x_2, p+3, q+3$, т.е $2x_2 = x_1+(p+3)$ и $2(p+3) = x_2+(q+3)$. Сега от $x_1+x_2 = p$ и $2x_2 = x_1 + (p+3)$, последователно получаваме $x_2 = 2x_1 + 3$ и $p = 3x_1 + 3$. След заместване на последните равенства в $2(p+3) = x_2 + (q+3)$ достигаме до $2\big((3x_1+3)+1\big) = 2x_1 + 3 + (q+3)$ или $q = 2(2x_1+3) = 2x_2$. Сега от последното равенство и $q = x_1x_2 = x_1(2x_1+3)$ получаваме $2(2x_1+3) = x_1(2x_1+3)$, т.е. $(2x_1+3)(x_1-2) = 0$. Така получихме, че $x_1 = -\dfrac{3}{2}$ или $x_1 = 2$. При $x_1 = -\dfrac{3}{2}$ имаме $x_1 = -\dfrac{3}{2}$, $x_2 = 0$, $p+3 = \dfrac{3}{2}$ и $q+3 = 3$ и тези числа образуват аритметична прогресия. При $x_1 = 2$ получаваме $x_2 = 2x_1+3 = 7$, $p+3 = 12$ и $q+3 = 17$ като тези числа също образуват аритметична прогресия. Следователно $p = -\dfrac{3}{2}$, $q = 0$ и $p = 9$, $q = 14$ са търсените решения на задачата.