СОФИЙСКИ УНИВЕРСИТЕТ „СВ. КЛИМЕНТ ОХРИДСКИ“
ПИСМЕН КОНКУРСЕН ИЗПИТ ПО МАТЕМАТИКА
ВТОРО РАВНИЩЕ
21 ЮНИ 2015 г.

ЗАДАЧИ И ПРИМЕРНИ РЕШЕНИЯ – ТЕМА 3

1. Да се реши уравнението $\left(x^2-10x+24\right)\sqrt{5-x}=0.$

Решение. Даденото уравнение има смисъл при $x\le 5.$ В тази дефиниционна област то е еквивалентно на $x^2-10x+24=0$ или $\sqrt{5-x}=0.$ Първото уравнение има корени $x_1=4<5$ и $x_2=6>5,$ а второто $x=5.$ Следователно решения са $x_1=4$ и $x_2=5.$

2. В правоъгълен триъгълник отношението между радиусите на вписаната и описаната окръжности е $2:5$. Да се намери лицето на триъгълника, ако е известно, че периметърът му е равен на 12.

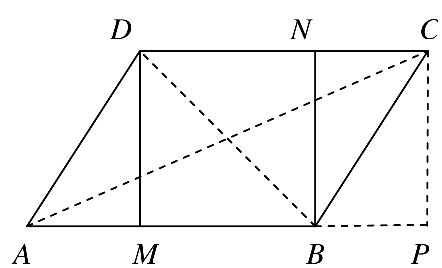
Решение. Използваме стандартните означения за правоъгълен триъгълник**.** Имаме $R=\dfrac{c}{2}$, $r=\dfrac{a+b-c}{2}$ и $a+b+c=12$. Оттук и $\dfrac{r}{R}=\dfrac{2}{5}$ намираме $c=5$ и $a+b=7.$ От питагоровата теорема и тъждеството $2ab=\left(a+b\right)^2-\left(a^2+b^2\right)$ получаваме $ab=12,$ и следователно търсеното лице е $S=\dfrac{ab}{2}=6.$

3. Да се реши неравенството $\log_{\frac{1}{5}}\left(x^2-7x+12\right)-\log_{\frac{1}{5}}\left(x-1\right)-\log_{\frac{1}{5}}\left(x+1\right)\ge 0.$

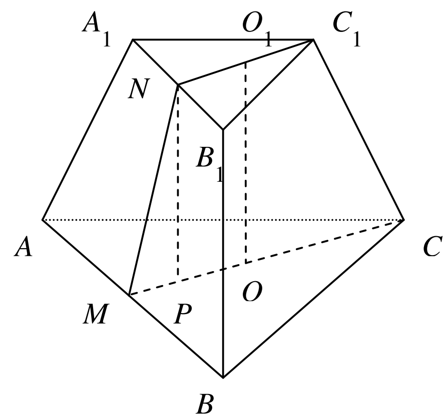
Решение. Даденото неравенство има смисъл при $x^2-7x+12>0,$ $x-1>0$ и $x+1>0,$ т.е. при $x\in\left(1;3\right)\cup\left(4;+\infty\right).$ От свойствата на логаритъма следва, че то е еквивалентно на $\log_{\frac{1}{5}}\left(x^2-7x+12\right)\ge\log_{\frac{1}{5}}\left(x-1\right)\left(x+1\right).$ Тъй като $0<\dfrac{1}{5}<1,$ последното неравенство е еквивалентно на $x^2-7x+12\le x^2-1,$ откъдето получаваме $x\ge\dfrac{13}{7}.$ Следователно решенията са $x\in\left[\dfrac{13}{7};3\right)\cup\left(4;+\infty\right).$

4. В успоредника $ABCD$ точките M и N лежат съответно на страните AB и CD. Да се намери лицето на успоредника, ако е известно, че $AC+BD=10+2\sqrt{5},$ а четириъгълникът $MBND$ е квадрат с лице, равно на 10.

Решение. Тъй като $MBND$ е квадрат и $AB\parallel CD$, то DM и BN са височини в успоредника. От $S_{MBND}=10$ следва, че $DM=BM=\sqrt{10},$ а $BD=2\sqrt{5}$, откъдето $AC=10.$ Нека CP $(P\in AB)$ е височината на успоредника през върха C. Означаваме $AM=x$. От $\triangle AMD\cong\triangle BPC$ имаме $BP=AM=x$ и $CP=DM=\sqrt{10}.$ От питагоровата теорема за $\triangle ACP$ следва, че $\left(2x+\sqrt{10}\right)^2+10=100,$ откъдето получаваме, че $x=\sqrt{10}.$ Оттук $AB=2\sqrt{10}$ и следователно търсеното лице е $S=AB.DM=2\sqrt{10}.\sqrt{10}=20.$



5. Правилната триъгълна пресечена пирамида $ABCA_1B_1C_1$ има основни ръбове $AB = 24$ и $A_1B_1 = 6$, а мярката на двустенния ъгъл при основата ABC е 45°. Да се намери обемът на пирамидата.



Решение. Нека точките M и N са среди на ръбовете AB и A_1B_1. Тъй като пирамидата е правилна, то MN е височина в равнобедрения трапец ABB_1A_1. От MN и CM перпендикулярни на AB следва, че $\sphericalangle CMN$ е линейният ъгъл на двустенния ъгъл с ръб AB, т.е. $\sphericalangle CMN = 45^\circ$. Тъй като пирамидата е правилна, то центровете на основите O и O_1 лежат съответно на CM и C_1N и $OO_1 \perp CM$. Нека точката P е петата на перпендикуляра, спуснат от N към CM. От равностранните триъгълници ABC и $A_1B_1C_1$ имаме $OM = \frac{1}{3}CM = \frac{24\sqrt{3}}{6} = 4\sqrt{3}$ и $O_1N = \frac{1}{3}C_1N = \frac{6\sqrt{3}}{6} = \sqrt{3}$. Тъй като PO_1ON е правоъгълник, то $PO = O_1N = \sqrt{3}$. Следователно $MP = 3\sqrt{3}$. От правоъгълния триъгълник MNP намираме $NP = OO_1 = 3\sqrt{3}\,\mathrm{tg}\,45^\circ = 3\sqrt{3}$. Така височината на пирамидата е $h = OO_1 = 3\sqrt{3}$, а лицата на основите са $B = 144\sqrt{3}$ и $B_1 = 9\sqrt{3}$. Оттук за обема V получаваме $V = \frac{h}{3}\left(B + B_1 + \sqrt{BB_1}\right) = \frac{3\sqrt{3}}{3}\left(144\sqrt{3} + 9\sqrt{3} + 36\sqrt{3}\right) = 567.$

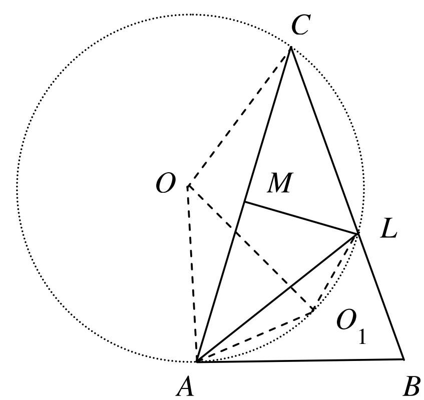
6. Да се намери най-малката стойност на функцията $f(x) = \cos x \sin 2x - \cos 2x - 2\sin x - 1.$

Решение. От формулите за половинките ъгли получаваме, че $f(x) = 2(\cos x)^2 \sin x - 2(\cos x)^2 - 2\sin x.$ От основното тригонометрично тъждество следва, че $f(x) = 2\left(-(\sin x)^3 + (\sin x)^2 - 1\right).$ Полагаме $\sin x = y \in [-1;1]$ и разглеждаме функцията $g(y) = -y^3 + y^2 - 1.$ Пресмятаме $g'(y) = 2y - 3y^2$ и следователно $g'(y) = 0$ за $y_1 = 0 \in [-1;1]$ и $y_2 = \frac{2}{3} \in [-1;1]$. Функцията $g(y)$ намалява за $y \in [-1;0) \cup \left(\frac{2}{3};1\right]$ и расте за $y \in \left(0;\frac{2}{3}\right)$. Следователно $g(0) = -1$ е локален минимум за $g(y)$. Пресмятаме $g(1) = -1$ и следователно най-малката стойност на $g(y)$ в интервала $[-1,1]$ е $g(0) = g(1) = -1$. Следователно най-малката стойност на функцията $f(x)$ е -2, като тя се достига при $x = k\pi$ и $x = \frac{\pi}{2} + 2l\pi$, където k и l са цели числа.

7. В равнобедрения триъгълник $ABC\,(AC = BC)$ окръжността, имаща за диаметър вътрешната ъглополовяща $AL\,(L \in BC)$, минава през средата на бедрото AC. Точките O и O_1 са съответно центровете на описаните около триъгълниците ALC и ABL

окръжности. Да се намери дължината на отсечката OO_1, ако радиусът на описаната около триъгълника ABC окръжност има дължина 7.

Решение. Нека средата на бедрото AC е точката M. От условието следва, че $LM \perp AC$ и следователно $\triangle ALC$ е равнобедрен, като $AL = CL$. Оттук $\sphericalangle ACL = \sphericalangle CAL = \frac{1}{2}\sphericalangle BAC$, което заедно с $\sphericalangle BAC = \sphericalangle ABC$ ни дава $\sphericalangle BAC = \sphericalangle ABC = 72^\circ$ и $\sphericalangle ACB = 36^\circ$. От $\triangle ABL$ имаме $\sphericalangle AO_1L = 2\sphericalangle ABL = 144^\circ$. Тогава $\sphericalangle ACL + \sphericalangle AO_1L = 180^\circ$ и следователно четириъгълникът AO_1LC е вписан в окръжност. Но точките A, L и C лежат на окръжността с център точката O и следователно точката O_1 лежи на същата окръжност, т.е. дължината на отсечката OO_1 е равна на дължината на радиуса на описаната около $\triangle ALC$ окръжност. От синусовата теорема за $\triangle ALC$ получаваме $OO_1 = R_{ALC} = \dfrac{AC}{2\sin 108^\circ} = \dfrac{AC}{2\sin 72^\circ}$, а от синусовата теорема за $\triangle ABC$ имаме $\dfrac{AC}{2\sin 72^\circ} = 7$. Следователно $OO_1 = 7$.



8. Дадена е функцията $f(x) = x^2 + ax + 1$, където a е реален параметър. Да се намерят стойностите на a, за които за всеки три числа x, y и z от интервала $[0,1]$ числата $f(x), f(y)$ и $f(z)$ са дължини на страните на някакъв триъгълник.

Решение. Нека с M и m означим съответно най-голямата и най-малката стойност на $f(x)$ в интервала $[0;1]$. Тогава необходимото и достатъчно условие числата $f(x)$, $f(y)$ и $f(z)$ да бъдат дължините на страните на триъгълник за всяко $x, y, z \in [0;1]$ е неравенството $2m > M$. Ще разгледаме три случая в зависимимост от разположението на $-\frac{a}{2}$ спрямо $[0;1]$.

1 сл.) $-\frac{a}{2} < 0$, т.е. $a > 0$. Тогава $m = f(0)$, $M = f(1)$ и неравенството $2m > M$ приема вида $2 > 2 + a$. Оттук $a < 0$, което противоречи на $-\frac{a}{2} < 0$.

2 сл.) $-\frac{a}{2} > 1$, т.е. $a < -2$. Тогава $m = f(1)$, $M = f(0)$ и неравенството $2m > M$ приема вида $4 + 2a > 1$. Оттук $a > -\frac{3}{2}$, което противоречи на $-\frac{a}{2} > 1$.

3 сл.) $-\frac{a}{2} \in [0;1]$, т.е. $-2 \le a \le 0$. Тогава $m = f\left(-\frac{a}{2}\right)$ и $M = \max\left\{f(0), f(1)\right\}$. Следователно $2m > M$ тогава и само тогава, когато $2 - \frac{a^2}{2} > 1$ и $2 - \frac{a^2}{2} > 2 + a$. Последните две неравенства са еквивалентни на $a \in \left(-\sqrt{2}; \sqrt{2}\right)$ и $a \in (-2;0)$, откъдето $a \in \left(-\sqrt{2};0\right)$.

Следователно търсените стойности са $a \in \left(-\sqrt{2};0\right)$.