СОФИЙСКИ УНИВЕРСИТЕТ „СВ. КЛИМЕНТ ОХРИДСКИ“

ПИСМЕН КОНКУРСЕН ИЗПИТ ПО МАТЕМАТИКА I

27 март 2016 г.

Тема №2.

ОТГОВОРИ И ПРИМЕРНИ РЕШЕНИЯ НА ЗАДАЧИТЕ

Максималният брой точки от трите части на изпита е 100.

Правилно отбелязаният отговор на всяка задача от 1. до 10. се оценява с 2 точки, а на всяка задача от 11. до 20. – с 3 точки.

1.	А	Б	В	~~Г~~	11.	А	Б	В	~~Г~~
2.	А	Б	~~В~~	Г	12.	А	Б	~~В~~	Г
3.	А	Б	В	~~Г~~	13.	А	~~Б~~	В	Г
4.	А	~~Б~~	В	Г	14.	~~А~~	Б	В	Г
5.	А	Б	В	~~Г~~	15.	А	~~Б~~	В	Г
6.	А	Б	~~В~~	Г	16.	~~А~~	Б	В	Г
7.	~~А~~	Б	В	Г	17.	А	~~Б~~	В	Г
8.	А	~~Б~~	В	Г	18.	А	Б	~~В~~	Г
9.	~~А~~	Б	В	Г	19.	~~А~~	Б	В	Г
10.	А	Б	~~В~~	Г	20.	А	Б	В	~~Г~~

Правилно попълненият отговор на всяка задача от 21. до 25. се оценява с 4 точки.

21.	0
22.	$x = 1$
23.	3 години; 18,00 лв.
24.	57 години
25.	8π

Пълното решение на всяка задача от 26. до 28. се оценява с 10 точки.

Задача 26. Да се реши системата $\left| \begin{array}{l} (x-y)xy^2 = 90 \\ (x+y)xy^2 = 360 \end{array} \right.$.

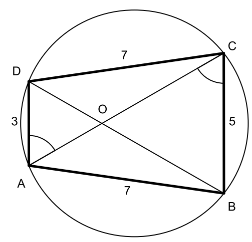
Решение: От първото уравнение изразяваме $xy^2 = \dfrac{90}{x-y}$, заместваме го във второто и достигаме до $\dfrac{x+y}{x-y} = 4$ или $3x = 5y$. Така дадената система става еквивалентна на $\left| \begin{array}{l} 3x = 5y \\ (x-y)xy^2 = 90 \end{array} \right.$.
След заместване на $x = \dfrac{5y}{3}$ във второто уравнение получаваме $y^4 = 81$ или $y = \pm 3$. Така имаме $\left| \begin{array}{l} 3x = 5y \\ y = 3 \end{array} \right. \cup \left| \begin{array}{l} 3x = 5y \\ y = -3 \end{array} \right.$ или $\left| \begin{array}{l} x = 5 \\ y = 3 \end{array} \right. \cup \left| \begin{array}{l} x = -5 \\ y = -3 \end{array} \right.$, т.е. окончателно получаваме, че решенията на задачата са $(5, 3)$, $(-5, -3)$.

Задача 27. На щанд за сладолед се предлагат: ванилов, бананов, кокосов, шоколадов и сладолед с вкус на горски плодове, както и няколко вида сироп: ягодов, малинов, боровинков и карамелов. Колко възможности за избор има родител, който купува за детето си порция сладолед, включваща: по една топка от три различни вида сладолед, покрити с два различни вида сироп, поставени във вафлена фуния или в чашка с лъжичка? Каква е вероятността детето да получи бананов сладолед с карамелов сироп във вафлена фуния?

Решение: Родителят може да избере три топки сладолед от предлаганите пет вида по $C_5^3 = \dfrac{5 \cdot 4 \cdot 3}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 10$ начина, опаковка на сладоледа по $C_2^1 = 2$ начина и два вида сироп от предлаганите четири вида по $C_4^2 = \dfrac{4 \cdot 3}{1 \cdot 2} = 6$ начина, т.е. общият брой възможни комбинации на три различни топки сладолед, опаковка и два различни сиропа е $10 \cdot 2 \cdot 6 = 120$.

Сега при фиксирани вафлена фуния, бананов сладолед и карамелов сироп възможностите за избор са: две топки сладолед от останалите четири вида по $C_4^2 = \dfrac{4 \cdot 3}{1 \cdot 2} = 6$ начина; още един сироп от останалите три вида по $C_3^1 = 3$ начина. Така получаваме, че общият брой възможни комбинации на две различни топки сладолед и сироп е $6 \cdot 3 = 18$. Окончателно търсената вероятност е $P = \dfrac{\textit{бр. благоприятни възможности}}{\textit{бр. всички възможности}} = \dfrac{18}{120} = \dfrac{3}{20}$ или 15%.

Задача 28. Диагоналите AC и BD на вписан в окръжност четириъгълник $ABCD$, със страни $AB = 7$, $BC = 5$, $CD = 7$ и $DA = 3$, се пресичат в точка O. Да се намерят дължините на отсечките AO, BO, CO и DO.



Решение: I. Ако $AC = d_1$, $\sphericalangle ABC = \varphi$, то $\sphericalangle ADC = 180^\circ - \varphi$ и от косинусовата теорема за ΔABC и ΔADC имаме $\left| \begin{array}{l} d_1^2 = 7^2 + 5^2 - 2 \cdot 7 \cdot 5 \cdot \cos\varphi \\ d_1^2 = 3^2 + 7^2 + 2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot \cos\varphi \end{array} \right.$, откъдето получаваме $AC = d_1 = 8$. Аналогично ако $BD = d_2$, $\sphericalangle BAD = \psi$, то $\sphericalangle BCD = 180^\circ - \psi$ и от ΔBAD и ΔBCD имаме $\left| \begin{array}{l} d_2^2 = 7^2 + 5^2 - 2 \cdot 7 \cdot 5 \cdot \cos\psi \\ d_2^2 = 3^2 + 7^2 + 2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot \cos\psi \end{array} \right.$, откъдето получаваме $BD = d_2 = 8$. От косинусовата теорема за ΔABC и ΔCDA имаме $\cos\sphericalangle ACB = \dfrac{5^2 + 8^2 - 7^2}{2 \cdot 5 \cdot 8} = \dfrac{1}{2}$ и $\cos\sphericalangle CAD = \dfrac{3^2 + 8^2 - 7^2}{2 \cdot 3 \cdot 8} = \dfrac{1}{2}$, откъдето $\sphericalangle ACB = \sphericalangle CAD = 60^\circ$. Така правите AD и BC са успоредни и четириъгълникът $ABCD$ е равнобедрен трапец и $\sphericalangle ADB = \sphericalangle CBD = 60^\circ$ (например от окръжността). Сега ΔAOD и ΔBOC са равностранни, т.е. $AO = DO = AD = 3$ и $BO = CO = BC = 5$.

II. Понеже $AB = CD$, то $\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{CD}$ и $\sphericalangle ACB = \sphericalangle CAD$, т.е. AD и BC са успоредни и четириъгълникът $ABCD$ е равнобедрен трапец. Сега имаме $AC = BD$. Понеже $\sphericalangle ADB = \sphericalangle ACB$ (от окръжността) и $\sphericalangle ACB = \sphericalangle CAD$ (от успоредните прави), то ΔADO и ΔBCO са равнобедрени и $\Delta ADO \sim \Delta BCO$, т.е. $AO = DO$, $BO = CO$ и $\dfrac{BO}{DO} = \dfrac{CO}{OA} = \dfrac{5}{3}$.

Ако $AC = d_1$, $\sphericalangle ABC = \varphi$, то $\sphericalangle ADC = 180^\circ - \varphi$ и от косинусовата теорема за ΔABC и ΔADC имаме $\left| \begin{array}{l} d_1^2 = 7^2 + 5^2 - 2 \cdot 7 \cdot 5 \cdot \cos\varphi \\ d_1^2 = 3^2 + 7^2 + 2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot \cos\varphi \end{array} \right.$, откъдето получаваме $AC = d_1 = 8$.

От $\dfrac{BO}{DO} = \dfrac{5}{3}$ и $BO + DO = 8$, намираме $BO = CO = 5$ и $AO = DO = 3$.

III. От свойствата на ъглите, вписани в окръжност имаме $\Delta ABO \sim \Delta DCO$ и $\Delta ADO \sim \Delta BCO$, т.е. $\dfrac{AB}{DC} = \dfrac{BO}{CO}$, $\dfrac{AD}{BC} = \dfrac{DO}{CO}$ или $\dfrac{BO}{DO} = \dfrac{AB \cdot BC}{CD \cdot DA} = \dfrac{7 \cdot 5}{7 \cdot 3} = \dfrac{5}{3}$.

Ако $AC = d_1$, $\sphericalangle ABC = \varphi$, то $\sphericalangle ADC = 180^\circ - \varphi$ и от косинусовата теорема за ΔABC и ΔADC имаме $\left| \begin{array}{l} d_1^2 = 7^2 + 5^2 - 2 \cdot 7 \cdot 5 \cdot \cos\varphi \\ d_1^2 = 3^2 + 7^2 + 2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot \cos\varphi \end{array} \right.$, откъдето получаваме $AC = d_1 = 8$.

Аналогично ако $BD = d_2$, $\sphericalangle BAD = \psi$, то $\sphericalangle BCD = 180^\circ - \psi$ и от ΔBAD и ΔBCD имаме $\left| \begin{array}{l} d_2^2 = 7^2 + 5^2 + 2 \cdot 7 \cdot 5 \cdot \cos\psi \\ d_2^2 = 3^2 + 7^2 - 2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot \cos\psi \end{array} \right.$, откъдето получаваме $BD = d_2 = 8$.

От $\dfrac{BO}{DO} = \dfrac{5}{3}$ и $BO + DO = 8$, намираме $BO = 5$ и $DO = 3$.

Аналогично $\dfrac{AO}{CO} = \dfrac{DA \cdot AB}{BC \cdot CD} = \dfrac{3 \cdot 7}{5 \cdot 7} = \dfrac{5}{3}$ и $AO + CO = 8$, намираме $AO = 3$ и $CO = 5$.