ТЕОРЕМИ ЗА СЪЩЕСТВУВАНЕ НА СПЕЦИАЛНИ ТРИПАРАМЕТРИЧНИ СЪВКУПНОСТИ ОТ ПРАВИ В P_4

Иванка Иванова-Каратопраклиева

В работата [2] разгледахме следните три вида специални трифокусни трипараметрични съвкупности M_3 от прави:

А. Съвкупности, някои от принадлежащите на които три конгруенции лежат в тримерни подпространства на P_4 [2; 1., 2., 3, 9, 10.].

Б. Съвкупности, някои от принадлежащите на които три развиваеми повърхнини са равнинни [2; 4., 5., 6., 7., 8.].

В. Съвкупности, някои от фокалните (главните) линии на които са прави [2; 11.—20.].

В настоящата работа ще изследваме въпроса за съществуване на тези специални съвкупности. За целта ще използваме посочения в [3], [4] репер. Спрямо реперите от първи ред произволна трифокусна съвкупност M_3 се задава със системата

$$\omega_1^5=0,\ \omega_2^3=0,\ \omega_2^1=-\omega_1^4, \tag{1}$$

а спрямо каноничния репер — със системата

$$\begin{aligned}
&-\omega_3^5=x_1\,\omega_1^3+x_2\,\omega_1^4, && \omega_2^1=\omega_1^3,\\
&-\omega_4^5=x_2\,\omega_1^3+x_4\,\omega_1^4 && \omega_4^3=y_4\,\omega_1^4+y_5\,\omega_2^5,\\
&\omega_1^2=\omega_2^5, && -\omega_5^3=y_5\,\omega_1^4+y_6\,\omega_2^5,\\
&-\omega_3^4=z_1\,\omega_1^3+z_3\,\omega_2^5, && \\
&\omega_1^1-\omega_2^2+\omega_2^1-\omega_1^2=\omega_1^4, && \\
&-\omega_5^4=z_3\,\omega_1^3+z_6\,\omega_2^5. &&
\end{aligned} \tag{2}$$

Като диференцираме външно пфафовата система (2), получаваме следната ковариантна система:

$$\begin{aligned}
&\Delta_1\wedge\omega_1^3+\Delta_2\wedge\omega_1^4+\Delta_3\wedge\omega_2^5=0,\\
&\Delta_2\wedge\omega_1^3+\Delta_4\wedge\omega_1^4+\Delta_5\wedge\omega_2^5=0,\\
&\Delta_3\wedge\omega_1^3+\Delta_5\wedge\omega_1^4+\Delta_6\wedge\omega_2^5=0,\\
&\Delta_7\wedge\omega_1^3+\Delta_8\wedge\omega_1^4+\Delta_9\wedge\omega_2^5=0,\\
&\Delta_8\wedge\omega_1^3+\Delta_{10}\wedge\omega_1^4+\Delta_{11}\wedge\omega_2^5=0,\\
&\Delta_9\wedge\omega_1^3+\Delta_{11}\wedge\omega_1^4+\Delta_{12}\wedge\omega_2^5=0,\\
&\Delta_{13}\wedge\omega_1^3+\Delta_{14}\wedge\omega_1^4+\Delta_{15}\wedge\omega_2^5=0,\\
&\Delta_{14}\wedge\omega_1^3+\Delta_{16}\wedge\omega_1^4+\Delta_{17}\wedge\omega_2^5=0,\\
&\Delta_{15}\wedge\omega_1^3+\Delta_{17}\wedge\omega_1^4+\Delta_{18}\wedge\omega_2^5=0.
\end{aligned} \tag{3}$$

Като приложим към (3) лемата на Картан, получаваме:

$$\Delta_1 \equiv -dx_1 + x_1(2\omega_3^3 - \omega_1^1 - \omega_5^5) + 2x_2\omega_3^4 = \alpha_1\omega_1^3 + \alpha_2\omega_1^4 + \alpha_3\omega_2^5,$$

$$\Delta_2 \equiv -dx_2 + x_2(\omega_3^3 + \omega_4^4 - \omega_1^1 - \omega_5^5) + x_2\omega_2^5 + x_4\omega_3^4 + x_1\omega_4^3 = \alpha_2\omega_1^3 + \alpha_4\omega_1^4 + \alpha_5\omega_2^5,$$

$$\Delta_3 \equiv -\omega_3^2 = \alpha_3\omega_1^3 + \alpha_5\omega_1^4 + \alpha_6\omega_2^5,$$

$$\Delta_4 \equiv -dx_4 + x_4(2\omega_4^4 - \omega_1^1 - \omega_5^5 + \omega_1^2) + 2x_2\omega_4^3 = \alpha_4\omega_1^3 + \beta_4\omega_1^4 + \beta_5\omega_2^5,$$

$$\Delta_5 \equiv -\omega_4^2 + x_2\omega_1^3 = \alpha_5\omega_1^3 + \beta_5\omega_1^4 + \beta_6\omega_2^5,$$

$$\Delta_6 \equiv \omega_1^1 - 2\omega_2^2 + \omega_5^5 = \alpha_6\omega_1^3 + \beta_6\omega_1^4 + \gamma_6\omega_2^5,$$

$$\Delta_7 \equiv \omega_2^2 + \omega_3^3 - 2\omega_1^1 = \delta_1\omega_1^3 + \delta_2\omega_1^4 + \delta_3\omega_2^5,$$

$$\Delta_8 \equiv \omega_4^1 = \delta_2\omega_1^3 + \delta_4\omega_1^4 + \delta_5\omega_2^5,$$

$$(4) \qquad \Delta_9 \equiv -\omega_5^1 - y_5\omega_1^4 = \delta_3\omega_1^3 + \delta_5\omega_1^4 + \delta_6\omega_2^5,$$

$$\Delta_{10} \equiv -dy_4 + y_4(2\omega_4^4 - \omega_3^3 - \omega_1^1) + x_4\omega_5^3 + y_4\omega_1^2 - y_5\omega_4^5 + x_2y_5\omega_1^3 = \delta_4\omega_1^3 + \lambda_4\omega_1^4 + \lambda_5\omega_2^5,$$

$$\Delta_{11} \equiv -dy_5 + y_5(\omega_5^5 + \omega_4^4 - \omega_3^3 - \omega_2^2) + x_2y_6\omega_1^3 + y_4z_3\omega_1^3 = \delta_5\omega_1^3 + \lambda_5\omega_1^4 + \lambda_6\omega_2^5,$$

$$\Delta_{12} \equiv -dy_6 + y_6(2\omega_5^5 - \omega_3^3 - \omega_2^2) - y_5\omega_5^4 - y_4z_6\omega_1^4 + y_5z_3\omega_1^3 = \delta_6\omega_1^3 + \lambda_6\omega_1^4 + \mu_6\omega_2^5,$$

$$\Delta_{13} \equiv -dz_1 + z_1(2\omega_3^3 - \omega_1^1 - \omega_4^4) - x_1\omega_5^4 - 2x_2z_3\omega_1^4 = \nu_1\omega_1^3 + \nu_2\omega_1^4 + \nu_3\omega_2^5,$$

$$\Delta_{14} \equiv \omega_3^2 - \omega_3^1 - \omega_1^4 = \nu_2\omega_1^3 + \nu_4\omega_1^4 + \nu_5\omega_2^5,$$

$$\Delta_{15} \equiv -dz_3 + z_3(\omega_3^3 + \omega_5^5 - \omega_2^2 - \omega_4^4) - x_2z_6\omega_1^4 - z_1y_5\omega_1^4 - z_3\omega_2^5 = \nu_3\omega_1^3 + \nu_5\omega_1^4 + \nu_6\omega_2^5,$$

$$\Delta_{16} \equiv \omega_4^1 - \omega_1^1 = \nu_4\omega_1^3 + a_4\omega_1^4 + a_5\omega_2^5,$$

$$\Delta_{17} \equiv \omega_5^2 - \omega_5^1 + z_3\omega_1^3 - 2\omega_1^4 = \nu_5\omega_1^3 + a_5\omega_1^4 + a_6\omega_2^5,$$

$$\Delta_{18} \equiv -dz_6 + z_6(2\omega_5^5 - \omega_4^4 - \omega_2^2) + z_3\omega_5^3 + z_1y_6\omega_1^3 - z_3y_5\omega_1^4 = \nu_6\omega_1^3 + a_6\omega_1^4 + b_6\omega_2^5.$$

А. Необходимите и достатъчни условия [2; (10), (12), (13)], за да лежат конгруенциите $\omega_2^5 = 0$, $\omega_1^3 = 0$, $\omega_1^4 = 0$ в тримерни подпространства на P_4, са съответно

$$(5) \qquad x_1 = x_2 = x_4 = 0,$$

$$(6) \qquad y_4 = y_5 = y_6 = 0,$$

$$(7) \qquad z_1 = z_3 = z_6 = 0.$$

Теорема 1. Трипараметрична трифокусна съвкупност от прави в P_4, за която една от принадлежащите ѝ конгруенции лежи в

тримерно подпространство, съществува и се определя с две произволни функции на три аргумента.

Доказателство. Нека за съвкупността M_3 са изпълнени равенствата (5). Тогава $\Delta_1 = \Delta_2 = \Delta_4 \equiv 0$ и първите две уравнения на (3) добиват вида

$$\Delta_3 \wedge \omega_2^5 = 0, \qquad \Delta_5 \wedge \omega_2^5 = 0. \tag{7*}$$

Ковариантната система (3), в която първите две уравнения са заменени с уравненията (7*), има 15 независими пфафови форми Δ_i, $i = 3, \ldots, 18$, $i \neq 4$. За системата (2) при условието (5) ще строим верига от интегрални елементи по базисните форми ω_2^5, ω_1^3, ω_1^4. Полагаме

$$\Delta_i = l_i^1\, \omega_1^3 + l_i^2\, \omega_1^4 + l_i^3\, \omega_2^5, \quad i = 3, \ldots, 18, \quad i \neq 4. \tag{8}$$

Интегралният елемент $E_1(\omega_2^5, \omega_1^3 = \omega_1^4 = 0)$ се определя с произволно задаване на параметрите l_i^3. Следователно произволът на E_1 е $r_1 = 15$. За да определим произвола на интегралния елемент $E_2(\omega_2^5, \omega_1^3, \omega_1^4 = 0)$, внасяме изразите (8) в съответната ковариантна система, полагайки навсякъде $\omega_1^4 = 0$. За коефициентите l_i^1 получаваме следните 9 независими уравнения:

$$\begin{gathered} l_3^1 = 0,\ l_5^1 = 0,\ l_6^1 = l_3^3,\ l_9^1 = l_7^3,\ l_{11}^1 = l_8^3,\ l_{12}^1 = l_9^3, \\ l_{15}^1 = l_{13}^3,\ l_{17}^1 = l_{14}^3,\ l_{18}^1 = l_{15}^3, \end{gathered} \tag{9}$$

които не налагат ограничение на коефициентите l_i^3. Следователно интегралният елемент E_2 зависи от $r_2 = 6$ произволни параметри. За да определим $E_3(\omega_2^5, \omega_1^3, \omega_1^4)$, внасяме изразите (8) в съответната ковариантна система. Получаваме следните 16 уравнения:

$$\begin{gathered} l_3^2 = l_5^1,\ l_7^2 = l_8^1,\ l_8^2 = l_{10}^1,\ l_9^2 = l_{11}^1,\ l_{13}^2 = l_{14}^1, \\ l_{14}^2 = l_{16}^1,\ l_{15}^2 = l_{17}^1,\ l_3^2 = 0,\ l_5^2 = 0,\ l_6^2 = l_5^3, \\ l_9^2 = l_8^3,\ l_{11}^2 = l_{10}^3,\ l_{12}^2 = l_{11}^3,\ l_{15}^2 = l_{14}^3,\ l_{17}^2 = l_{16}^3,\ l_{18}^2 = l_{17}^3. \end{gathered} \tag{10}$$

Равенствата (9) показват, че първото, четвъртото и седмото уравнение на системата (10) следват съответно от осмото, единадесетото и четиринадесетото. От (10) определяме 13 коефициента l_i^2, без да стесняваме произвола на интегралните елементи E_1 и E_2. Следователно E_3 зависи от $r_3 = 2$ произволни параметъра. Тогава характерите на разглежданата пфафова система са $s_1 = r_1 - r_2 = 9$, $s_2 = r_2 - r_3 = 4$, $s_3 = r_3 = 2$, откъдето получаваме числото на Картан $Q = s_1 + 2\, s_2 + 3\, s_3 = 23$. От (4),

като вземем пред вид (5), получаваме, че най-общият интегрален елемент на (3) зависи от $N=23$ параметъра. Тъй като $N=Q=23$, то според критерия на Картан [1] системата (2) при условията (5) е в инволюция и определя съвкупността M_3 с две произволни функции на три аргумента. С това теоремата е доказана.

Теорема 2. Трипараметрична трифокусна съвкупност от прави в P_4, за която две от принадлежащите ѝ конгруенции лежат в тримерни подпространства, съществува и се определя с една произволна функция на три аргумента.

Доказателство. Нека за M_3 са изпълнени едновременно условията (5) и (6). Тогава ковариантната система (3) добива вида

$$\Delta_3 \wedge \omega_2^5=0, \qquad \Delta_7 \wedge \omega_1^3+\Delta_8 \wedge \omega_1^4+\Delta_9 \wedge \omega_2^5=0,$$

$$\Delta_5 \wedge \omega_2^5=0, \qquad \Delta_8 \wedge \omega_1^3=0,$$

$$(11)\quad \Delta_3 \wedge \omega_1^3+\Delta_5 \wedge \omega_1^4+\Delta_6 \wedge \omega_2^5=0, \quad \Delta_9 \wedge \omega_1^3=0,$$

$$\Delta_{13} \wedge \omega_1^3+\Delta_{14} \wedge \omega_1^4+\Delta_{15} \wedge \omega_2^5=0,$$

$$\Delta_{14} \wedge \omega_1^3+\Delta_{16} \wedge \omega_1^4+\Delta_{17} \wedge \omega_2^5=0,$$

$$\Delta_{15} \wedge \omega_1^3+\Delta_{17} \wedge \omega_1^4+\Delta_{18} \wedge \omega_2^5=0.$$

Тя съдържа $q=12$ независими форми Δ_i, $i=3,\ldots,18$, $i \neq 4, 10, 11, 12$ Строим верига от интегрални елементи по формите $\omega_1^3+\omega_2^5$, ω_1^4, $\omega_2^5+\omega_1^4-\omega_1^3$. Полагаме

$$(12)\qquad \Delta_i=l_i^1(\omega_1^3+\omega_2^5)+l_i^2\omega_1^4+l_i^3(\omega_2^5+\omega_1^4-\omega_1^3),$$

$$i=3,\ldots,18,\ i\neq 4,\ 10,\ 11,\ 12.$$

Интегралният елемент $E_1(\omega_1^3+\omega_2^5,\ \omega_1^4=0,\ \omega_2^5+\omega_1^4-\omega_1^3=0)$ зависи от $r_1=12$ произволни параметъра l_i^1. За да определим интегралния елемент $E_2(\omega_1^3+\omega_2^5,\ \omega_1^4,\ \omega_2^5+\omega_1^4-\omega_1^3=0)$, внасяме изразите (12) в (11), полагайки навсякъде $\omega_2^5+\omega_1^4-\omega_1^3=0$. За параметрите l_i^2 получаваме следната система:

$$l_3^2=-l_3^1,\ l_5^2=-l_5^1,\ l_6^2=2l_3^1+2l_5^1-l_6^1,\quad l_7^2=l_7^1+2l_8^1-2l_9^1,$$

$$(13)\quad l_8^2=l_8^1,\quad l_9^2=l_9^1,\quad l_{15}^2=l_{13}^1-l_{15}^1+2l_{14}^1-l_{13}^2,\ l_{17}^2+l_{14}^2=l_{14}^1+2l_{16}^1-l_{17}^1,$$

$$l_{18}^2=2l_{15}^1-l_{13}^1-2l_{14}^1+l_{13}^2+2l_{17}^1-l_{18}^1$$

от 9 независими уравнения. Следователно интегралният елемент E_2 зависи от $r_2=3$ параметъра. За да определим произвола на $E_3(\omega_1^3+\omega_2^5,\ \omega_1^4,\ \omega_2^5+\omega_1^4-\omega_1^3)$, внасяме изразите (12) в (11). Получаваме уравненията

$$
(14)\quad
\begin{array}{lll}
l^2_3+l^3_3=0, & l^3_3=l^1_3, & l^3_5-l^1_5+l^2_3+l^3_3=0,\\
l^2_5+l^3_5=0, & l^3_5=l^1_5, & l^3_8+l^3_7-l^1_8+l^2_7=0,\\
l^1_5+l^3_5-l^3_6-l^2_6=0, & l^3_6=l^1_6-l^1_3-l^3_3, & l^3_8+l^2_8=0,\\
l^3_9+l^2_9-l^3_8-l^1_8=0, & l^3_9=l^1_9-l^1_7-l^3_7, & l^2_9+l^3_9=0,\\
l^3_{11}=-l^1_{14}+l^2_{15}+l^3_{15}, & l^3_8=-l^1_8, & l^2_{13}+l^3_{13}-l^1_{14}+l^3_{14}=0,\\
l^3_{16}=l^3_{17}+l^2_{17}-l^1_{16}, & l^1_9+l^3_9=0, & l^2_{14}+l^3_{14}-l^1_{16}+l^3_{16}=0,\\
l^3_{18}+l^2_{18}-l^3_{17}-l^1_{17}=0; & l^3_{13}=-l^1_{13}+l^1_{15}-l^3_{15}, & l^2_{15}+l^3_{15}-l^1_{17}+l^3_{17}=0.\\
 & l^3_{17}=l^1_{17}-l^1_{14}-l^3_{14}, & \\
 & l^3_{18}=-l^1_{15}-l^3_{15}+l^1_{18}, &
\end{array}
$$

Лесно се съобразява, че първото, второто, третото, четвъртото и седмото уравнение от първата колона и всички уравнения от третата колона следват от останалите единадесет независими уравнения. Оттук получаваме, че E_3 зависи от $r_3=1$ параметър. Следователно характерите на системата (2) при условията (5) и (6) са $s_1=9$, $s_2=2$, $s_3=1$. Тъй като най-общият интегрален елемент на (11) зависи от $N=Q=16$ параметъра, то системата е в инволюция и определя разглежданата трипараметрична съвкупност с една произволна функция на три аргумента. С това теоремата е доказана.

Теорема 3. Трипараметрична съвкупност от прави в P_4, трите конгруенции на която лежат в тримерни подпространства, съществува и е определена с 9 произволни функции на един аргумент.

Доказателство. Сега за M_3 са изпълнени едновременно равенствата (5), (6) и (7). Системата (3) добива вида

$$
(15)\quad
\begin{array}{ll}
\Delta_3\wedge\omega^5_2=0, & \Delta_7\wedge\omega^3_1+\Delta_8\wedge\omega^4_1+\Delta_9\wedge\omega^5_2=0,\\
\Delta_5\wedge\omega^5_2=0 & \Delta_8\wedge\omega^3_1=0,\\
\Delta_3\wedge\omega^3_1+\Delta_5\wedge\omega^4_1+\Delta_6\wedge\omega^5_2=0, & \Delta_9\wedge\omega^3_1=0,\\
\Delta_{14}\wedge\omega^4_1=0, & \\
\Delta_{14}\wedge\omega^3_1+\Delta_{16}\wedge\omega^4_1+\Delta_{17}\wedge\omega^5_2=0, & \\
\Delta_{17}\wedge\omega^4_1=0. &
\end{array}
$$

В нея има $q=9$ независими форми. Най-общият ѝ интегрален елемент е

$$
\begin{array}{lll}
\Delta_3=\alpha_6\,\omega^5_2, & \Delta_5=\beta_6\,\omega^5_2, & \Delta_6=\alpha_6\,\omega^3_1+\beta_6\,\omega^4_1+\gamma_6\,\omega^5_2,\\
\Delta_7=\delta_1\,\omega^3_1+\delta_2\,\omega^4_1+\delta_3\,\omega^5_2, & \Delta_8=\delta_2\,\omega^3_1, & \Delta_9=\delta_3\,\omega^3_1,\\
\Delta_{14}=\nu_4\,\omega^4_1, & \Delta_{16}=\nu_4\,\omega^3_1+a_4\,\omega^4_1+a_5\,\omega^5_2, & \Delta_{17}=a_5\,\omega^4_1.
\end{array}
$$

Очевидно той зависи от $N=9$ параметъра. Тъй като $q=9$, $s_1=9$, $s_1+s_2+s_3=q$, то следва, че $s_2=s_3=0$ и $Q=N=9$. Следователно системата е в инволюция и съвкупността M_3 зависи от 9 произволни функции на един аргумент.

Б. Необходимите и достатъчни условия [2; (14), (15), (16)], за да бъдат развиваемите повърхнини

$$S_1 : \omega_1^3 = \omega_1^4 = 0, \qquad S_2 : \omega_1^4 = \omega_2^5 = 0, \qquad S_3 : \omega_1^3 = \omega_2^5 = 0$$

равнинни, са съответно

$$y_6 = z_6 = 0, \tag{16}$$

$$x_1 = z_1 = 0, \tag{17}$$

$$x_4 = y_4 = 0. \tag{18}$$

Теорема 4. Трипараметрична съвкупност от прави в P_4, за която една от трите ѝ развиваеми повърхнини е равнинна, съществува и се определя с една произволна функция на три аргумента.

Доказателство. Нека за M_3 са изпълнени условията (16). Системата (3) сега съдържа $q = 16$ независими пфафови форми. Строим верига от интегрални елементи по базисните форми ω_1^3, ω_1^4, ω_2^5. Получаваме $s_1 = 9$, $s_2 = 6$, $s_3 = 1$, $N = Q = 24$. Следователно системата (2) при условието (16) е в инволюция и определя M_3 с една произволна функция на три аргумента.

В. 1. Условията [2; (26), (27)]

$$z_6 = y_6 = \delta_6^* = 0, \tag{19}$$

$$z_6 = y_6 = a_6 = 0 \tag{20}$$

са необходими и достатъчни, за да бъдат първите фокални линии съответно върху (F_2) и (F_3) прави, т. е. (F_2) и (F_3) да бъдат съответно двупараметричните линейни съвкупности $[A_2 A_5]$ и $[A_1 + A_2 A_5]$. Поради $z_6 = y_6 = 0$ имаме

$$\lambda_6 = \mu_6 = b_6 = \nu_6 = 0, \quad \delta_6 = -a_6 = 2 y_5 z_3, \tag{21}$$

откъдето следва, че условията (19) и (22) са еквивалентни, т. е. ако първата фокална линия върху (F_2) е права, то и върху (F_3) първата фокална линия е права и обратно. Следователно случаите 14. и 15. в [2] са еквивалентни. Повърхнината (A_5) е двумерна и $(A_5) = (F_2) \cap (F_3)$. Логически възможният подслучай [2; 14. и 15.], щото двупараметричните съвкупности $[A_2 A_5]$ и $[A_1 + A_2 A_5]$ да нямат развиваеми повърхнини, не съществува.

2. Необходимите и достатъчни условия, за да бъдат вторите фокални линии върху фокалните хиперповърхнини (F_1), (F_3) прави, са съответно [2; (19), (24)]

$$x_1 = z_1 = \alpha_3 = 0, \tag{22}$$

$$x_1 = z_1 = \nu_2 = 0. \tag{23}$$

Сега поради $x_1 = z_1 = 0$ от (4) получаваме

(24) $$\alpha_1=\alpha_2=\gamma_1=\gamma_3=0,\ \alpha_3=\gamma_2=-2x_2z_3.$$

Оттук следва, че условията (22) и (23) са еквивалентни, т. е. ако втората фокална линия върху (F_1) е права, то и върху (F_3) втората фокална линия е права и обратно. Следователно случаите 11., 12. и 13. в [2] са еквивалентни. Фокалните хиперповърхнини (F_1), (F_3), които сега са съответно двупараметричните линейни съвкупности $[A_1\,A_3]$, $[A_1+A_2\,A_3]$, съдържат повърхнината (A_3), която е двумерна, т. е. $(A_3)=(F_1)\cap(F_3)$. Тъй като $\alpha_3=\gamma_2=-2x_2z_3=0$, то следва, че логически възможният [2; 11., 12., 13.] подслучай, щото двупараметричните съвкупности $[A_1\,A_3]$, $[A_1+A_2\,A_3]$ да нямат развиваеми повърхнини, не съществува.

3. Условията [2; (28), (29)]

(25) $$x_4=y_4=\beta_5=0,$$

(26) $$x_4=y_4=\delta_4=0$$

са необходими и достатъчни, за да бъдат съответно третите фокални линии върху (F_1), (F_2) прави, т. е. (F_1), (F_2) да бъдат двупараметричните линейни съвкупности $[A_1\,A_4]$, $[A_2\,A_4]$. Сега имаме

(27) $$\alpha_4=\beta_4=\lambda_4=\lambda_5=0,\ \beta_5=\delta_4=2x_2y_5,$$

откъдето следва, че равенствата (25) и (26) са еквивалентни, т. е. третите фокални линии върху (F_1) и (F_2) са едновременно прави. Получаваме, че случаите 16. и 17. в [2] са еквивалентни, $(A_4)=(F_1)\cap(F_2)$ и логически възможният подслучай, $[A_1\,A_4]$ и $[A_2\,A_4]$ да нямат развиваеми повърхнини, не съществува.

Теорема 5. Трипараметрична съвкупност от прави в P_4, на която първите или вторите, или третите фокални линии, които не се допират до правата $p=A_1A_2$, са прави, съществува и се определя с една произволна функция на три аргумента.

Доказателство. Нека за M_3 са изпълнени равенствата (22). Тъй като $\alpha_3=-2x_2z_3=0$, то имаме следните възможности: a) $x_2=0$, $z_3\neq 0$, b) $z_3=0$, $x_2\neq 0$ и c) $x_2=z_3=0$. При случай a) чрез построяване на верига от интегрални елементи на съответната ковариантна система по формите ω_2^5, ω_1^4, ω_1^3 намираме

(28′) $$s_1=9,\ s_2=5,\ s_3=1,\ Q=N=22.$$

При случай в), строейки верига от интегрални елементи по формите ω_1^4, ω_2^5, ω_1^3, получаваме пак (28′). При случай c), строейки верига от интегрални елементи по формите ω_1^3, $\omega_1^4+\omega_2^5$, $\omega_1^3+\omega_1^4-\omega_2^5$, получаваме

(28″) $$s_1=9,\ s_2=4,\ s_3=1,\ N=Q=20.$$

Ако за M_3 предположим, че вместо равенствата (22) са изпълнени равенствата (19) или (25), то пак получаваме (28). С това теоремата е доказана.

4. Ако за M_3 са изпълнени едновременно (19) и (22) [2; 18.], то първата и втората развиваема повърхнина са равнинни, първите фокални

линии върху (F_2) и (F_3) и вторите върху (F_1) и (F_3) са прави, $(A_3)=(F_3)\cap(F_1)$, $(A_5)=(F_3)\cap(F_2)$.

Ако са изпълнени едновременно (22) и (25), то втората и третата развиваема повърхнина са равнинни, вторите фокални линии върху (F_1) и (F_3) и третите върху (F_1) и (F_2) са прави, $(A_3)=(F_1)\cap(F_3)$, $(A_4)=(F_1)\cap(F_2)$.

И накрая, ако са изпълнени (19) и (25), то първата и третата развиваема повърхнина са равнинни, първите фокални линии върху (F_2) и (F_3) и третите върху (F_1) и (F_2) са прави, $(A_4)=(F_1)\cap(F_2)$, $(A_5)=(F_2)\cap(F_3)$.

Теорема **6**. Трипараметрична трифокусна съвкупност от прави в P_4, за която двете недопиращи се до правата $p=A_1A_2$ фокални линии върху една от фокалните хиперповърхнини са прави, съществува и се определя с 4 произволни функции на два аргумента.

Доказателство. Нека M_3 е такава, че втората и третата фокална линия върху (F_1) са прави, т. е. изпълнени са условията (22) и (25). Тъй като $\alpha_3=-2x_2z_3=0$, $\beta_5=2x_2y_5=0$, то възможни са следните случаи: a) $x_2=0$, $y_5\neq 0$, $z_3\neq 0$, b) $y_5=z_3=0$, $x_2\neq 0$, c) $x_2=z_3=0$, $y_5\neq 0$, d) $x_2=y_5=0$, $z_3\neq 0$ и e) $x_2=z_3=y_5=0$. Разглеждаме общия случай a). Ковариантната система (3) сега добива вида

$$
\begin{aligned}
&\Delta_3\wedge\omega_2^5=0, && \Delta_7\wedge\omega_1^3+\Delta_8\wedge\omega_1^4+\Delta_9\wedge\omega_2^5=0,\\
&\Delta_5\wedge\omega_2^5=0, && \Delta_8\wedge\omega_1^3+\Delta_{11}\wedge\omega_2^5=0,\\
(29)\quad &\Delta_3\wedge\omega_1^3+\Delta_5\wedge\omega_1^4+\Delta_6\wedge\omega_2^5=0, && \Delta_9\wedge\omega_1^3+\Delta_{11}\wedge\omega_1^4+\Delta_{12}\wedge\omega_2^5=0,\\
&\Delta_{14}\wedge\omega_1^4+\Delta_{15}\wedge\omega_2^5=0,\\
&\Delta_{14}\wedge\omega_1^3+\Delta_{16}\wedge\omega_1^4+\Delta_{17}\wedge\omega_2^5=0,\\
&\Delta_{15}\wedge\omega_1^3+\Delta_{17}\wedge\omega_1^4+\Delta_{18}\wedge\omega_2^5=0.
\end{aligned}
$$

Очевидно, че $q=13$, $N=17$. За да определим характерите на пфафовата система (2) при условията (22) и (25), строим верига от интегрални елементи по формите ω_2^5, ω_1^4, $\omega_2^5+\omega_1^4-\omega_1^3$. Полагаме

$$
(30)\qquad \Delta_i=l_i^1\,\omega_2^5+l_i^2\,\omega_1^4+l_i^3(\omega_2^5+\omega_1^4-\omega_1^3).
$$

Очевидно $E_1(\omega_2^5,\ \omega_1^4=0,\ \omega_2^5+\omega_1^4-\omega_1^3=0)$ зависи от $r_1=13$ параметъра. За интегралния елемент $E_2(\omega_2^5,\ \omega_1^4,\ \omega_2^5+\omega_1^4-\omega_1^3=0)$ получаваме системата

$$
(31)\qquad
\begin{aligned}
&l_3^2=0,\ l_5^2=0,\ l_6^2=l_3^1+l_5^1,\ l_9^2=l_7^1+l_8^1-l_7^2,\ l_{11}^2=l_8^1-l_8^2,\\
&l_{12}^2=l_9^1+l_{11}^1-l_7^1-l_8^1+l_7^2,\ l_{15}^2=l_{14}^1,\ l_{17}^2=l_{14}^1+l_{16}^1-l_{14}^2,\ l_{18}^2=l_{15}^1+l_{17}^1-l_{14}^1
\end{aligned}
$$

т. е. $r_2=4$. За интегралния елемент $E_3(\omega_2^5,\ \omega_1^4,\ \omega_2^5+\omega_1^4-\omega_1^3)$ получаваме системата

$$
(32)\quad
\begin{array}{lll}
l^3_3=0, & l^2_3+l^3_3+l^3_5=0, & l^2_3+l^3_3=0,\\
l^3_5=0, & l^2_7+l^3_7+l^3_8=0, & l^2_5+l^3_5=0,\\
l^1_3+l^3_3+l^3_6=0, & l^2_8+l^3_8=0, & l^1_5+l^3_5-l^2_6-l^3_6=0,\\
l^1_7+l^3_7+l^3_9=0, & l^2_9+l^3_9+l^3_{11}=0, & l^1_8+l^3_8-l^2_9-l^3_9=0,\\
l^1_8+l^3_8+l^3_{11}=0, & l^3_{14}=0, & l^2_{11}+l^3_{11}=0,\\
l^1_9+l^3_9+l^3_{12}=0, & l^2_{14}+l^3_{14}+l^3_{16}=0, & l^1_{11}+l^3_{11}-l^2_{12}-l^3_{12}=0,\\
l^3_{15}=0, & l^2_{15}+l^3_{15}+l^3_{17}=0, & l^1_{14}+l^3_{14}-l^2_{15}-l^3_{15}=0,\\
l^1_{14}+l^3_{14}-l^3_{17}=0, & & l^1_{16}+l^3_{16}-l^2_{17}-l^3_{17}=0,\\
l^1_{15}+l^3_{15}+l^3_{18}=0, & & l^1_{17}+l^3_{17}-l^2_{18}-l^3_{18}=0.
\end{array}
$$

Лесно се проверява, че осмото уравнение от първата колона, първото и четвъртото от втората колона и всички от третата следват от останалите 13 независими уравнения. Следователно $r_3=0$. Окончателно имаме

$$s_1=9,\ s_2=4,\ s_3=0,\ Q=N=17.$$

С това теоремата е доказана.

5. Ако за съвкупността M_3 са изпълнени условията (19), (22) и (25), то тя се разслоява на три двупараметрични семейства равнинни развиваеми повърхнини, фокалните линии, които не се допират до правата $p=A_1A_2$, върху трите фокални хиперповърхнини са прави, точките A_3, A_4 и A_5 описват двумерни повърхнини, като

$$(A_3)=(F_1)\cap(F_3),\quad (A_4)=(F_1)\cap(F_2),\quad (A_5)=(F_2)\cap(F_3).$$

Случаите 19. и 20. в [2] са еквивалентни. Тъй като

$$\alpha_3=-2x_2z_3=0,\quad \delta_6=2y_5z_3=0,\quad \beta_5=2x_2y_5=0,$$

то са възможни следните подслучаи:

a) $x_2=z_3=0,\ y_5\neq 0$, b) $x_2=y_5=0,\ z_3\neq 0$, c) $z_3=y_5=0,\ x_2\neq 0$ и d) $x_2=y_5=z_3=0$.

Очевидно подслучаят d) съвпада със случая, разгледан в теорема 3.

ЛИТЕРАТУРА

1. Фиников, С. П.: Метод внешних форм Картана. Москва — Ленинград, 1948.
2. Иванова-Каратопраклиева, И.: Специални трипараметрични съвкупности от прави в P_4. Год. на Соф. унив., Мат. фак., **60** (1965/66), 171—181.
3. Иванова-Каратопраклиева, И.: Диференциална геометрия на двупараметричните подмногообразия на многообразието M_3 от прави в P_4 (I). Год. на Соф. унив., Мат. фак., **62** (1967/68), 123—156.
4. Иванова-Каратопраклиева, И.: Инварианти от втори ред на трипараметричните съвкупности от прави в P_4. Изв. на Мат. инст. на БАН, **11** (1970), 295—304.

Постъпила на 11. XI. 1969 г.

LES THÉORÈMES D'EXISTENCE DES VARIÉTÉS DE DROITES SPÉCIALES À TROIS DIMENSIONS DANS P_4

I. Ivanova-Karatoprakliéva

(RÉSUMÉ)

Dans le travail [2] nous avons considéré quelques variétés M_3 spéciales à trois dimensions (avec trois foyers) dans l'espace projectif de dimension 4. Dans le travail présent qui forme la suite du travail [2] nous démontrons les théorèmes suivantes:

Théorème 1. La variété M_3 dont une congruence est située dans un espace de dimension trois, existe et dépend de deux fonctions arbitraires de trois variables.

Théorème 2. La variété M_3 dont deux congruences sont situées dans espaces de dimensions trois, existe et dépend d'une fonction arbitraire de trois variables.

Théorème 3. La variété M_3 dont les trois congruences sont situées dans espaces de dimensions trois, existe et dépend de neuf fonctions arbitraires d'une variable.

Théorème 4. La variété M_3 dont une surface développable est plane, existe et dépend d'une fonction arbitraire de trois variables.

Théorème 5. La variété M_3 dont les premières, ou les deuxièmes, ou les troisièmes courbes focales qui n'ont pas la droite p pour tangente (p trace M_3) sont des droites, existe et dépend d'une fonction arbitraire de trois variables.

Théorème 6. La variété M_3 dont les deux courbes focales qui n'ont pas la droite p pour tangente sur une hypersurface focale sont des droites, existe et dépend de quatres fonctions de deux variables.