СОФИЙСКИ УНИВЕРСИТЕТ „СВ. КЛИМЕНТ ОХРИДСКИ“

ПИСМЕН КОНКУРСЕН ИЗПИТ ПО МАТЕМАТИКА I

21 юни 2014 г.

Тема №1.

ПРИМЕРНИ РЕШЕНИЯ НА ЗАДАЧИТЕ

Задача 1. Да се реши неравенството $\dfrac{x-1}{x-2}+\dfrac{x-2}{x-1}\geqq 2$.

Решение: Даденото дробно неравенство има смисъл при $x\neq 1$ и $x\neq 2$. Сега последователно имаме $\dfrac{x-1}{x-2}+\dfrac{x-2}{x-1}-2\geqq 0$, $\dfrac{(x-1)^2-2(x-1)(x-2)+(x-2)^2}{(x-1)(x-2)}\geqq 0$, $\dfrac{\big((x-1)-(x-2)\big)^2}{(x-1)(x-2)}\geqq 0$, $\dfrac{1}{(x-1)(x-2)}\geqq 0$ или $(x-1)(x-2)>0$. Така окончателно получаваме за решения на задачата числата $x\in(-\infty,1)\cup(2,\infty)$.

Задача 2. Даден е правоъгълен триъгълник ABC с катети $BC=12$ и $CA=16$. Да се намери дължината на височината h_c към хипотенузата, както и дължините на радиусите R и r на описаната и на вписаната окръжности.

Решение: При стандартните означения за елементите на триъгълника ABC имаме $a=12$, $b=16$ и $\gamma=90^\circ$. Сега от питагоровата теорема получаваме $c^2=a^2+b^2$, т.е. $c=\sqrt{12^2+16^2}=\sqrt{16(3^2+4^2)}=20$. За лицето S на триъгълника е в сила $S=\dfrac{a\,b}{2}=\dfrac{c\,h_c}{2}=\dfrac{12\cdot 16}{2}=96$ или $h_c=\dfrac{a\,b}{c}=\dfrac{12\cdot 16}{20}=\dfrac{48}{5}$, а за дължините на радиусите R и r имаме съответно $R=\dfrac{c}{2}=10$ и $r=\dfrac{S}{p}=p-c=\dfrac{a+b-c}{2}=4$, където $p=\dfrac{a+b+c}{2}=\dfrac{12+16+20}{2}=24$.

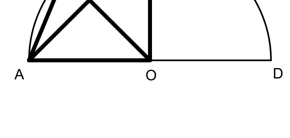
Задача 3. Да се реши уравнението $|2^x-8|+|4-2^x|=4$.

Решение: I. Показателната функция 2^x е растяща за всяко $x\in\mathbb{R}$, понеже основата ѝ е по-голяма от 1, т.е. неравенствата $2^x-8=2^x-2^3>0$ и $4-2^x=2^2-2^x>0$ са изпълнени съответно при $x>3$ и при $x<2$. Разглеждаме следните случаи: **1.** Ако $x\in(-\infty,2)$, то $|2^x-8|=8-2^x$ и $|4-2^x|=4-2^x$, а за уравнението имаме $8-2^x+4-2^x=4$ или $2^x=4$, т.е. $x=2$, което не е решение, понеже не лежи в разглеждания интервал; **2.** Ако $x\in[2,3]$, то $|2^x-8|=8-2^x$ и $|4-2^x|=2^x-4$, а уравнението добива вида $8-2^x+2^x-4=4$ или $0=0$, т.е. всяко число от интервала $x\in[2,3]$ е решение на даденото уравнение; **3.** Ако $x\in(3,\infty)$, то $|2^x-8|=2^x-8$ и $|4-2^x|=2^x-4$, а за уравнението имаме $2^x-8+2^x-4=4$ или $2^x=8$, т.е. $x=3$, което не е решение, понеже не лежи в разглеждания интервал. Така окончателно получихме, че решенията на даденото уравнение са $x\in[2,3]$.

II. Означаваме 2^x с y и достигаме до уравнението $|y-8|+|4-y|=4$. Разглеждаме следните случаи: **1.** Ако $y\in(-\infty,4)$, то $|y-8|=8-y$ и $|4-y|=4-y$, а за уравнението имаме $8-y+4-y=4$ или $y=4$, което не лежи в разглеждания интервал и следователно не е решение; **2.** Ако $y\in[4,8]$, то $|y-8|=8-y$ и $|4-y|=y-4$, а уравнението добива вида $8-y+y-4=4$ или $0=0$, т.е. всяко число от интервала $y\in[4,8]$ е решение на модулното уравнение за y; **3.** Ако $y\in(8,\infty)$, то $|y-8|=y-8$ и $|4-y|=y-4$, а за уравнението имаме $y-8+y-4=4$ или $y=8$, което не лежи в разглеждания интервал и следователно не е решение. Така решения на уравнението $|y-8|+|4-y|=4$ са числата $y\in[4,8]$. Връщаме се към неизвестното x и получаваме неравенствата $4=2^2\leqq 2^x\leqq 2^3=8$. Понеже функцията 2^x е растяща, то окончателно получаваме, че $x\in[2,3]$.

Задача 4. Дадена е отсечка $AD=20$ със среда точката O. С диаметър AD е построена полуокръжност k. Точките B и C лежат на k и са среди съответно на дъгите $\widehat{AD}$ и $\widehat{AB}$. Да се намерят лицата на четириъгълника $AOBC$ и на триъгълника ABC.

Решение: От свойствата на централните ъгли имаме $\sphericalangle AOB=\widehat{AB}=\dfrac{\widehat{AD}}{2}=90^\circ$, $\sphericalangle BOC=\widehat{BC}=\dfrac{\widehat{AD}}{4}=45^\circ$ и $\sphericalangle AOC=\widehat{AC}=\dfrac{\widehat{AD}}{4}=45^\circ$. Така $\Delta OAM\cong\Delta OBM$ по I признак, т.е. $OC\perp AB$. От ΔAOB получаваме $AB=\sqrt{2}\;OA=10\sqrt{2}$. Сега $S_{AOBC}=\dfrac{AB\;OC}{2}=\dfrac{10\sqrt{2}\cdot 10}{2}=50\sqrt{2}$,



$S_{AOB} = \dfrac{OA\ OB}{2} = \dfrac{10 \cdot 10}{2} = 50$ и $S_{ABC} = S_{AOBC} - S_{AOB} = 50(\sqrt{2} - 1)$.

Задача 5. Да се реши уравнението $(\sin x - \cos x)^2 = \dfrac{3}{2}$.

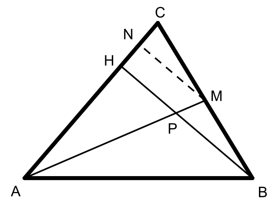
Решение: След повдигане на квадрат в лявата страна на уравнението получаваме $\sin^2 x - 2\sin x \cos x + \cos^2 x = \dfrac{3}{2}$, а след прилагане на формулите $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ и $2\sin x \cos x = \sin 2x$ достигаме до $\sin 2x = -\dfrac{1}{2}$, което е еквивалентно на $2x = -\dfrac{\pi}{6} + 2k\pi \cup 2x = \dfrac{7\pi}{6} + 2k\pi$ или $x = -\dfrac{\pi}{12} + k\pi \cup x = \dfrac{7\pi}{12} + k\pi$, където $k \in \mathbb{Z}$.

Задача 6. Образувани са всички възможни петцифрени числа с цифри от множеството $\{1, 2, 3\}$. По произволен начин е избрано едно от тях. Да се намери вероятността избраното число да се дели на 4.

Решение: На всяка от позициите на петцифреното число може да стои някоя от цифрите от множеството $\{1, 2, 3\}$, т.е. за всяка от петте позиции има по три възможности или общият брой на тези числа е $3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 3^5 = 243$. От признака за деление на 4 (*едно цяло число се дели на* 4*, точно когато числото, съставено от последните му две цифри се дели на* 4) следва, че число от търсения вид ще се дели на 4, точно когато завършва на 12 или 32 (числото трябва да е четно, т.е. да завършва на 2, а 22 не се дели на 4). Броят на числата, завършващи на 12 е $3 \cdot 3 \cdot 3 = 3^3 = 27$, понеже за първите три позиции има по три възможности. Аналогично броят на числата, завършващи на 32 е също $3 \cdot 3 \cdot 3 = 3^3 = 27$ и получаваме, че броят на числата, делящи се на 4 е $2 \cdot 3^3 = 54$. Така за вероятността имаме:

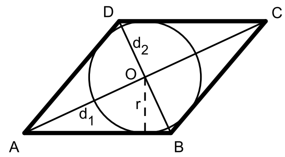
$$P = \frac{\text{бр. благоприятни възможности}}{\text{бр. всички възможности}} = \frac{54}{243} = \frac{2 \cdot 3^3}{3^5} = \frac{2}{9}.$$

Задача 7. Даден е триъгълник ABC със страни $BC = 11$, $CA = 12$ и $AB = 13$. Височината BH и медианата AM се пресичат в точка P. Да се намерят отношенията $AH : HC$ и $AP : PM$.



Решение: Даденият триъгълник е остроъгълен, т.е. точката H е между A и C. Сега нека означим $AH = x$, $HC = y$ и $BH = h$. Тогава $x + y = 12$, а от триъгълниците ABH и CBH имаме още $x^2 + h^2 = 13^2$ и $y^2 + h^2 = 11^2$. След почленно изваждане на последните две равенства достигаме до $x^2 - y^2 = 13^2 - 11^2$ или $(x-y)(x+y) = 2 \cdot 24$. Сега от $x + y = 12$ получаваме $x - y = 4$, т.е. $x = 8$, $y = 4$ или $AH : HC = x : y = 2 : 1$. През точката M построяваме $MN || BH$, тогава в ΔBHC MN се явява средна отсечка, т.е. $CN = NH = 2$. Сега от теоремата на Талес имаме $AP : PM = AH : HN = 8 : 2 = 4 : 1$.

Задача 8. Даден е ромб с лице $S = m$. Сумата от диагоналите му $d_1 + d_2$ е равна на n. Да се докаже, че квадратният тричлен $x^2 + nx + m = 0$ има два различни реални корена и да се изрази лицето σ на вписания в ромба кръг чрез m и n.



Решение: Нека означим $AB = a$, $AC = d_1$ и $BD = d_2$. Понеже диагоналите на ромба са перпендикулярни, то за неговото лице имаме $S = m = \dfrac{d_1\ d_2}{2}$ или $d_1\ d_2 = 2m$. Квадратният тричлен $x^2 + nx + m = 0$ има два различни реални корена, точно когато неговата дискриминанта $D = n^2 - 4m = (d_1 + d_2)^2 - 2d_1 d_2 = {d_1}^2 + {d_2}^2$ е строго положителна, което е изпълнено, понеже съществува ромб с диагонали d_1 и d_2, т.е. числата d_1 и d_2 не са едновременно равни на нула. За пресмятане на търсеното лице имаме $\sigma = \pi r^2$, където r е радиусът на вписаната в ромба окръжност. Формулата за лице на описан четириъгълник ни дава $S = m = p\ r$, където $p = 2a$ е полупериметърът на ромба. Така получаваме връзката $r = \dfrac{m}{2a}$ или $r^2 = \dfrac{m^2}{4a^2}$. Сега от триъгълника ABO имаме $\left(\dfrac{d_1}{2}\right)^2 + \left(\dfrac{d_2}{2}\right)^2 = a^2$ или $a^2 = \dfrac{D}{4} = \dfrac{n^2 - 4m}{4}$. Така окончателно получаваме $r^2 = \dfrac{m^2}{n^2 - 4m}$ и $\sigma = \dfrac{\pi m^2}{n^2 - 4m}$.