СОФИЙСКИ УНИВЕРСИТЕТ „СВ. КЛИМЕНТ ОХРИДСКИ“
ПИСМЕН КОНКУРСЕН ИЗПИТ ПО МАТЕМАТИКА I

20 юни 2015 г.

Тема № 2

Решения на задачите

Задача 1. Пресметнете израза:

$$A=\left(\log_{\sqrt[5]{5}}\sqrt{5}\right)^2-\log_{\sqrt[3]{5}}5\sqrt{5}+\log_{\sqrt{3}+1}(4+2\sqrt{3}).$$

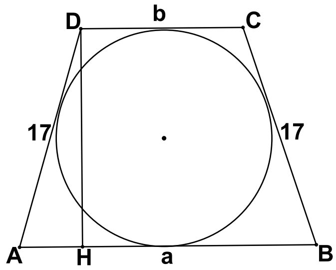
Решение: Записваме израза във вида

$$A=\left(\log_{5^{\frac{1}{5}}}5^{\frac{1}{2}}\right)^2-\log_{5^{\frac{1}{3}}}5^{\frac{3}{2}}+\log_{\sqrt{3}+1}(\sqrt{3}+1)^2.$$

Тогава $A=\left(\dfrac{5}{2}\right)^2-\dfrac{9}{2}+2$, следователно $A=\dfrac{15}{4}$.

Задача 2. Около окръжност с диаметър 15 е описан равнобедрен трапец с дължина на бедрото 17. Намерете дължините на основите на трапеца.

Решение: От свойството на описан четириъгълник имаме: $AB+CD=AD+BC$, т.е. $AB+CD=2.17=34$. Височината DH е равна по дължина на диаметъра на вписаната окръжност, или $DH=15$. Тъй като трапецът е равнобедрен, то $AH=\dfrac{AB-CD}{2}$. По теоремата на Питагор за $\triangle AHD$, $AH=\sqrt{17^2-15^2}=\sqrt{32.2}$, $AH=8$. Получихме, че $AB+CD=34$, и $AB-CD=16$, следователно $AB=25$ и $CD=9$.



Задача 3. Да се реши системата:

$$\left|\begin{array}{l} xy+x+y=19 \\ x^2y+xy^2=84 \end{array}\right..$$

Решение: Записваме системата във вида: $\left|\begin{array}{l} xy+(x+y)=19 \\ xy(x+y)=84 \end{array}\right.$. Ако означим $x+y=a$, $xy=b$ имаме $\left|\begin{array}{l} a+b=19 \\ ab=84 \end{array}\right.$. Това са формулите на Виет за уравнение с корени 12 и 7.

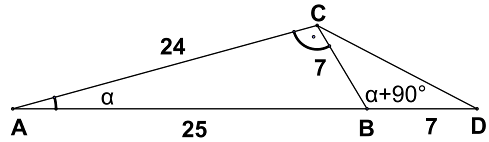
Първи случай: $x+y=7$, $xy=12$, т.е. $(x_1,y_1)=(3,4)$ и $(x_2,y_2)=(4,3)$.

Втори случай: $x+y=12$, $xy=7$, т.е. x и y са корените на уравнението $t^2-12t+7=0$, $t_{1,2}=6\pm\sqrt{29}$. Тогава $(x_3,y_3)=\left(6+\sqrt{29},6-\sqrt{29}\right)$ и $(x_4,y_4)=(6-\sqrt{29},6+\sqrt{29})$.

Задача 4. Върху продължението на хипотенузата AB на правоъгълен триъгълник ABC е взета точка D, така че $BD=BC$ и B е между A и D. Намерете дължината на CD, ако $AC=24$ и $BC=7$.

Решение: От Питагорова теорема за триъгълник ABC намираме:

$$AB=\sqrt{24^2+7^2}=\sqrt{576+49}=\sqrt{625}=25.$$



Означаваме $\sphericalangle BAC$ с α. Тогава $\sphericalangle DBC$, като външен за $\triangle ABC$, е равен на $90^\circ+\alpha$. От $\triangle BDC$, по косинусова теорема, имаме:

$CD^2 = BD^2 + CB^2 - 2BD.CD.\cos(\sphericalangle DBC) \Rightarrow CD^2 = 2.7^2 - 2.7^2.\cos(90^\circ + \alpha) \Rightarrow CD^2 = 98.(1 + \sin\alpha)$.

От $\triangle ABC$ имаме $\sin\alpha = \dfrac{7}{25}$ и тогава $CD^2 = 98.(1 + \dfrac{7}{25}) = \dfrac{98.32}{25} = \dfrac{64.49}{25} \Rightarrow CD = \dfrac{8.7}{5} = \dfrac{56}{5}$.

Задача 5. Разполагаме с три разноцветни зарчета. Каква е вероятността сборът от точките върху трите зарчета при произволно хвърляне да е 7?

Решение: Числото 7 се представя като сума на три естествени числа (точките върху всяко зарче) по следните начини: 7=1+2+4, 7= 1+1+5, 7=3+3+1 или 7=2+2+3. Понеже зарчетата са различими (различни цветове), то броят на благоприятните изходи в първия случай е $3! = 6$(шест), във втория е 3(три), в третия е 3 (три) и в четвъртия е 3 (три). Тогава броят на всички благоприятни изходи е $B = 6+3+3+3 = 15$. Броят на всички възможни изходи при произволно хвърляне на трите зарчета е $S = 6.6.6$. Тогава вероятноста P, сборът от точките върху трите зарчета при произволно хвърляне да е 7, е:

P= (броя на благоприятните изходи) : (броя на всички възможни изходи).

Следователно, търсената вероятност е $P = \dfrac{B}{S} = \dfrac{15}{6.6.6} = \dfrac{5}{72}$.

Задача 6. Нека a и b са положителни числа, такива че a^2 е средно аритметично на b^2 и $(a+b)^2$. Да се намери $\dfrac{a}{b}$.

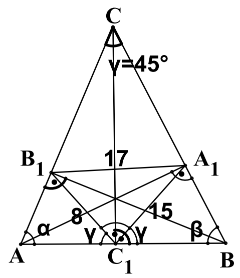
Решение: По условие $a > 0$, $b > 0$ и $2a^2 = b^2 + (a+b)^2$, или $2a^2 = 2b^2 + a^2 + 2ab$, $a^2 - 2ab - 2b^2 = 0$. Разделяме полученото хомогенно уравнение с $b^2 > 0$ и получаваме квадратното спрямо $\dfrac{a}{b}$ уравнение $\left(\dfrac{a}{b}\right)^2 - 2\left(\dfrac{a}{b}\right) - 2 = 0$. Корените му са $\left(\dfrac{a}{b}\right)_{1,2} = 1 \pm \sqrt{3}$. Но по условие $\dfrac{a}{b} > 0$ и следователно единственото решение на задачата е $\dfrac{a}{b} = 1 + \sqrt{3}$.

Задача 7. Отсечките, съединяващи петите на височините в остроъгълен триъгълник, са 8, 15 и 17. Намерете радиуса на описаната около дадения триъгълник окръжност.

Решение: Нека $\sphericalangle BAC = \alpha$, $\sphericalangle ABC = \beta$, $\sphericalangle BCA = \gamma$ и $A_1B_1 = 17$, $A_1C_1 = 15$ и $B_1C_1 = 8$. Ъглите на $\triangle A_1B_1C_1$ са $\sphericalangle C_1A_1B_1 = 180^\circ - 2\alpha$, $\sphericalangle A_1B_1C_1 = 180^\circ - 2\beta$ и $\sphericalangle A_1C_1B_1 = 180^\circ - 2\gamma$, т.е. чрез тях можем да определим ъглите на $\triangle ABC$. Например:

$A_1B_1^2 = A_1C_1^2 + B_1C_1^2 - 2.A_1C_1.B_1C_1.\cos(180^\circ - 2\gamma)$ или

$17^2 = 15^2 + 8^2 + 2.15.8.\cos 2\gamma$, откъдето $\cos 2\gamma = 0$, т.е. $\gamma = 45^\circ$.



Освен това, $\triangle A_1B_1C$ е подобен на $\triangle ABC$ с коефициент на подобие $\cos\gamma$, т.е. $\cos 45^\circ$. Намираме последователно

$$\frac{A_1B_1}{AB} = \cos 45^\circ \Rightarrow AB = \frac{A_1B_1}{\cos 45^\circ}.$$

Използваме синусова теорема за $\triangle ABC$ за намиране на радиуса на описаната окръжност, а именно:

$$\frac{AB}{\sin 45^\circ} = 2R, \text{ или } R = \frac{AB}{2\sin 45^\circ} = \frac{A_1B_1}{2\sin 45^\circ \cos 45^\circ} = \frac{A_1B_1}{\sin 90^\circ},\ R = A_1B_1, \text{ т.е. } R = 17.$$

Задача 8. Уравнението $x^2 + 2ax + 4a = 0$ има реалните корени x_1 и x_2. Намерете най-голямата стойност на израза $S = |x_1| + |x_2|$, при условие, че параметърът a принадлежи на множеството от решения на неравенството $|a| \leqq 2$.

Решение: Корените x_1 и x_2 на уравнението $x^2+2ax+4a=0$ са реални, ако дискриминантата $D=4a^2-16a$ е неотрицателна. Условието е изпълнено за решенията на неравенството $a^2-4a\geq 0$, които са множеството $(-\infty,0]\cup[4,+\infty)$.

Тъй като $S=|\,x_1|+|\,x_2|$ неотрицателна величина, то S и S^2 достигат своите най-големи стойности съответно за една и съща стойност на a. Затова разглеждаме израза $S^2=|\,x_1|^2+|\,x_2|^2+2|x_1.x_2|$. Прилагайки формулите на Виет, получаваме:

$$S^2=x_1^2+x_2^2+2|\,4a|=(x_1+x_2)^2-2x_1.x_2+8|\,a|=4a^2-8a+8|\,a|=4(a^2-2a+2|\,a|).$$

Решенията на неравенството $|\,a|\leq 2$ е интервалът $[-2,2]$. Така получаваме, че най-голямата стойност на S^2, респективно на S, се търси в множеството $[-2,2]\cap\{(-\infty,0]\cup[4,+\infty)\}$, т.е. в интервала $[-2,0]$. Стойностите на a в този интервал са отрицателни (с изключение на 0) и $|\,a|=-a$, следователно $S^2=4(a^2-2a-2a)=4(a^2-4a)$.

Квадратната функция $f(a)=a^2-4a$ е с положителен коефициент пред втората степен, абсцисата на върха на параболата ѝ е 2 и в интервала $[-2,0]$ тя е строго намаляваща. Следователно, най-голямата стойност на S се приема при $a=-2$ и тя е $S=\sqrt{4[(-2)^2-4(-2)]}=\sqrt{4(4+8)}=4\sqrt{3}$.