СОФИЙСКИ УНИВЕРСИТЕТ „СВ. КЛИМЕНТ ОХРИДСКИ“

ПИСМЕН КОНКУРСЕН ИЗПИТ ПО МАТЕМАТИКА

ВТОРО РАВНИЩЕ

19 МАРТ 2017 г.

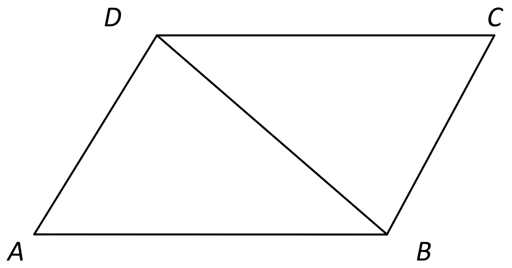
ЗАДАЧИ И ПРИМЕРНИ РЕШЕНИЯ – ТЕМА 1

1. Да се реши уравнението $|x|-\dfrac{5}{|x|}=-4.$

Решение. Уравнението има смисъл при $x\neq 0.$ Полагаме $y=|x|>0$ и получаваме $y^2+4y-5=0.$ Последното уравнение има единствен положителен корен $y=1.$ Решенията на уравнението $|x|=1$ са $x_1=1$ и $x_2=-1.$

2. В успоредника $ABCD$ $AB>AD$ и $\sphericalangle BAD=60^\circ.$ Да се намерят дължините на страните на успоредника, ако периметърът му е равен на 22 и $BD=7.$

Решение. Нека $AB=a$ и $AD=b.$ От $P(ABCD)=22$ следва, че $a+b=11.$ От косинусовата теорема за триъгълник ABD получаваме $49=a^2+b^2-ab.$ Следователно $ab=24.$ Решенията на системата $\left|\begin{array}{l}a+b=11\\ ab=24\end{array}\right.$ са $a=3, b=8$ или $a=8, b=3.$ От условието следва, че $AB=8,\ AD=3.$

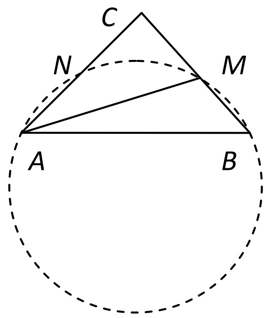


3. Да се намерят три числа, които образуват намаляваща геометрична прогресия, ако е известно, че сборът им е $14,$ а сборът от квадратите им е $84.$

Решение. Нека числата са $a_1, a_2=a_1q, a_3=a_1q^2,$ където q е частното на прогресията. От равенствата $a_1+a_2+a_3=14, a_1^2+a_2^2+a_3^2=84$ и $a_2^2=a_1a_3,$ последователно получаваме $\left(a_1+a_3\right)^2=\left(14-a_2\right)^2,$ т.е. $28a_2=196-\left(a_1^2+a_2^2+a_3^2\right)=112,$ или $a_2=4.$ От системата $\left|\begin{array}{l}a_1+a_3=10\\ a_1a_3=16\end{array}\right.$ получаваме, че $a_1=2, a_3=8$ или $a_1=8, a_3=2.$ Следователно търсените числа са $8, 4, 2.$

4. В правоъгълния триъгълник $ABC\left(\sphericalangle ACB=90^\circ\right)$ върховете A, B и средите на катетите лежат на една окръжност. Да се намери дължината на радиуса на тази окръжност, ако $AB=2.$

Решение. Нека точките M и N са средите съответно на катетите BC и AC, а R е радиусът на дадената окръжност. От равенството $CM.CB = CN.CA$ следва, че $CB = CA = \sqrt{2}$. От правоъгълния триъгълник AMC пресмятаме $AM = \frac{\sqrt{10}}{2}$. От синусовата теорема за $\triangle ABM$ намираме $2R = \frac{AM}{\sin 45^\circ}$, т.е. $R = \frac{\sqrt{5}}{2}$.

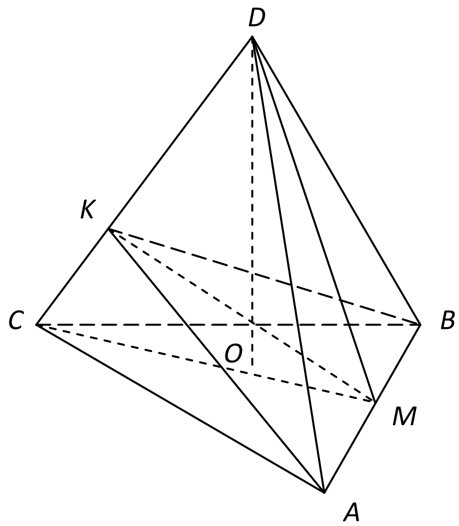


5. Да се намерят стойностите на реалния параметър a, за които уравнението $a9^x - 3^{x+1} + 1 = 0$ има два реални корена, единият от които е положителен, а другият отрицателен.

Решение. Нека реалните корените на уравнението са $x_1 < 0 < x_2$. Полагаме $y = 3^x > 0$ и тогава условието е еквивалентно на задачата да се намерят стойностите на a, за които уравнението $ay^2 - 3y + 1 = 0$ има реални корени y_1 и y_2 такива, че $0 < y_1 < 1 < y_2$. При $a = 0$, уравнението е линейно и има само един реален корен и следователно $a \neq 0$. При $a \neq 0$, за да има уравнението два различни положителни реални корена, трябва $D = 9 - 4a > 0,\ y_1 + y_2 = \frac{3}{a} > 0$ и $y_1 y_2 = \frac{1}{a} > 0$, т.е. $a \in \left(0; \frac{9}{4}\right)$. Ако означим с $f(y) = ay^2 - 3y + 1$, то за бъде изпълнено неравенството $y_1 < 1 < y_2$, трябва $af(1) = a(a-2) < 0$, т.е. $0 < a < 2$. Следователно търсените стойности са $a \in (0; 2)$.

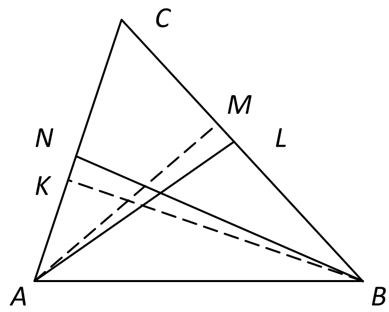
6. Основата на правилна триъгълна пирамида $ABCD$ е триъгълникът ABC с дължина на страната $AB = 2$. Ъгълът между околна стена и основата на пирамидата има големина 45°. През основен ръб на пирамидата е прекарана равнина, сключваща с равнината на основата ъгъл с големина 30°. Да се намери лицето на полученото сечение.

Решение. Нека равнината минава през основния ръб AB и пресича срещуположния околен ръб CD в точка K. От еднаквостта на триъгълниците ACK и BCK следва $AK = BK$, т.е. сечението е равнобедреният триъгълник ABK. Нека точката O е медицентърът на $\triangle ABC$, а точката M е средата на AB. Тогава $CM \perp AB, KM \perp AB$ и $\sphericalangle CMK = 30^\circ, \sphericalangle CMD = 45^\circ$. Да означим $\varphi = \sphericalangle MCK$. От синусовата теорема за $\triangle CMK$ имаме



$\dfrac{CM}{MK}=\dfrac{\sin\left(\varphi+30^\circ\right)}{\sin\varphi}=\cos 30^\circ+\sin 30^\circ\cot g\varphi.$ От правоъгълните триъгълници COD и MOD имаме $\cot g\varphi=\dfrac{CO}{OD}$ $1=\cot g45^\circ=\dfrac{OM}{OD}$. Тъй като $OC:OM=2:1,$ то $\cot g\varphi=2$ и тогава $\dfrac{CM}{MK}=\cos 30^\circ+\sin 30^\circ\cot g\varphi=\dfrac{\sqrt{3}}{2}+1=\dfrac{\sqrt{3}+2}{2}.$ Триъгълниците ABK и ABC имат обща основа, така че $\dfrac{S(\mathrm{ABK})}{S(\mathrm{ABC})}=\dfrac{KM}{CM}=2\left(2-\sqrt{3}\right).$ Лицето на $S\left(ABC\right)=\sqrt{3}$ и следователно $S(ABK)=2\left(2\sqrt{3}-3\right)=4\sqrt{3}-6.$

7. В неравнобедрения триъгълник $ABC,$ $AL\,(\mathrm{L}\in\mathrm{BC})$ и $BN\,(\mathrm{N}\in\mathrm{AC})$ са ъглополовящи съответно на $\sphericalangle BAC$ и $\sphericalangle ABC.$ Да се намери големината на $\sphericalangle ACB,$ ако $BN.AC=AL.BC.$



Решение: I начин. Означаваме с $\alpha=\sphericalangle BAC$ и $\beta=\sphericalangle ABC.$ Нека $AM\perp BC\left(M\in BC\right)$ и $BK\perp AC\left(K\in AC\right).$ От правоъгълните триъгълници ALM и BNK получаваме съответно $\sin\left(\dfrac{\alpha}{2}+\beta\right)=\dfrac{AM}{AL}$ и $\sin\left(\alpha+\dfrac{\beta}{2}\right)=\dfrac{BK}{BN}.$ Следователно даденото условие е еквивалентно на $\dfrac{BK.AC}{\sin\left(\alpha+\dfrac{\beta}{2}\right)}=\dfrac{AM.BC}{\sin\left(\dfrac{\alpha}{2}+\beta\right)}.$ От равенството $BK.AC=AM.BC\left(=2S(ABC)\right)$ следва, че $\sin\left(\dfrac{\alpha}{2}+\beta\right)=\sin\left(\alpha+\dfrac{\beta}{2}\right).$ Следователно $\dfrac{\alpha}{2}+\beta=\alpha+\dfrac{\beta}{2}$ или $\dfrac{\alpha}{2}+\beta=180^\circ-\left(\alpha+\dfrac{\beta}{2}\right).$ От първото равенство получаваме $\alpha=\beta,$ което противоречи на условието, а от второто равенство получаваме $\alpha+\beta=120^\circ.$ Следователно $\sphericalangle ACB=60^\circ.$

II начин. Означаваме с $\alpha=\sphericalangle BAC,\beta=\sphericalangle ABC$ и $\gamma=\sphericalangle ACB.$ Съгласно условието $\dfrac{BN}{BC}=\dfrac{AL}{AC}.$ От синусовата теорема за $\triangle BNC$ и $\triangle ALC$ имаме $\dfrac{BN}{BC}=\dfrac{\sin\gamma}{\sin\left(\alpha+\dfrac{\beta}{2}\right)},\dfrac{AL}{AC}=\dfrac{\sin\gamma}{\sin\left(\dfrac{\alpha}{2}+\beta\right)},$ откъдето получаваме че $\sin\left(\dfrac{\alpha}{2}+\beta\right)=\sin\left(\alpha+\dfrac{\beta}{2}\right).$

Следователно $\dfrac{\alpha}{2}+\beta=\alpha+\dfrac{\beta}{2}$ или $\dfrac{\alpha}{2}+\beta=180^\circ-\left(\alpha+\dfrac{\beta}{2}\right).$ От първото равенство получаваме $\alpha=\beta,$ което противоречи на условието, а от второто равенство получаваме $\alpha+\beta=120^\circ.$ Следователно $\sphericalangle ACB=60^\circ.$

8. Нека реалните числа a и b са такива, че уравнението $\left(ax^2+b\right)\left(ax^2+a^2x+b\right)=0$ има четири различни реални корена, сумата от квадратите на които е равна на 4. Да се намери най-голямата стойност на b.

Решение. От условието следва, че $a\neq 0.$ За да има даденото уравнение четири различни реални корена, трябва уравнението $ax^2+b=0$ да има два различни реални корена x_1 и x_2, уравнението $ax^2+a^2x+b=0$ да има два различни реални корена x_3 и x_4, и двете уравнения да нямат общи корени. Уравнението $ax^2+b=0$ има два различни реални корена тогава и само тогава, когато $\frac{b}{a}<0.$ При $\frac{b}{a}<0,$ уравнението $ax^2+a^2x+b=0$ има също два различни реални корена, защото неговата дискриминанта $D=a^4-4ab>0.$ Освен това, ако x_0 е общ корен за двете уравнения, следва че $a^2x_0=0$ и следователно $x_0=0\left(a\neq 0\right),$ откъдето получаваме, че $b=0,$ което противоречи на условието $\frac{b}{a}<0.$ От условието имаме $x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2=4.$ От формулите на Виет за второто уравнение получаваме $x_3^2+x_4^2=\left(x_3+x_4\right)^2-2x_3x_4=a^2-2\frac{b}{a}$ и следователно $a^2-4\frac{b}{a}=4,$ т.е. $b=\frac{1}{4}a\left(a-2\right)\left(a+2\right).$ От условието $\frac{b}{a}<0$ следва, че $\frac{b}{a}=\frac{1}{4}\left(a-2\right)\left(a+2\right)<0,$ т.е. $a\in\left(-2;0\right)\cup\left(0;2\right).$ Разглеждаме функцията $f(a)=a^3-4a$ в интервала $a\in\left(-2;0\right)\cup\left(0;2\right).$ Пресмятаме $f'(a)=3a^2-4$ и получаваме, че $f'(a)=0$ за $a=\pm\frac{2}{\sqrt{3}}\in\left(-2;0\right)\cup\left(0;2\right).$ Пресмятаме $f\left(\pm\frac{2}{\sqrt{3}}\right)=\mp\frac{16}{3\sqrt{3}}.$ От $\lim\limits_{\substack{a\to-2\\a>-2}}f(\text{a})=0, \lim\limits_{\substack{a\to 2\\a<2}}f(\text{a})=0$ и $\lim\limits_{\substack{a\to 0\\a<0}}f(\text{a})=\lim\limits_{\substack{a\to 0\\a>0}}f(\text{a})=0$ следва, че максимумът на функцията $f(\text{a})$ в интервала $a\in\left(-2;0\right)\cup\left(0;2\right)$ е $f\left(-\frac{2}{\sqrt{3}}\right)=\frac{16}{3\sqrt{3}}.$ Следователно търсената най-голяма стойнст на b е $b=\frac{1}{4}f\left(-\frac{2}{\sqrt{3}}\right)=\frac{4}{3\sqrt{3}}.$