СОФИЙСКИ УНИВЕРСИТЕТ „СВ. КЛИМЕНТ ОХРИДСКИ“

ПИСМЕН КОНКУРСЕН ИЗПИТ ПО МАТЕМАТИКА

ВТОРО РАВНИЩЕ

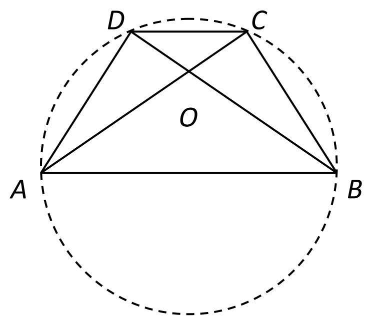
18 ЮНИ 2017 г.

ЗАДАЧИ И ПРИМЕРНИ РЕШЕНИЯ – ТЕМА 1

1. Да се пресметне границата $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{4n+5}-1}{\sqrt{n-1}+1}$.

Решение. Преобразуваме границата $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{4n+5}-1}{\sqrt{n-1}+1}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{4+\frac{5}{n}}-\frac{1}{\sqrt{n}}}{\sqrt{1-\frac{1}{n}}+\frac{1}{\sqrt{n}}}$, откъдето пресмятаме $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{4n+5}-1}{\sqrt{n-1}+1}=\dfrac{\sqrt{4}}{1}=2.$

2. В окръжност е вписан трапец $ABCD\left(AB\parallel CD, AB>CD\right)$, за който O е пресечната точка на диагоналите, $BC=1$ и $\sphericalangle BAD=60^\circ$. Да се намери лицето на трапеца, ако $\sphericalangle COB=60^\circ$.

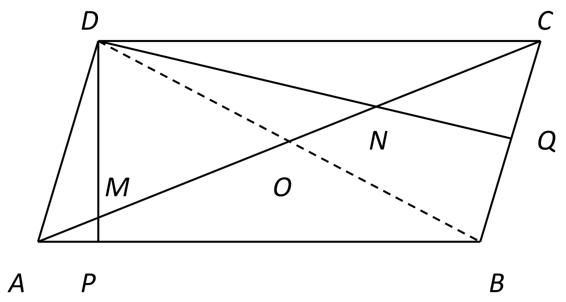


Решение. От това, че трапецът е вписан в окръжност следва, че $AD=BC=1, AC=BD$ и $\sphericalangle CAB=30^\circ$. Следователно $\sphericalangle ACB=90^\circ$. От $\triangle ABC$ пресмятаме $tg60^\circ=\dfrac{AC}{BC}$, т.е. $AC=\sqrt{3}$. Така за лицето имаме $S=\dfrac{1}{2}AC.BD\sin 60^\circ=\dfrac{3\sqrt{3}}{4}$.

3. Да се реши неравенството $\left(\dfrac{3}{7}\right)^{\frac{x^2-2x}{x^2}}\geq 1$.

Решение. Неравенството има смисъл при $x\neq 0$. Тъй като $\dfrac{3}{7}<1$, то даденото неравенство е еквивалентно на дробното неравенство $\dfrac{x^2-2x}{x^2}\leq 0$. Последното има за решение $x\in\left(0;2\right]$, което е решение и на даденото неравенство.

4. В успоредника $ABCD\left(\sphericalangle BAD<90^{\circ}\right)$ $AB=5,$ а височините $DP\left(P\in AB\right)$ и $DQ\left(Q\in BC\right)$ пресичат диагонала AC съответно в точки M и N. Да се намери дължината на диагонала $BD,$ ако $AM:MN:NC=1:3:2.$



Решение. Нека O е пресечната точка на диагоналите на успоредника. Означаваме $AM=x, MN=3x, NC=2x$ и $ON=y.$ От $AO=OC$ имаме $x+3x-y=y+2x,$ т.е. $y=x.$ Сега от $CN:NO=2:1,$ следва че точката N е медицентър на $\triangle BDC$ и следователно DQ е негова медиана. Следователно $\triangle BDC$ е равнобедрен и $BD=DC=AB=5.$

5. Да се намерят стойностите на реалния параметър $a,$ за които уравнението $2\lg\left(x+2\right)=\lg\left(2a\left(x+1\right)\right)$ има единствен реален корен.

Решение. Даденото логаритмично уравнение има смисъл при $x+2>0$ и $a\left(x+1\right)>0.$ След антилогаритмуване достигаме до $\left(x+2\right)^2=2a\left(x+1\right)$ или $x^2-2\left(a-2\right)x+4-2a=0.$ Това квадратно уравнение има реални корени, когато неговата дискриминанта $D=\left(a-2\right)^2-4+2a\geq 0,$ т.е. при $a\in\left(-\infty;0\right]\cup\left[2;+\infty\right).$

За да има логаритмичното уравнение единствен реален корен, трябва или квадратното уравнение $f\left(x\right)=x^2-2\left(a-2\right)x+4-2a=0$ да има единствен реален корен, който е от дефиниционната област, или да има два реални корена, единият от които е от дефиниционната област, а другият не е.

При $a=2$ квадратното уравнение има реален корен $x_1=0,$ който принадлежи на дефиниционното множество. Следователно и даденото логаритнично уравнение има единствен корен. Тъй като $a=0$ не е от дефиниционното множество, следва че $a=0$ не е решение.

Нека дискриминантата $D>0$, т.е. $a\in\left(-\infty;0\right)\cup\left(2;+\infty\right)$. Сега разглеждаме поотделно два случая:

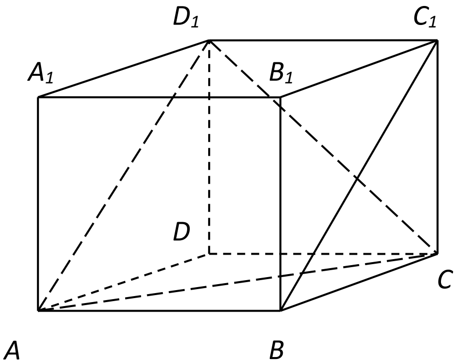
1 случай: При $a>2$ от дефиниционното множество следва, че $x>-1.$ Следователно за да има даденото уравнение единствен реален корен, квадратното уравнение трябва да има два различни реални корена x_1 и $x_2,$ за които е изпълнено $x_1<-1<x_2.$ Последното неравенство е еквивалентно на $f(-1)<0.$ Тъй като $f\left(-1\right)=1>0$ следва, че тези стойности на параметъра a не са решение.

2 случай: При $a<0$ от дефиниционното множество следва, че $-2<x<-1.$ Следователно, за да има даденото уравнение единствен реален корен, квадратното уравнение трябва да има два различни реални корена x_1 и $x_2,$ за които е изпълнено $-2<x_1<-1,$ а x_2 да бъде извън този интервал. Последното условие е еквивалентно на $f(-2)f(-1)=2a\le 0,$ т.е. $a\le 0.$ Следователно при $a<0$ логаритмичното уравнение има единствен реален корен.

Окончателно, търсените стойности са $a\in(-\infty;0)\cup\{2\}.$

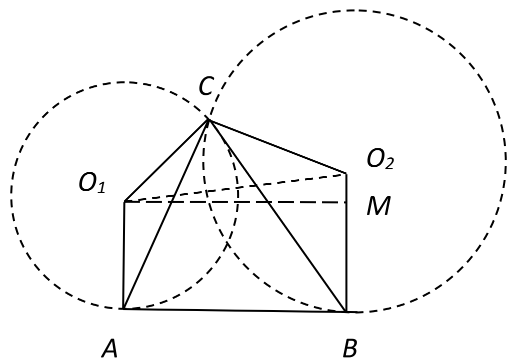
6. Даден е куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с ръб $AB=\sqrt{3}$ ($ABCD$ е основа, а AA_1, BB_1, CC_1 и DD_1 са околни ръбове). Да се намерят ъгълът и разстоянието между правите AC и BC_1.

Решение. Да означим $\sphericalangle\left(AC,BC_1\right)=\varphi.$ От $AD_1 \parallel BC_1$ следва, че $\varphi=\sphericalangle CAD_1=60^\circ,$ защото $\triangle ACD_1$ е равностранен със дължина на страната $\sqrt{6}.$ Освен това равнината ACD_1 съдържа правата AC и е успоредна на правата $BC_1,$ така че търсеното разстояние d е равно на разстоянието от точката B до тази равнина. Сега можем да определим d от равенствата $\frac{1}{3}S(\mathrm{ABC}).\mathrm{D_1D}=V\left(ABCD_1\right)=\frac{1}{3}S(\mathrm{ACD_1}).\mathrm{d}.$ От последните равенства получаваме, че $d=1.$



7. В остроъгълния триъгълник ABC окръжностите с центрове точките O_1, O_2 и радиуси $r_1=1$ и $r_2=3$ се допират до страната AB съответно в точките A, B и минават през точката $C.$ Да се намери дължината на страната $AB,$ ако $\sphericalangle ACB=60^\circ.$

Решение: Нека $\sphericalangle BAC=\alpha$ и $\sphericalangle ABC=\beta.$ От $O_1C=O_1A,$ следва че $\sphericalangle O_1CA=\sphericalangle O_1AC=90^\circ-\alpha.$ Аналогично $\sphericalangle O_2CB=\sphericalangle O_2BC=90^\circ-\beta.$ Следователно $\sphericalangle O_1CO_2=120^\circ.$ От косинусовата теорема за $\triangle O_1CO_2,$ пресмятаме че $O_1O_2^2=1+9+3,$ т.е. $O_1O_2=\sqrt{13}.$ Нека $O_1M\perp O_2B\left(M\in O_2B\right).$ Тогава четириъгълникът $ABMO_1$ е правоъгълник и $AB=O_1M.$ От Питагоровата теорема за $\triangle O_1MO_2,$ получаваме че $O_1M^2=O_1O_2^2-O_2M^2=13-4=9,$ т.е. $O_1M=3.$ Следователно $AB=3.$



8. Да се реши уравнението $4\log_4\left(6x^2+\dfrac{3}{8x^2}+13\right)=2\cos\left(\dfrac{5\pi}{14+\sin(\pi x)}\right)+7.$

Решение. Уравнението има смисъл при $x\neq 0$. Разглеждаме функциите $f(x)=6x^2+\dfrac{3}{8x^2}+13$ и $g(x)=\dfrac{5\pi}{14+\sin(\pi x)}$. Пресмятаме $f'(x)=\dfrac{3(16x^4-1)}{4x^3}$, която се анулира при $x_{1,2}=\pm\dfrac{1}{2}$. Функцията $f(x)$ расте при $x\in\left(-\dfrac{1}{2};0\right)\cup\left(\dfrac{1}{2};+\infty\right)$ и намалява при $x\in\left(-\infty;-\dfrac{1}{2}\right)\cup\left(0;\dfrac{1}{2}\right)$. Следователно минимумът на $f(x)$ се достига при $x=\pm\dfrac{1}{2}$ и той е $f\left(\pm\dfrac{1}{2}\right)=16$.

От неравенството $-1\le\sin(\pi x)\le 1$ следва, че $\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{5\pi}{14+1}\le g(x)\le\dfrac{5\pi}{14-1}=\dfrac{5\pi}{13}$ (като равенствата се достигат съответно при $x=\dfrac{1}{2}+2k,\, k\in\mathbb{Z}$ и $x=-\dfrac{1}{2}+2l,\, l\in\mathbb{Z}$).

Така получаваме, че лявата страна на даденото уравнение има най-малка стойност 8, която се достига за $x=\pm\dfrac{1}{2}$

$$\left(4\log_4\left(6x^2+\frac{3}{8x^2}+13\right)=4\log_4 f(x)\ge 4\log_4 16=8\right),$$

а дясната страна има най-голяма 8, за $x=\dfrac{1}{2}+2k,\, k\in\mathbb{Z}$

$$\left(2\cos\left(\frac{5\pi}{14+\sin(\pi x)}\right)+7=2\cos g(x)+7\le 2\cos\frac{\pi}{3}+7=8\right).$$

Следователно даденото уравнение има единствен реален корен $x=\dfrac{1}{2}$.