СОФИЙСКИ УНИВЕРСИТЕТ „СВ. КЛИМЕНТ ОХРИДСКИ“
ПИСМЕН КОНКУРСЕН ИЗПИТ ПО МАТЕМАТИКА II

20 март 2016 г.

Тема №3

Задача 1. Да се реши неравенството $(x-3)(x-7)\sqrt{\dfrac{x-4}{x-5}} \le 0$.

Решение: Неравенството има смисъл за $x \in (-\infty, 4] \cup (5, \infty)$ и тогава е еквивалентно на $(x-3)(x-7) \le 0$. Решенията на последното неравенство са $x \in [3, 7]$.
Окончателно $x \in [3, 4] \cup (5, 7]$.

Задача 2. В правоъгълния триъгълник ABC $(BC > AC)$, с прав ъгъл при върха C, радиусът на вписаната в триъгълника окръжност е $r = 6$, а радиусът на описаната около него окръжност е $R = \dfrac{39}{2}$. Да се намерят страните на триъгълника.

Решение: Използвайки стандартни означения, имаме $c = 2R = 39$ и $a+b = 51$ $\left(r = \dfrac{a+b-c}{2}\right)$.
Оттук и от питагоровата теорема получаваме $\begin{vmatrix} a+b=51 \\ a^2+b^2=1521 \end{vmatrix}$, откъдето $ab = 540$ и $\{a, b\} = \{15, 36\}$. Окончателно $a = 36$ и $b = 15$.

Задача 3. Нека $\alpha \in \left(\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{3\pi}{2}\right)$ и $\operatorname{tg}\alpha = -\dfrac{7}{24}$. Да се намери $\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2}$.

Решение:

Първи начин: Нека $x = \operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2}$. Тъй като $\operatorname{tg}\alpha < 0$, то $\alpha \in \left(\dfrac{\pi}{2}, \pi\right)$, $\dfrac{\alpha}{2} \in \left(\dfrac{\pi}{4}, \dfrac{\pi}{2}\right)$ и $x > 0$. От формулата $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}$, последователно получаваме $-\dfrac{7}{24} = \dfrac{2x}{1-x^2}$, $7x^2 - 48x - 7 = 0$ и $x = 7$ или $x = -\dfrac{1}{7}$. Окончателно $\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2} = x = 7$.

Втори начин: Тъй като $\operatorname{tg}\alpha < 0$, то $\alpha \in \left(\dfrac{\pi}{2}, \pi\right)$, и $\cos\alpha < 0$.

От формулата $\cos^2\alpha = \dfrac{1}{1+\operatorname{tg}^2\alpha}$, получаваме $\cos^2\alpha = \dfrac{24^2}{25^2}$ и тогава $\cos\alpha = -\dfrac{24}{25}$.

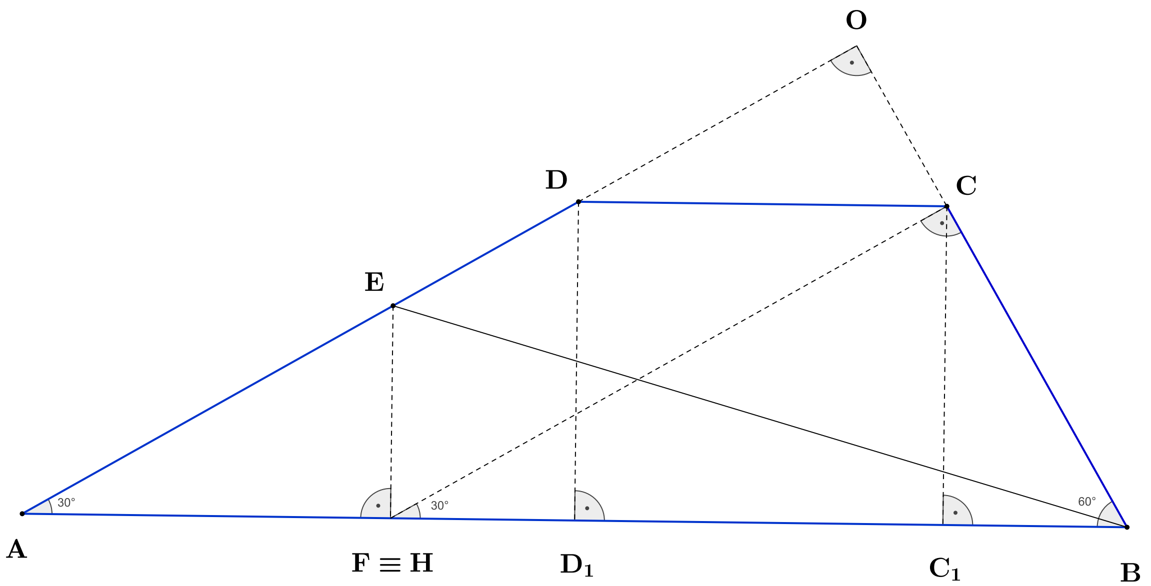
От формулите $\sin^2\dfrac{\alpha}{2} = \dfrac{1-\cos\alpha}{2}$ и $\cos^2\dfrac{\alpha}{2} = \dfrac{1+\cos\alpha}{2}$ получаваме $\operatorname{tg}^2\dfrac{\alpha}{2} = 49$. Отчитайки, че $\dfrac{\alpha}{2} \in \left(\dfrac{\pi}{4}, \dfrac{\pi}{2}\right)$ имаме $\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2} > 0$. Окончателно $\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2} = 7$.

Задача 4. В трапеца $ABCD$ с основи $AB = 3\sqrt{39}$ и $CD = \sqrt{39}$ ъглите при голямата основа са $\sphericalangle ABC = 60^\circ$ и $\sphericalangle BAD = 30^\circ$, а точката $E \in AD$. Да се намери дължината на отсечката BE, ако тя разполовява лицето на трапеца.

Решение:

Първи начин: Нека бедрата на трапеца се пресичат в точката O. Тогава $\sphericalangle AOB = 90^\circ$ и $AO = AB\cos 30^\circ = \dfrac{9}{2}\sqrt{13}$, $BO = AB\sin 30^\circ = \dfrac{3}{2}\sqrt{39}$. Тъй като $\dfrac{AB}{CD} = 3$, то $\dfrac{S_{AOB}}{S_{COD}} = 3^2 = 9$. Ако означим с S лицето на триъгълника COD, то $S_{ABCD} = 8S$ и $S_{ABE} = S_{EBCD} = 4S$. От тук $S_{EBO} = 5S$, $\dfrac{OE}{EA} = \dfrac{S_{EBO}}{S_{ABE}} = \dfrac{5}{4}$ и $OE = \dfrac{5}{9}AO = \dfrac{5}{2}\sqrt{13}$. Окончателно, от питагоровата теорема за триъгълника EBO, получаваме $BE = \sqrt{OE^2 + BO^2} = \sqrt{\dfrac{9}{4}\cdot 39 + \dfrac{25}{4}\cdot 13} = 13$.

Втори начин: Построяваме $CF \parallel AD$, $F \in AB$. От правоъгълния $\triangle FCB$ $BC = \dfrac{BF}{2} = \sqrt{39}$. Тогава $S_{\triangle FCB} = BF.BC.\sin 60^\circ = \dfrac{39\sqrt{3}}{2}$, $S_{AFCD} = S_{\triangle FCB}$ и $S_{ABCD} = 39\sqrt{3}$. От условието $2S_{\triangle ABE} = AB.AE.\sin 30^\circ = S_{ABCD}$ получаваме $AE = 2\sqrt{13}$. Накрая от косинусова теорема за $\triangle ABE$, $BE^2 = AB^2 + AE^2 - 2AB.AE.\cos 30^\circ$, получаваме $BE = 13$.



Задача 5. Да се реши неравенството

$$\log_{\frac{25-x^2}{16}}\left(\frac{24-2x-x^2}{14}\right) > 1.$$

Решение: Неравенството има смисъл за $\dfrac{25-x^2}{16} > 0$, $\dfrac{25-x^2}{16} \neq 1$ и $\dfrac{24-2x-x^2}{14} > 0$, т.е. $x \in (-5,-3) \cup (-3,3) \cup (3,4)$. За тези стойности на x неравенството е еквивалентно на $\log_{\frac{25-x^2}{16}}\left(\dfrac{24-2x-x^2}{14}\right) > \log_{\frac{25-x^2}{16}}\left(\dfrac{25-x^2}{16}\right)$.

I. При $\dfrac{25-x^2}{16} \in (0,1)$, т.е. $x \in (-5,-3)\cup(3,4)$, неравенството е еквивалентно на $\dfrac{24-2x-x^2}{14} < \dfrac{25-x^2}{16}$. Решенията на последното са $x \in (-\infty,-17)\cup(1,\infty)$. Отчитайки интервала, който разглеждаме, решението е $x \in (3,4)$.

II. При $\dfrac{25-x^2}{16} > 1$, т.е. $x \in (-3,3)$, неравенството е еквивалентно на $\dfrac{24-2x-x^2}{14} > \dfrac{25-x^2}{16}$. Решенията на последното са $x \in (-17,1)$. Отчитайки интервала, който разглеждаме, решението е $x \in (-3,1)$.

Окончателно, $x \in (-3,1) \cup (3,4)$.

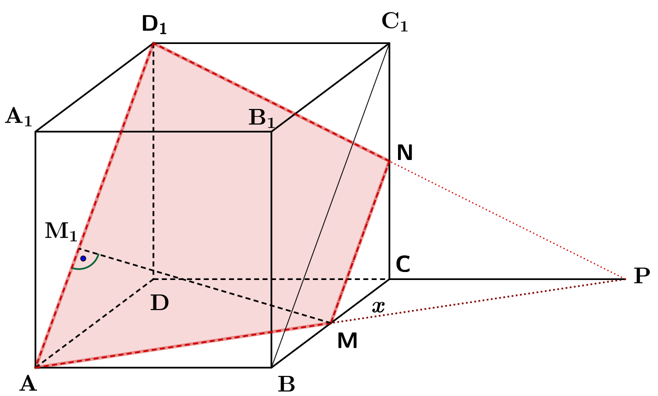
Задача 6. В равнобедрения триъгълник ABC с бедра $AC = BC = 13$ точката $M \in AB$ е такава, че $CM = 5$. Да се намери основата на триъгълника, ако лицето му е възможно най-голямо.

Решение: Нека точка H е средата на отсечка AB и $CH = h$. От условието имаме, че $CH \leq CM$, т.е. $h \leq 5$. От питагорова теорема за $\triangle AHC$ получаваме $AH = \sqrt{13^2 - h^2}$ и тогава $AB = 2\sqrt{169-h^2}$. За лицето на триъгълника имаме $S_{\triangle ABC} = S(h) = \dfrac{AB.CH}{2} = h\sqrt{169-h^2}$, $h \in [0,5]$. За производната получаваме $S'(h) = \dfrac{169-2h^2}{\sqrt{169-h^2}} > 0$ за всяко $h \in [0,5]$. Тогава функцията

$S(h)$ расте в интервала $[0,\,5]$ и максималната си стойност достига за $h=5$. При $h=5$ дължината на основата е $AB=24$.

Задача 7. Даден е куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ със страна $AB=2$. Точка $M\in BC$ е такава, че равнината α определена от точките A, D_1 и M разделя куба на две части, отношението на обемите на които е $17:7$. Намерете лицето на сечението на α и куба.

Решение: Първи начин: От това, че равнините BCC_1B_1 и ADD_1A_1 са успоредни следва, че сечението на α и BCC_1B_1 е права упоредна на AD_1, т.е. успоредна на BC_1. Нека $x=MC$ и $N\in CC_1$ е такава, че $NC=x$. Тогава $N\in\alpha$ и сечението на α и куба е равнобедрения трапец AD_1NM ($AD_1\,||\,MN$). Ако $M\equiv B$, то ADD_1MCN е призма с обем половината обем на куба, т.е. отношението $17:7$ не е изпълнено. При $M\neq B$, пресечената пирамида ADD_1MCN е частта от куба с по-малкия обем. Тогава $V_{ADD_1MCN}=\dfrac{7}{7+17}V_{ABCDA_1B_1C_1D_1}=\dfrac{7}{3}$. Имаме $\mathbf{H}=DC=2$, $\mathbf{B}=S_{ADD_1}=2$ и $\mathbf{B_1}=S_{MCN}=\dfrac{x^2}{2}$. Тогава от формулата $V_{ADD_1MCN}=\dfrac{\mathbf{H}}{3}(\mathbf{B}+\mathbf{B_1}+\sqrt{\mathbf{B}.\mathbf{B_1}})$ получаваме уравнението



$x^2+2x-3=0$, което има решения $x=1$ и $x=-3$. Окончателно $x=1$ и M и N са средите съответно на BC и CC_1.
Нека $M_1\in AD_1$ е такава, че MM_1 е височината на трапеца AD_1NM. От правоъгълния $\triangle AM_1M$ с питагорова теорема получаваме $h=MM_1=\dfrac{3}{\sqrt{2}}$. Имаме $a=AD_1=2\sqrt{2}$ и $b=MN=\sqrt{2}$. Тогава от формулата $S_{AD_1NM}=\dfrac{h}{2}(a+b)$ получаваме $S_{AD_1NM}=\dfrac{9}{2}$.

Втори начин: Нека пресечната точка на правата AM с правата CD е точката P и пресечната точка на D_1P с CC_1 е N. Тогава сечението на куба с равнината α е $AMND_1$ и $V_{ADD_1MCN}=V_{ADD_1P}-V_{MCNP}$. Триъгълникът MCP е подобен на триъгълника ADP, откъдето $CP=\dfrac{2x}{2-x}$ и $V_{ADD_1MCN}=\dfrac{1}{3}(x^2+2x+3)$ ($M\not\equiv B$ и $x\neq 2$). От отношението на обемите намираме, че $x=1$. Тогава $CP=2$, $PM=PN=\sqrt{5}$ и $MN=\sqrt{2}$. Лицето на триъгълника MNP е $\dfrac{3}{2}$, а той е подобен на триъгълника AD_1P с коефициент на подобие 2. Така $S_{AD_1P}=2^2\cdot\dfrac{3}{2}=6$ и $S_{AD_1NM}=S_{AD_1P}-S_{MNP}=\dfrac{9}{2}$.

Задача 8. Да се намерят стойностите на реалния параметър a, за които уравнението

$$(x^2+2x+3-a)(a-|x-3|)=0$$

има точно три различни решения.

Решение:

Първи начин: Да разгледаме уравненията (1) $x^2+2x+3=a$ и (2) $|x-3|=a$. Уравнението (1) няма решение за $a<2$, има точно 1 решение за $a=2$ и две различни решения за $a>2$. Уравнението (2) няма решение за $a<0$, има точно 1 решение за $a=0$ и две различни решения за $a>0$. Тогава задачата от условието ще има не повече от 2 решения, когато $a<2$.

При $a=2$ ще имаме точно 3 различни решения. За да имаме точно три различни решения за $a>2$, е необходимо (1) и (2) да имат общо решение. Това води до уравнението $x^2+2x+3=|x-3|$. Последното уравнение за $x\geq 3$ е еквивалентно на $x^2+x+6=0$ и няма решение, а за $x<3$ е еквивалентно на $x^2+3x=0$ и има решения $x=-3$ и $x=0$. Съответните стойности за a са 6 и

3. При проверка за $a = 6$, (1) има решения -3 и 1, а (2) има решения -3 и 9, а при $a = 3$ (1) има решения -2 и 0, а (2) има решения 0 и 6. Тогава и в двата случая задачата от условието има точно три различни решения. Окончателно $a = 2, \quad 3, \ 6$.

Втори начин: Построяваме графиките на функциите $f(x) = x^2 + 2x + 3$ и $g(x) = |x - 3|$. От свойства на квадратната функция имаме, че $f(x)$ намалява за $x < -1$ и расте за $x > -1$. Най-малката стойност на $f(x)$ се достига за $x = -1$ и е равна на 2. От свойства на абсолютната стойност имаме, че $g(x)$ намалява за $x < 3$ и расте за $x > 3$. Най-малката стойност на $g(x)$ се достига за $x = 3$ и е равна на 0. Пресечните точки на двете графики са две. Те са решенията на уравнението $x^2 + 2x + 3 = |x - 3|$ и са $x = -3$ и $x = 0$.

Тази информация е достатъчна за да можем, прекарвайки хоризонтални прави с уравнения $y = a$, да определяме общия брой пресечни точки на тези прави и обединението от графиките на двете функции. По този начин намираме и броя на различните решения на изходната задача. Вижда се, че за $a = 2, \quad 3$, и 6 имаме точно три пресечни точки.

Отговор: $a = 2, \quad 3, \ 6$.