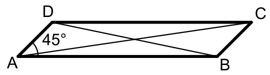
СОФИЙСКИ УНИВЕРСИТЕТ „СВ. КЛИМЕНТ ОХРИДСКИ“
ПИСМЕН КОНКУРСЕН ИЗПИТ ПО МАТЕМАТИКА I
16 март 2014 г.
Тема №3.
ПРИМЕРНИ РЕШЕНИЯ НА ЗАДАЧИТЕ

Задача 1. Даден е успоредник $ABCD$ с остър ъгъл $\alpha = 45^\circ$ и диагонали $AC = 9$ и $BD = 7$. Да се намери лицето S на успоредника и синусът на ъгъла φ между диагоналите му.



Решение: Нека $AB = CD = a$ и $BC = DA = b$. Фигурата $ABCD$ е успоредник и $\sphericalangle BAD = \alpha$, т.е. $\sphericalangle ABC = 180^\circ - \alpha$. Косинусовата теорема, приложена за триъгълниците ABC и ABD ни дава $7^2 = a^2 + b^2 - 2ab\ \cos\alpha$, $9^2 = a^2 + b^2 + 2ab\ \cos\alpha$ и след почленно изваждане на последните равенства последователно получаваме $9^2 - 7^2 = 4ab\ \cos\alpha$ или $8 = ab\ \cos\alpha = \dfrac{ab\sqrt{2}}{2} = ab\ \sin\alpha = S$. Сега от формулата $S = \dfrac{AC\ BD\ \sin\varphi}{2} = \dfrac{9\cdot 7\cdot \sin\varphi}{2} = 8$ получаваме $\sin\varphi = \dfrac{16}{63}$.

Задача 2. Третият член на аритметична прогресия е равен на 6, а вторият, четвъртият и осмият ѝ членове са различни и в този ред образуват геометрична прогресия. Да се намерят първият член и разликата на прогресията.

Решение: Нека да означим първия член и разликата на прогресията съответно с a_1 и d. Тогава имаме $a_3 = a_1 + 2d = 6$ и $a_4^2 = a_2a_8$ или $a_1 + 2d = 6$ и $(a_1 + 3d)^2 = (a_1 + d)(a_1 + 7d)$. Сега заествайки $a_1 = 6 - 2d$ във второто равенство последователно получаваме $(6 + d)^2 = (6 - d)(6 + 5d)$, $6d^2 - 12d = 0$, $d_1 = 0$ или $d_2 = 2$. По условие имаме, че вторият, четвъртият и осмият член на прогресията са различни, т.е. $d \neq 0$. Така окончателно получаваме, че $d = 2$ и $a_1 = 6 - 2d = 2$.

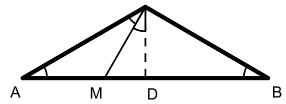
Задача 3. Нека $a = \log_2 5$. Да се изрази чрез a числото $A = \log_{\frac{1}{125}} \dfrac{1}{50}$.

Решение: В израза A сменяме основата на логаритъма с основа b и последователно получаваме:

$$A = \frac{\log_b \frac{1}{50}}{\log_b \frac{1}{125}} = \frac{\log_b 1 - \log_b 50}{\log_b 1 - \log_b 125} = \frac{0 - \log_b 50}{0 - \log_b 125} = \frac{\log_b 50}{\log_b 125} = \frac{\log_b (2\cdot 5^2)}{\log_b 5^3} = \frac{\log_b 2 + 2\log_b 5}{3\log_b 5}.$$

Сега при $b = 2$ имаме $A = \dfrac{\log_2 2 + 2\log_2 5}{3\log_2 5} = \dfrac{1 + 2a}{3a}$.

Задача 4. Даден е равнобедрен триъгълник ABC със страна $AC = 30$ и ъгъл $\sphericalangle ACB = 120^\circ$. Точката M лежи върху страната AB и е такава, че $AM : MB = 1 : 2$. Да се докаже, че $MC \perp BC$ и да се намери дължината на отсечката CM.



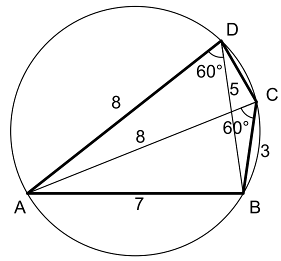
Решение: Понеже триъгълникът е равнобедрен с ъгъл $\sphericalangle ACB = 120^\circ$, то имаме $\sphericalangle ABC = \sphericalangle BAC = 30^\circ$. Построяваме височината CD, която се явява медиана и ъглополовяща за ΔABC, т.е. $AD = \dfrac{AB}{2}$ и $\sphericalangle ACD = 60^\circ$. Триъгълникът ADC е правоъгълен с ъгъл $\sphericalangle BAC = 30^\circ$, следователно $CD = \dfrac{AC}{2} = 15$ и $AD = \sqrt{AC^2 - CD^2} = AC\cos 60^\circ = 15\sqrt{3}$. Сега от условието $AM : MB = 1 : 2$ имаме $AM = \dfrac{AB}{3}$ и $MD = AD - AM = \dfrac{AB}{2} - \dfrac{AB}{3} = \dfrac{AB}{6}$. Така получаваме $AM : MD = 2 : 1 = AC : CD$, т.е. CM е ъглополовяща в ΔADC и $\sphericalangle ACM = \dfrac{\sphericalangle ACD}{2} = 30^\circ$, а $\sphericalangle MCB = \sphericalangle ACB - \sphericalangle ACM = 120^\circ - 30^\circ = 90^\circ$. Понеже $\sphericalangle BAC = 30^\circ$ и $\sphericalangle ACM = 30^\circ$, то ΔACM е равнобедрен и $AM = CM = \dfrac{AB}{3} = \dfrac{2AD}{3} = \dfrac{30\sqrt{3}}{3} = 10\sqrt{3}$.

Задача 5. Да се реши уравнението: $\sqrt{2x^2 - 5x + 2} + \sqrt{x^2 - 5x + 6} = \sqrt{x^2 - 4}$.

Решение: I. От уравнението $\sqrt{2x^2 - 5x + 2} = \sqrt{x^2 - 4} - \sqrt{x^2 - 5x + 6}$, след повдигане на квадрат, получаваме $0 = -2\sqrt{(x^2 - 4)(x^2 - 5x + 6)}$, а след още едно повдигане на квадрат $(x^2 - 4)(x^2 - 5x + 6) = 0$. Корените на това уравнение са -2, 2 и 3. Проверката показва, че само $x = 2$ и $x = 3$ са решения на задачата.

II. Даденото уравнение има смисъл при $2x^2-5x+2 \geqq 0 \cap x^2-5x+6 \geqq 0 \cap x^2-4 \geqq 0$, т.е. за $x \in \Omega \equiv (-\infty,-2] \cup \{2\} \cup [3,\infty)$. След повдигане на квадрат от даденото уравнение получаваме еквивалентното му $\sqrt{(2x^2-5x+2)(x^2-5x+6)} = -(x^2-5x+6)$, като то може да има решение само при $x^2-5x+6 \leqq 0$ и $x \in \Omega$, т.е. при $x^2-5x+6=0$ ($x=2$ или $x=3$). Проверката показва, че $x=2$ и $x=3$ са решения на задачата.

Задача 6. Даден е четириъгълник $ABCD$ със страни $AB=7$, $BC=3$, $AD=8$ и диагонали $AC=8$ и $BD=5$. Да се докаже, че четириъгълникът е вписан в окръжност и да се намерят дължините на нейния радиус R и на страната CD.



Решение: От косинусовата теорема за ΔABC получаваме $\cos\sphericalangle ACB = \dfrac{8^2+3^2-7^2}{2\cdot 8\cdot 3} = \dfrac{1}{2}$, т.е. $\sphericalangle ACB = 60^\circ$. Аналогично от ΔABD имаме $\cos\sphericalangle ADB = \dfrac{8^2+5^2-7^2}{2\cdot 8\cdot 5} = \dfrac{1}{2}$, т.е. $\sphericalangle ADB = 60^\circ$. Отсечката AB се вижда от C и D под ъгъл от 60°, т.е. точките A, B, C и D лежат на една окръжност. Така от синусовата теорема за ΔABC имаме $R = \dfrac{AB}{2\sin 60^\circ} = \dfrac{7}{2\frac{\sqrt{3}}{2}}$ или $R = \dfrac{7\sqrt{3}}{3}$. От окръжността получаваме $\sphericalangle CAD = \sphericalangle CBD = \varphi$. Косинусовата теорема за ΔCDA и ΔCDB ни дава $CD^2 = 8^2+8^2-2\cdot 8\cdot 8\cdot\cos\varphi = 128-128\cos\varphi$ и $CD^2 = 5^2+3^2-2\cdot 5\cdot 3\cdot\cos\varphi = 34-30\cos\varphi$. След елиминиране на $\cos\varphi$ получаваме $(64-15)CD^2 = 49\ CD^2 = 64\cdot 34-15\cdot 128 = 128(17-15) = 256$ или $CD = \sqrt{\dfrac{256}{49}} = \dfrac{16}{7}$.

Задача 7. Няколко бивши съученици отишли на ресторант. Всеки от тях се поздравил с всеки от останалите чрез ръкостискане, като броят на еднополовите ръкостискания бил 21, а броят на разнополовите – 24. Когато прозвучала любимата им мелодия, съучениците формирали помежду си възможно най-голям брой танцови двойки (мъж и жена), а другите останали по местата си. Колко двойки са танцували и колко от съучениците са седели по местата си по време на тази мелодия?

Решение: Нека на срещата са присъствали z съученици, от които x мъже и y жени, където $x,y,z \in \mathbb{N}$. Тогава всеки от присъстващите ($z=x+y$ на брой) се ръкува с всеки от останалите $(z-1)$, при това всяко ръкостискане е броено по два пъти, т.е. общият брой ръкостискания е $21+24=45=C_z^2=\dfrac{z(z-1)}{2}$ и така получаваме $z=10$ (понеже $10\cdot 9=90$ или като единственият положителен (естествен) корен на последното уравнение). Нека преброим **разнополовите** ръкостискания – всеки мъж се ръкува с всяка жена, т.е. $24=xy$. Сега за x и y имаме следните връзки $\left|\begin{array}{l} x+y=10 \\ xy=24 \end{array}\right.$, откъдето получаваме $\left|\begin{array}{l} x=6 \\ y=4 \end{array}\right.$ или $\left|\begin{array}{l} x=4 \\ y=6 \end{array}\right.$. Броят на танцуващите двойки е равен на по-малкото от числата x или y, а броят на нетанцуващите – на $|x-y|$, т.е. има четири танцуващи двойки и двама (мъже или жени), които не танцуват.

Задача 8. Даден е изразът $f(x)=ax^2+bx+c$, където коефициентите a, b и c са реални параметри, за които е изпълнено $a-b+c=2014$. Да се намери знакът на c при условие, че уравнението $f(x)=0$ няма реални корени. Какъв е знакът на a при същото условие?

Решение: При $a \neq 0$ уравнението $ax^2+bx+c=0$ е квадратно и няма реални корени, следователно графиката на квадратния тричлен $y=ax^2+bx+c$ няма пресечни точки с оста Ox и лежи изцяло от едната ѝ страна, т.е. квадратният тричлен има постоянен знак за всички стойности на x, съвпадащ със знака на старшия си коефициент. Така за всяко $x \in \mathbb{R}$ е изпълнено точно едно от неравенствата $f(x)>0$, при $a>0$ или $f(x)<0$, при $a<0$. Но $f(-1)=a-b+c=2014>0$, следователно $a>0$ и неравенството $f(x)>0$ е изпълнено за $x \in \mathbb{R}$, така при $x=0$ получаваме $f(0)=c>0$. Ако $a=0$, то уравнението $f(x)=0$ добива вида $bx+c=0$ и то няма реални корени (решение) точно когато $b=0$ и $c=2014$. Така окончателно получихме, че ако уравнението $f(x)=0$ няма реални корени, то знакът на коефициента c е винаги положителен, а коефициентът a е неотрицателен.