СОФИЙСКИ УНИВЕРСИТЕТ „СВ. КЛИМЕНТ ОХРИДСКИ“
ПИСМЕН КОНКУРСЕН ИЗПИТ ПО МАТЕМАТИКА II

19 юни 2016 г.

Тема №1

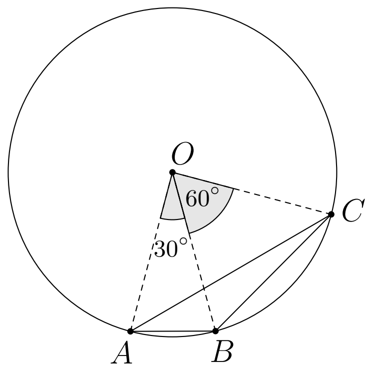
Задача 1. Да се реши неравенството

$$(x^{2016}-1)|x|<0.$$

Решение: Неравенството не е изпълнено за $x=0$. При $x\neq 0$, от $|x|>0$ следва, че неравенството е еквивалентно на $x^{2016}-1<0$, на което решенията са $x\in(-1,1)$. Отчитайки, че $x\neq 0$, окончателно получаваме $x\in(-1,0)\cup(0,1)$.

Задача 2. В окръжност с радиус 1 е вписан триъгълник. Върховете му разделят окръжността на три дъги, чиито дължини се отнасят както $1:2:9$. Да се намери лицето на триъгълника.

Решение: Означаваме с O центъра на окръжността. Нека трите върха A, B и C са такива, че дъгите $\overset{\frown}{AB}$, $\overset{\frown}{BC}$ и $\overset{\frown}{CA}$ са съответно α, 2α и 9α. От $\alpha+2\alpha+9\alpha=360^\circ$ получаваме $\alpha=30^\circ$. Тогава $\sphericalangle AOB=30^\circ$, $\sphericalangle BOC=60^\circ$ и $\sphericalangle CBA=\dfrac{1}{2}(360^\circ-90^\circ)=135^\circ$. Страната BC, като страна в равностранния триъгълник BOC има дължина 1. От косинусова теорема за $\triangle AOB$ имаме $AB^2=AO^2+BO^2-2AO.BO.\cos 30^\circ=2-\sqrt{3}$ и $AB=\sqrt{2-\sqrt{3}}$.



За лицето на триъгълника получаваме $S_{\triangle ABC}=\dfrac{AB.BC}{2}.\sin 135^\circ=\dfrac{\sqrt{4-2\sqrt{3}}}{4}=\dfrac{\sqrt{3}-1}{4}$.

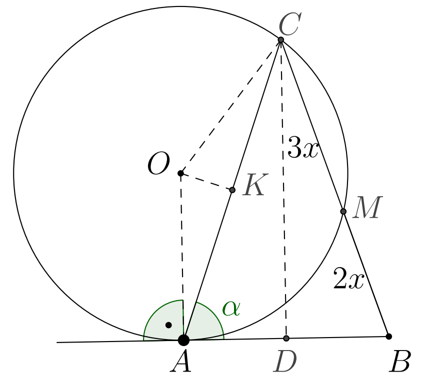
Задача 3. Първият член a_1, седмият и седемнадесетият член на растяща аритметична прогресия са последователни членове на геометрична прогресия. Да се намери частното на геометричната прогресия и разликата на аритметичната прогресия, ако $a_1^2=9$.

Решение: Нека d е разликата на аритметичната прогресия. Тогава седмият и седемнадесетият член на аритметичната прогресия са съответно $a_7=a_1+6d$ и $a_{17}=a_1+16d$. От условието за геометрична прогресия имаме $a_1.a_{17}=a_7^2$, и последователно получаваме $a_1.(a_1+16d)=(a_1+6d)^2$, $a_1^2+16a_1d=a_1^2+12a_1d+36d^2$, $4a_1d=36d^2$ и $a_1=9d$. От условието $a_1^2=9$ имаме две възможности: $a_1=3$, с $d=\dfrac{1}{3}$ и $a_1=-3$, с $d=-\dfrac{1}{3}$. По условие аритметичната прогресия е растяща, следователно втория случай отпада и тогава $d=\dfrac{1}{3}$, а за частното q на геометричната прогресия имаме $q=\dfrac{a_7}{a_1}=\dfrac{5}{3}$.

Задача 4. Даден е равнобедрен триъгълник ABC $(AC=BC)$, за който $AB<AC$. Окръжност с радиус $R=10\sqrt{10}$ се допира до правата AB в точка A, минава през точка C и пресича страната BC във вътрешна точка M така, че $BM:MC=2:3$. Да се намери лицето на триъгълника ABC.

Решение: Означаваме с O центъра на окръжността, с D средата на основата AB и с K средата на бедрото AC. Нека $BM=2x$ и $MC=3x$. От свойството на секущи и допирателни имаме $AB^2=BM.BC=10x^2$ и $AB=\sqrt{10}x$. Нека $\sphericalangle BAC=\alpha$. Тогава $\sphericalangle OAK=90^\circ-\alpha$.

От правоъгълния $\triangle ADC$ имаме $\cos\alpha = \dfrac{AD}{AC} = \dfrac{AB}{2AC} = \dfrac{1}{\sqrt{10}}$. От това, че α е остър и основното тригонометрично тъждество имаме $\sin\alpha = \dfrac{3}{\sqrt{10}}$. В правоъгълния $\triangle OAK$ имаме $\sin\alpha = \cos(90^\circ - \alpha) = \cos\sphericalangle OAK = \dfrac{KA}{AO} = \dfrac{AC}{2AO} = \dfrac{5x}{2.10.\sqrt{10}}$ или $\dfrac{3}{\sqrt{10}} = \dfrac{5x}{2.10.\sqrt{10}}$. Така получаваме $x = 12$ и $AC = 60$. Тогава $AB = 12\sqrt{10}$ и за лицето на триъгълника имаме $S_{\triangle ABC} = \dfrac{AB.AC}{2}.\sin\alpha = 1080$.



Задача 5. Да се реши неравенството

$$\sqrt{100 - x^2} \; > \; x - 2.$$

Решение: Неравенството има смисъл за $100 - x^2 \geq 0$ т. е. $x \in [-10, 10]$.

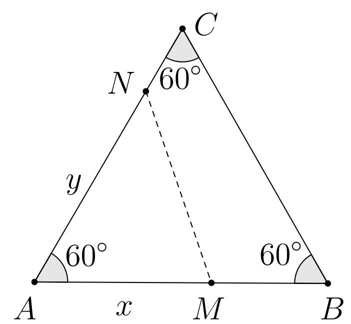
I. При $x \in [-10, 2)$, т. е. $x - 2 < 0$, неравенството е изпълнено, защото в дясната страна е отрицателна, а лявата неотрицателна.

II. При $x \in [2, 10]$, т. е. $x - 2 \geq 0$, неравенството е еквивалентно на $100 - x^2 > (x-2)^2$. Последното е еквивалентно на $x^2 - 2x - 48 < 0$ и има решение $x \in (-6, 8)$. Отчитайки интервала в който разглеждаме получаваме $x \in [2, 8)$.

Окончателно, като обединение на решенията от I. и II., имаме $x \in [-10, 8)$.

Задача 6. Даден е равностранен триъгълник с дължина на страната a. Да се намери дължината на най-късата отсечка, краищата на която лежат върху контура на триъгълника и която разделя триъгълника на две равнолицеви части.

Решение:
Нека върховете на триъгълника са A, B и C, а краищата на търсената отсечка са M и N. Без ограничение на общността предполагаме, че $M \in AB$ и $N \in AC$. Нека $AM = x$ и $AN = y$. От условието за разполовяване на лицето следва, че $\dfrac{AM.AN}{2}.\sin 60^\circ = \dfrac{1}{2}.\dfrac{a^2}{2}.\sin 60^\circ$, т. е. $x.y = \dfrac{a^2}{2}$. От косинусова теорема за $\triangle AMN$ имаме $MN^2 = x^2 + y^2 - 2x.y\cos 60^\circ = x^2 + y^2 - \dfrac{a^2}{2}$. Минималността на MN е еквивалентна на минималността на $MN^2 = x^2 + y^2 - \dfrac{a^2}{2}$ при условие $x.y = \dfrac{a^2}{2}$.



Първи начин: Прилагайки неравенството $x^2 + y^2 \geq 2xy$ (равносилно на $(x-y)^2 \geq 0$), за MN^2 получаваме $MN^2 \geq 2xy - \dfrac{a^2}{2} = \dfrac{a^2}{2}$, като равенство се достига при $x = y = \dfrac{a}{\sqrt{2}} = MN$. Окончателно най-късата отсечка MN е с дължина $\dfrac{a}{\sqrt{2}}$.

Втори начин:
От условието $x.y = \dfrac{a^2}{2}$ следва, че $y = \dfrac{a^2}{2x}$. Тогава $MN^2 = x^2 + \dfrac{a^4}{4x^2} - \dfrac{a^2}{2}$.

Нека $f(x) = x^2 + \dfrac{a^4}{4x^2} - \dfrac{a^2}{2}$, $x \in (0, a]$. За производната получаваме $f'(x) = 2x - \dfrac{a^4}{2x^3} = \dfrac{4x^4 - a^4}{2x^3}$.

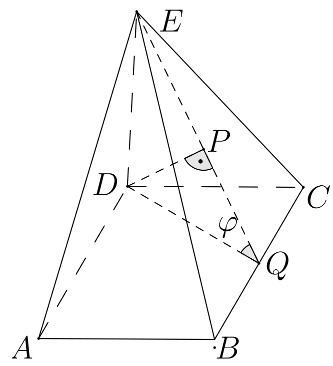
Имаме, че $\operatorname{sign}(f'(x)) = \operatorname{sign}(4x^4 - a^4) = \operatorname{sign}\left(x - \dfrac{a}{\sqrt{2}}\right)$, където $\operatorname{sign}(u)$ е знакът на u. Тогава $f(x)$ намалява в интервала $\left(0, \dfrac{a}{\sqrt{2}}\right)$ и расте в $\left(\dfrac{a}{\sqrt{2}}, a\right]$. Следователно $f(x)$ достига своя минимум в точката $x = \dfrac{a}{\sqrt{2}}$ и е равен на $\dfrac{a^2}{2}$. Това означава, че най-късата отсечка MN е с дължина $\dfrac{a}{\sqrt{2}}$.

	$x \in \left(0, \dfrac{a}{\sqrt{2}}\right)$	$x \in \left(\dfrac{a}{\sqrt{2}}, a\right]$
f'	$-$	$+$
f	$\searrow$	$\nearrow$

Задача 7. Основата на пирамида $EABCD$ е ромба $ABCD$, за който $BD = AB = AD = 4$. Околният ръб ED е перпендикулярен на равнината на основата. Разстоянието от точката D до равнината BCE е 3. Да се намери големината на двустенния ъгъл φ между равнините BCE и $ABCD$.

Решение:
По условие $\triangle BCD$ е равностранен. Нека Q е средата на BC. Тогава $DQ \perp BC$ (1). От еднаквостта на $\triangle BDE$ и $\triangle CDE$ следва, че $\triangle BCE$ е равнобедрен и тогава $EQ \perp BC$ (2). От (1) и (2) следва, че равнината $DQE \perp BC$ (3). Нека $P \in EQ$ е такава, че $DP \perp EQ$ (4). Понеже $DP \in DQE$, то от (3) следва $DP \perp BC$ (5). От (4) и (5) следва, че D е перпендикулярна на равнината BCE и тогава $DP = 3$.

От (1) и (3) следва, че $\varphi = \sphericalangle DQE$ е линейният ъгъл между равнините BCE и $ABCD$. За DQ, като височина в равностранния $\triangle BCD$ имаме $DQ = 4.\dfrac{\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}$. Накрая в правоъгълния $\triangle DQP$ имаме $\sin\varphi = \dfrac{3}{2\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$, т. е. $\varphi = 60°$.



Задача 8. Да се намерят стойностите на реалния параметър a, при които уравнението $\left(x^2 - (a+1)x + 3(a-2)\right).\lg(2a - x - 1) = 0$ има поне един корен в интервала $[-1, 2]$, а извън този интервал няма корени.

Решение: Уравнението има смисъл за такива x, за които $2a - x - 1 > 0$, т. е. $DM : x < 2a - 1$.
I. Уравнението $\lg(2a - x - 1) = 0$, е равносилно на $2a - x - 1 = 1$ и има корен $x_1 = 2a - 2$.
II. Уравнението $x^2 - (a+1)x + 3(a-2) = 0$, има корени $x_2 = a - 2$ и $x_3 = 3$.

Коренът $x_3 \notin [-1, 2]$, следователно трябва $x_3 = 3 \notin DM$, което означава $3 \geq 2a - 1$ и $a \leq 2$. (1)

Понеже $x_1 \in DM$, то трябва $x_1 = 2a - 2 \in [-1, 2]$, т. е. $a \in \left[\dfrac{1}{2}, 2\right]$. (2)

За x_2 имаме следните две възможности:
$x_2 = a - 2 \notin DM$, което означава $a - 2 \geq 2a - 1$ и $a \leq -1$, (3)
или $\left|\begin{array}{l} x_2 \in DM \\ x_2 \in [-1, 2] \end{array}\right.$ т. е. $\left|\begin{array}{l} a > -1 \\ a - 2 \in [-1, 2] \end{array}\right.$, което води до $a \in [1, 4]$. (4)

Обединяваме условия (3) и (4) и получаваме ограниченията за x_2, а именно $a \in (\infty, -1] \cup [1, 4]$. (5)

Сечението на условия (1), (2) и (5) е $a \in [1, 2]$.