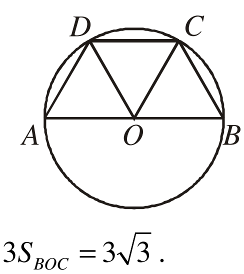
СОФИЙСКИ УНИВЕРСИТЕТ „СВ. КЛИМЕНТ ОХРИДСКИ“
ПИСМЕН КОНКУРСЕН ИЗПИТ ПО МАТЕМАТИКА
ВТОРО РАВНИЩЕ
22 МАРТ 2015 г.

ЗАДАЧИ И ПРИМЕРНИ РЕШЕНИЯ – ТЕМА 2

1. Нека положителните числа $a_1, a_2, \dots, a_{20}$ (в този ред) образуват геометрична прогресия с частно $q \neq 1$. Да се намери q, ако е известно, че сумата на първите 10 члена на прогресията е 5 пъти по-малка от сумата на всичките двадесет члена на прогресията.

Решение: Нека с S_n означим сумата $S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$. Тогава $S_n = a_1 \dfrac{q^n - 1}{q - 1}$ и от $5S_{10} = S_{20}$ получаваме $5\left(q^{10} - 1\right) = q^{20} - 1$, откъдето $q^{10} = 1$ или $q^{10} = 4$. Тъй като числата $a_1, a_2, \dots, a_{20}$ са положителни, в сила е $q > 0$ и тогава $q^5 = 1$ или $q^5 = 2$. Но $q \neq 1$ и следователно $q^5 = 2$, т.е. $q = \sqrt[5]{2}$.

2. В окръжност с радиус 2 е вписан трапец $ABCD$ с основа $AB = 4$. Да се намери лицето на трапеца, ако $\sphericalangle ABC = 2\sphericalangle BAC$.

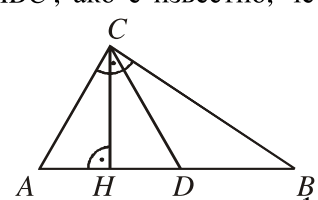


Решение: Нека точката O е центърът на окръжността. От това, че трапецът е вписан в окръжност, следва, че $AD = BC$ и $\sphericalangle ABC = \sphericalangle BAD$. Тъй като $AB = 4$, то AB е диаметър и следователно $\sphericalangle ACB = 90^\circ$. Оттук и $\sphericalangle ABC = 2\sphericalangle BAC$ получаваме $\sphericalangle ABC = \sphericalangle BOC = \sphericalangle AOD = 60^\circ$, откъдето $\sphericalangle COD = 60^\circ$. Така триъгълниците AOD, DOC и COB са равностранни със страна 2. Следователно лицето на трапеца е $S = 3S_{BOC} = 3\sqrt{3}$.

3. Да се реши уравнението $\sqrt{25 - x\,|\,x - 10\,|} = -\dfrac{x^2 - 9x + 20}{2}$.

Решение: За да има смисъл уравнението, необходимо е $x^2 - 9x + 20 \leq 0$, т.е. $x \in [4;5]$. При $x \in [4;5]$, $|\,x - 10\,| = 10 - x$ и следователно $25 - x\,|\,x - 10\,| = x^2 - 10x + 25 = (x-5)^2$. Тогава даденото уравнение е еквивалентно на $|\,x - 5\,| = -\dfrac{x^2 - 9x + 20}{2}$. При $x \in [4;5]$ в сила е $|\,x - 5\,| = 5 - x$, откъдето даденото уравнение е еквивалентно на $x^2 - 11x + 30 = 0$. Последното има корени $x_1 = 5 \in [4;5]$ и $x_2 = 6 \notin [4;5]$. Следователно даденото уравнение има единствено решение $x = 5$.

4. В правоъгълния триъгълник ABC ($\sphericalangle ACB = 90^\circ$) точка D, лежаща на хипотенузата AB, е такава, че $AD : DB = 18 : 7$. Да се намери лицето на ΔABC, ако е известно, че периметърът му е равен на 12 и $CA = CD$.



Решение: Нека CH ($H \in AB$) е височината към хипотенузата. От $CA = CD$ следва, че $AH = HD$. Оттук и

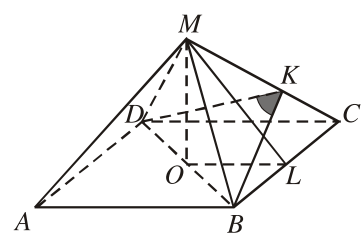
$AD:DB=18:7$ получаваме $AH=\dfrac{9}{25}AB$ и $BH=\dfrac{16}{25}AB$. От $AC^2=AH.AB$ и $BC^2=BH.AB$ следва, че $AC=\dfrac{3}{5}AB$ и $BC=\dfrac{4}{5}AB$. От друга страна $AB+BC+AC=12$, откъдето $AB=5$, $AC=3$ и $BC=4$. Следователно $S_{ABC}=6$.

5. Да се реши неравенството $3^x+3^{|x|}\geq 2\sqrt{3}.$

Решение: Ако $x\geq 0,$ то даденото неравенство е еквивалентно на $3^x\geq\sqrt{3},$ т.е. $x\geq\dfrac{1}{2}.$ Ако $x<0,$ то даденото неравенство е еквивалентно на $3^x+3^{-x}\geq 2\sqrt{3}.$ Полагаме $y=3^x.$ Тогава $0<y<1$ и получаваме неравенството $y^2-2\sqrt{3}y+1\geq 0.$ Решенията му в интервала $(0;1)$ са $y\in\left(0;\sqrt{3}-\sqrt{2}\right].$ От $3^x\leq\sqrt{3}-\sqrt{2}$ получаваме $x\leq\log_3\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right).$

Следователно решение на неравенството са $x\in\left(-\infty;\log_3\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)\right]\cup\left[\dfrac{1}{2};+\infty\right).$

6. В правилна четириъгълна пирамида ъгълът между околна стена и основата е равен на $45°.$ Да се намери мярката на ъгъла между две съседни околни стени.



Решение: Нека пирамидата е $ABCDM$ с основа $ABCD$ и връх M, а точката O е центърът на квадрата $ABCD,$ L е средата на BC и нека $AB=a$. Тогава $ML\perp BC$ и $OL\perp BC$ и следователно $\sphericalangle MLO=45°.$ Оттук $ML=\dfrac{OL}{\cos 45°}=\dfrac{a}{\sqrt{2}}$. Сега от правоъгълния триъгълник MCL получаваме

$$MC=\sqrt{ML^2+LC^2}=\frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

Височините от върховете B и D на еднаквите триъгълници BCM и DCM имат равни дължини, пресичат правата CM в една и съща точка K и следователно ъгълът между тези две околни стени е $\sphericalangle BKD.$ От триъгълника BCM имаме $ML.BC=MC.BK$, откъдето $BK=\dfrac{ML.BC}{MC}=a\sqrt{\dfrac{2}{3}}$. Сега от косинусовата теорема за $\triangle BKD,$ получаваме $\cos\sphericalangle BKD=\dfrac{2BK^2-2a^2}{2BK^2}=-\dfrac{1}{2}$, т.е. $\sphericalangle BKD=120°.$

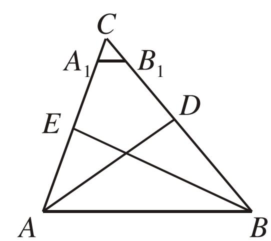
7. Нека корените x_1 и x_2 на уравнението $x^2+ax+b=0$ са реални числа. Да се намерят a и $b,$ ако числата $\dfrac{1}{1+x_1}$ и $\dfrac{1}{1+x_2}$ са корени на същото това уравнение.

Решение: От условието следва, че a и b са реални, $a^2-4b\geq 0$, а корените x_1 и x_2 са различни от $-1.$ Разглеждаме два случая:

1. Нека $x_1 \neq x_2$. Тогава $x_1 = \frac{1}{1+x_1}$ и $x_2 = \frac{1}{1+x_2}$ (тъй като в противен случай бихме получили $x_1 = x_2$). Оттук $x_1^2 + x_1 - 1 = 0$ и $x_2^2 + x_2 - 1 = 0$. Тъй като $x_1 \neq x_2$, оттук следва, че x_1 и x_2 са корените на уравнението $x^2 + x - 1 = 0$. Тогава $x^2 + x - 1 = (x - x_1)(x - x_2) = x^2 + ax + b$ и следовтелно $a = 1$, $b = -1$, а $x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2} \neq -1$.

2. Нека $x_1 = x_2 = y$. Тогава $y = \frac{1}{1+y}$, т.е. $y^2 + y - 1 = 0$. Последното уравнение има корени $y_1 = \frac{-1+\sqrt{5}}{2} \neq -1$ и $y_2 = \frac{-1-\sqrt{5}}{2} \neq -1$. При $x_1 = x_2 = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ от формулите на Виет имаме $a = 1 - \sqrt{5}$ и $b = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$, а при $x_1 = x_2 = \frac{-1-\sqrt{5}}{2}$ получаваме $a = 1 + \sqrt{5}$ и $b = \frac{3+\sqrt{5}}{2}$.

8. В триъгълника ABC ($AC < BC$) вътрешните ъглополовящи AD и BE ($D \in BC, E \in AC$) удовлетворяват неравенствата $AD < AC$ и $BE < BC$. Върху страните AC и BC са избрани съответно точки A_1 и B_1, такива че $AA_1 = AD$ и $BB_1 = BE$. Да се намери мярката на $\sphericalangle ACB$, ако A_1B_1 е успоредна на AB.



Решение: Използваме стандартните означения в триъгълник. От $A_1B_1 \parallel AB$ следва, че $\frac{CA_1}{CA} = \frac{CB_1}{CB}$. Следователно $\frac{b - l_a}{b} = \frac{a - l_b}{a}$, т.е. $\frac{l_a}{b} = \frac{l_b}{a}$. От синусовата теорема за $\triangle ADC$ и $\triangle BEC$ получаваме $\frac{l_a}{b} = \frac{\sin\gamma}{\sin\left(\frac{\alpha}{2}+\gamma\right)}$ и $\frac{l_b}{a} = \frac{\sin\gamma}{\sin\left(\frac{\beta}{2}+\gamma\right)}$. Следователно $\sin\left(\frac{\alpha}{2}+\gamma\right) = \sin\left(\frac{\beta}{2}+\gamma\right)$, т.е. $\frac{\alpha}{2}+\gamma = \frac{\beta}{2}+\gamma$ или $\frac{\alpha}{2}+\gamma = 180^\circ - \left(\frac{\beta}{2}+\gamma\right)$. От условието следва, че първото равенство е невъзможно, а от второто получаваме, че $\sphericalangle ACB = 60^\circ$.