СОФИЙСКИ УНИВЕРСИТЕТ „СВ. КЛИМЕНТ ОХРИДСКИ“
ПИСМЕН КОНКУРСЕН ИЗПИТ ПО МАТЕМАТИКА – ВТОРО РАВНИЩЕ
31 МАРТ 2013 г.

ЗАДАЧИ И ПРИМЕРНИ РЕШЕНИЯ – ТЕМА 1

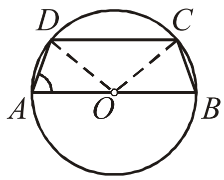
1. Да се реши уравнението $\frac{2}{2-x}+\frac{6}{x^2-x-2}=1.$

Решение. Тъй като $x^2-x-2=(x-2)(x+1)$, то дефиниционното множество е $x\neq 2, x\neq -1.$ Последователно получаваме

$$\frac{2}{2-x}+\frac{6}{x^2-x-2}=1\Leftrightarrow -2(x+1)+6=x^2-x-2\Leftrightarrow x^2+x-6=0.$$

Корените на последното уравнение са $x_1=-3$ и $x_2=2.$ Понеже вторият корен не принадлежи на дефиниционното множество единственото решение на даденото уравнение е $x=-3.$

2. В окръжност с диаметър 4 е вписан трапец с голяма основа диаметър на окръжността и ъгъл при нея 75°. Да се намери лицето на трапеца.



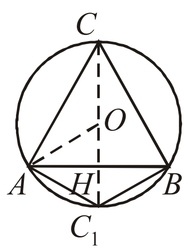
Решение. Понеже трапецът *ABCD* е вписан в окръжност, то $AD=BC$ и $\sphericalangle BAD=\sphericalangle ABC=75°.$ Тогава $\sphericalangle AOD=\sphericalangle BOC=30°$ и $\sphericalangle COD=120°.$ За лицето *S* получаваме

$S=2S_{AOD}+S_{COD}=2.\frac{1}{2}OA.OD\sin 30°+\frac{1}{2}OC.OD\sin 120°=2+\sqrt{3},$ т.е. $S=2+\sqrt{3}.$

3. Да се намери границата $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{\sin x}.$

Решение. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{\sin x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{5x.\sin 5x}{5x.\sin x}=5.\lim\limits_{5x\to 0}\frac{\sin 5x}{5x}.\lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{\sin x}=5.$

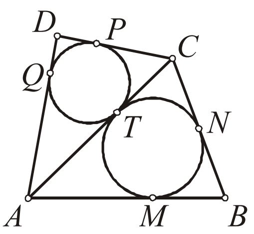
4. Основата на равнобедрен триъгълник е 8, а радиусът на описаната окръжност е 5. Да се намери бедрото на триъгълника.



Решение. Нека *AB* е хорда в окръжността и CC_1 е диаметърът през средата на хордата *H*. От правоъгълния $\triangle AOH$ намираме $OH=\sqrt{AO^2-AH^2}=\sqrt{25-16}=3.$ За остроъгълния равнобедрен $\triangle ABC$ имаме $CH=CO+OH=8$ и от $\triangle ACH$ намираме $AC=\sqrt{8^2+4^2}=\sqrt{80}=4\sqrt{5}.$ За тъпоъгълния равнобедрен $\triangle ABC_1$ имаме $C_1H=C_1O-OH=2$ и от $\triangle AC_1H$ намираме $AC_1=\sqrt{2^2+4^2}=\sqrt{20}=2\sqrt{5}.$

Следователно имаме два равнобедрени триъгълника с бедра $4\sqrt{5}$ и $2\sqrt{5}.$

5. В четириъгълника *ABCD* окръжностите, вписани в триъгълниците *ABC* и *ACD*, се допират. Да се намери периметърът на четириъгълника, ако $AB+CD=10.$



Решение. Нека *T* е общата точка на двете окръжности и *M*, *N*, *P* и *Q* са допирните точки на окръжностите със страните на триъгълника. Тогава $AM=AT=AQ,$ $BM=BN,$ $CN=CT=CP$ и

$DP = DQ$. От тези равенства за сбора $AB + CD$ получаваме $AB + CD$ $= AM + MB + CP + PD = AQ + BN + CN + DQ = BC + AD.$ Следователно $BC + AD = AB + CD = 10,$ т.е. периметърът на четириъгълника е 20.

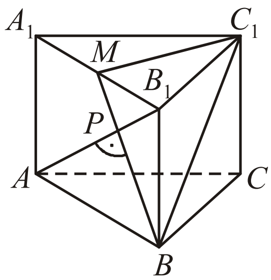
6. Да се реши неравенството $\log_{x+2}\left(x^2 - 3x + 2\right) < 1.$

Решение. Дефиниционното множество (ДМ) се определя от системата

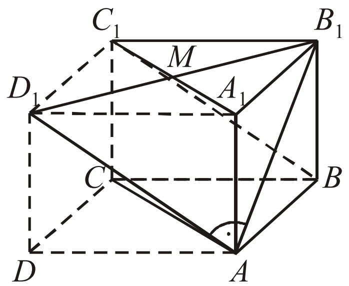
$$\begin{vmatrix} x^2 - 3x + 2 > 0 \\ x + 2 > 0 \\ x + 2 \neq 1 \end{vmatrix} \Leftrightarrow \begin{vmatrix} (x-1)(x-2) > 0 \\ x > -2 \\ x \neq -1 \end{vmatrix} \Rightarrow x \in (-2;-1) \cup (-1;1) \cup (2;+\infty).$$

При $x > -1$ неравенството е еквивалентно в ДМ на неравенството $x^2 - 3x + 2 < x + 2,$ или $x^2 - 4x < 0.$ Решението на последното неравенство е $(0;4)$. Като вземем пред вид и ДМ получаваме $x \in (0;1) \cup (2;4).$ При $x \in (-2;-1)$ неравенството е еквивалентно на $x^2 - 3x + 2 > x + 2,$ т.е. $x^2 - 4x > 0,$ което има решение $x \in (-\infty;0) \cup (4;+\infty).$ Като вземем пред вид и ДМ, за втория случай, получаваме $x \in (-2;-1).$ Окончателно решението на неравенството е $x \in (-2;-1) \cup (0;1) \cup (2;4).$

7. В правилна триъгълна призма $ABCA_1B_1C_1$ основният ръб $AB = 2.$ Да се намери обемът на призмата, ако правите AB_1 и BC_1 са перпендикулярни.



Решение. Първи начин. Понеже пирамидата е правилна, основите са перпендикулярни на околните стени и ортогоналната проекция на върха C_1 в равнината ABB_1 лежи на ръба A_1B_1. Тъй като $\triangle A_1B_1C_1$ е равностранен, проекцията на C_1 е средата на ръба A_1B_1. От теоремата за трите перпендикуляра следва, че $BM \perp AB_1$, т. е. $\triangle ABP$ е правоъгълен. От $\triangle ABP \sim \triangle B_1MP$ имаме $\dfrac{AP}{PB_1} = \dfrac{BP}{MP} = \dfrac{AB}{MB_1} = \dfrac{2}{1}.$ Следователно $AP = \frac{2}{3}AB_1$ и $BP = \frac{2}{3}BM$. Нека $AA_1 = x.$ Лесно се намира, че $AP = \frac{2}{3}\sqrt{4 + x^2}$ и $BP = \frac{2}{3}\sqrt{1 + x^2}$. От питагоровата теорема за $\triangle ABP$ имаме $AP^2 + BP^2 = AB^2,$ или $\frac{4}{9}\left(4 + x^2\right) + \frac{4}{9}\left(1 + x^2\right) = 4 \Leftrightarrow 5 + 2x^2 = 9 \Leftrightarrow x^2 = 2 \Rightarrow x = \sqrt{2}.$



Следователно обемът V на призмата е $V = S_{ABC}.x = \frac{4\sqrt{3}}{4}.\sqrt{2} = \sqrt{6},$ т.е. $V = \sqrt{6}.$

Втори начин. Нека $AA_1 = x.$ Дострояваме призмата до четириъгълната призма $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с основа ромба $ABCD$ с $\sphericalangle BAD = 120°.$ Тогава от $\triangle ABD$ намираме $BD = 2AB\cos 30° = 2\sqrt{3}.$ От $BC_1 \parallel AD_1$ имаме $\sphericalangle B_1AD_1 = \sphericalangle\left(AB_1; BC_1\right) = 90°,$ т.е. триъгълникът AB_1D_1 е правоъгълен и равнобедрен. Така намираме $B_1D_1 = \sqrt{2}AB_1,$ откъдето $2\left(4 + x^2\right) = 12$ и $x = \sqrt{2}.$ Следователно обемът V на призмата е $V = S_{ABC}.x = \frac{4\sqrt{3}}{4}.\sqrt{2} = \sqrt{6},$ т.е. $V = \sqrt{6}.$

8. Даден е триъгълник ABC с височина през върха C $h_c = 5$. Реалните числа p и q такива, че $p+q=1$. Да се намери най-малката стойност на израза $pAC^2+qBC^2-pqAB^2$.

Решение. Първи начин. От $p+q=1$ имаме $q=1-p$ и като заместим в израза $pAC^2+qBC^2-pqAB^2$ последователно получаваме:

$$pAC^2+qBC^2-pqAB^2 = pAC^2+(1-p)BC^2-p(1-p)AB^2$$

$$=AB^2p^2-\left(BC^2+AB^2-AC^2\right)p+BC^2 = AB^2p^2-2\cos\beta BC.AB.p+BC^2.$$

Квадратният тричлен $AB^2p^2-2\cos\beta BC.AB.p+BC^2$ достига най-малка стойност при $p_0=\dfrac{BC.AB.\cos\beta}{AB^2}=\dfrac{BC\cos\beta}{AB}$. Следователно

$$AB^2p^2-2\cos\beta BC.AC.p+BC^2 \geq AB^2\left(\frac{BC\cos\beta}{AB}\right)^2-2\cos\beta BC.AB.\frac{BC\cos\beta}{AB}+BC^2$$

$$=\cos^2\beta BC^2-2\cos^2\beta BC^2+BC^2=\left(1-\cos^2\beta\right)BC^2=\sin^2\beta.BC^2=h_c^2=25.$$

Следователно най-малката стойност на израза $pAC^2+qBC^2-pqAB^2$ е 25.

Втори начин. От $p+q=1$ имаме $q=1-p$ и като заместим в израза $pAC^2+qBC^2-pqAB^2$ последователно получаваме:

$$pAC^2+qBC^2-pqAB^2 = pAC^2+(1-p)BC^2-p(1-p)AB^2$$

$$=AB^2p^2-\left(BC^2+AB^2-AC^2\right)p+BC^2.$$

Квадратният тричлен $AB^2p^2-\left(BC^2+AB^2-AC^2\right)p+BC^2$ достига най-малка стойност при $p_0=\dfrac{BC^2+AB^2-AC^2}{2AB^2}$. Следователно

$$AB^2p^2-\left(BC^2+AB^2-AC^2\right)p+BC^2 \geq$$

$$\geq AB^2\left(\frac{BC^2+AB^2-AC^2}{2AB^2}\right)^2-\left(BC^2+AB^2-AC^2\right)\frac{BC^2+AB^2-AC^2}{2AB^2}+BC^2$$

$$=\frac{\left(BC^2+AB^2-AC^2\right)^2}{4AB^2}-\frac{\left(BC^2+AB^2-AC^2\right)^2}{2AB^2}+BC^2=-\frac{\left(BC^2+AB^2-AC^2\right)^2}{4AB^2}+BC^2$$

$$=\frac{4AB^2BC^2-\left(BC^2+AB^2-AC^2\right)^2}{4AB^2}$$

$$=\frac{\left(2AB.BC-BC^2-AB^2+AC^2\right)\left(2AB.BC+BC^2+AB^2-AC^2\right)}{4AB^2}$$

$$=\frac{\left(AC^2-\left(AB-BC\right)^2\right)\left(\left(AB+BC\right)^2-AC^2\right)}{4AB^2}$$

$$=\frac{\left(AC-AB+BC\right)\left(AC+AB-BC\right)\left(AB+BC-AC\right)\left(AB+BC+AC\right)}{4AB^2}$$

$$=\frac{16S_{ABC}^2}{4AB^2}=\left(\frac{2S_{ABC}}{AB}\right)^2=h_c^2=25.$$

Следователно най-малката стойност на израза $pAC^2+qBC^2-pqAB^2$ е 25.