ВЗАИМОСВЯЗЬ АКСИАЛЬНОГО И ИЗОТРОПНОГО ОТОБРАЖЕНИЙ НОРМПОВЕРХНОСТИ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА ПРОСТРАНСТВА P^4

Гергана Енева

В работе [1] изложен один способ отображения нормповерхности третьего порядка F_3^2 четырехмерного проективного пространства на касательную к ней плоскость π^2 путем изотропного проектирования точек поверхности: каждая точка поверхности изображается следом в плоскости проекций касательной плоскости к F_3^2 в отображаемой точке. При аксиальном отображении поверхности F_3^2 плоскостью проекций является та же самая касательная плоскость π^2, а осью, из которой происходит проектирование, служит произвольная бисеканта F_3^2. В зависимости от расположения этой бисеканты ниже рассматриваются разные типы аксиального отображения и его связь с изотропным отображением.

Поверхность F_3^2 определена как совкупность прямых, соединяющих пары соответственных точек в проективном соответствии между точками одной коники c^2 и одной прямой u, не принадлежащие одной гиперплоскости. Произвольная прямая пространства P^4 может иметь с F_3^2 0, 1, 2 общие точки или лежать на поверхности. Касательная плоскость π^2 проведена в точке O поверхности, а образующая F_3^2 в этой точке пересекает прямую u в точке S и SO лежит в π^2. Образующие поверхности проектируются изотропно в прямые через S, а коники на F_3^2 — в прямые, не проходящие через эту точку [1].

Фиксируем на поверхности F_3^2 бисеканту l. Если C произвольная точка на F_3^2, аксиальной проекцией C из бисеканты l назовем след C_0 плоскости (C, l) в π^2. Если в π^2 дана точка D_0, ей соответствует, вообще говоря, единственная точка D на F_3^2, имеющая аксиальную проекцию D_0. Действительно, плоскость (D_0, l) пересекает F_3^2 кроме в двух общих точках F_3^2 и l еще в одной точке D и эта точка имеет аксиальную проекцию D_0.

На плоскости π^2 устанавливается соответствие между изотропными и аксиальными проекциями точек поверхности F_3^2, которое является взаимно однозначным, за исключением некоторых точек. Мы покажем, что это соответствие есть квадратично кремоново преобразование Φ_2 поля изотропных проекций π_1 в поле аксиальных проекций π_0. (Изотропные проекции точек F_3^2 будем обозначать индексом 1.) Действительно, если точка P_1 движется по прямой p_1 в π_1, это означает, что точка P на F_3^2, которой она является изотропной проекцией, описы-

вает конику p^2 на F_3^2. Но плоская проекция коники из прямой есть коника p_0^2 в π^2. Итак, прямой p_1 в π_1 соответствует коника p_0^2 в π_0, т. е. рассматриваемое преобразование есть квадратично кремоново [2]. Теперь мы будем искать фундаментальные точки этого преобразования.

I. Пусть l пересекает F_3^2 в двух разных точках A и B, не лежащие на одной образующей и на прямой u и имеющие изотропные проекции соответственно A_1 и B_1. Известно, что если точка C имеет изотропную проекцию C_1, ее аксиальная проекция C_0 — след плоскости (CAB) — будет точка, полярно сопряженная точке O относительно всех коник пучка с базисными точками S, A_1, B_1, C_1 [1].

Все прямые поля π_1, не проходящие через точку S, соответствуют коникам на F_3^2. Возьмем произвольную такую прямую p_1 и рассмотрим соответствующую ей конику p^2 на F_3^2. p^2 будет пересекать в некоторой точке образующую a поверхности F_3^2 в точке A. Чтобы найти аксиальную проекцию этой точки, необходимо провести плоскость через a и через B и найти след $\bar{A}_0$ этой плоскости.

Остановимся на нахождение точки $\bar{A}_0$. Покажем, что точки O, B_1, $\bar{A}_0$ коллинеарны. Действительно, через точки O и B проходит единственная коника l^2, лежащая на F_3^2. Касательная t к ней в точке O лежит в π^2 и она пересекает касательную в B в точке B_1. Пусть l^2 пересекает a в точке X. Прямая BX лежит в плоскости коники l^2 и пресекает прямую $t \equiv OB_1$. Эта точка $\bar{A}_0$ и есть общая точка плоскостей π^2 и (a, B). Точка $\bar{A}_0$ лежит еще на следу гиперплоскости (a, b), где b есть образующая F_3^2 в точке B, т. е. на прямой m, удовлетворяющей условию $(SO, m, SA_1, SB_1) = -1$ [1]. Итак, точка A_0 лежит на OB_1 и $(O\bar{A}_0 B_1 1) = -1$, где точка $SA_1 . OB_1$ обозначена через 1.

Аксиальная проекция p_0^2 коники p^2 пройдет через A_0. Такими рассуждениями, применимыми к точке пересечения коники p^2 и образующей b в точке B находим, что коника p_0^2 пройдет через след $\bar{B}_0$ плоскости (b, A). $\bar{B}_0$ лежит на OA_1 и $(OB_0\ A_1\ 2) = -1$, где 2 точка $SB_1 . OA_1$.

Коника p^2 на F_3^2 пересекает в одной точке единственную конику k^2 на F_3^2 через точки A и B. Чтобы найти аксиальную проекцию этой точки, необходимо построить след плоскости коники k^2, т. е. точку T_0 прямой SO, для которой $(OT_0 ST_1) = -1$, где T_1 точка $A_1B_1 . SO$.

Мы получили, что коника p_0^2 — аксиальная проекция коники p^2 на F_3^2 пройдет через точки A_0, B_0, T_0, независящие от p^2. p_0^2 является образом в квадратичном кремоновом соответствии прямой p_1 поля π_1. Прямую p_1 в π_1 мы выбрали произвольно. Следовательно, все коники поля π_0, являющиеся образами прямых поля π_1, пройдут через точки $\bar{A}_0$, $\bar{B}_0$, T_0. Это и будут фундаментальные точки преобразования Φ_2^{-1} в поле π_0. Найдем прямые, которые им соответствуют в поле π_1.

1. Точка T_0. Проведем плоскость (ABT_0). Она пересекает F_3^2 по конике через A и B. Изотропная проекция этой коники есть прямая A_1B_1.

Итак, точке T_0 соответствует прямая A_1B_1.

2. Точка A_0. Проведем плоскость (A_0AB). Она пересекает F_3^2 кроме в точках A, B и по образующей a в A, так как (A_0AB) есть плоскость (a, B). Но образующая a изотропно проектируется в прямую SA_1.

Итак, точке A_0 соответствует прямая SA_1.

3. Аналогично получаем, что точке B_0 соответствует прямая SB_1.

Тогда прямые SA_1, SB_1, A_1B_1 являются фундаментальными прямыми поля π_1. Следовательно, фундаментальные точки поля π_1 будут A_1, B_1, S. Им должны соответствовать в поле π_0 следующие прямые: A_0T_0, B_0T_0, A_0B_0, что легко проверить и непосредственно.

Итак, для рассматриваемого кремонова преобразования имеем

π_1		π_0	
фунд. точки	фунд. прямые	фунд. прямые	фунд. точки
B_1	SA_1	B_0T_0	A_0
A_1	SB_1	A_0T_0	B_0
S	A_1B_1	A_0B_0	T_0

Отметим, что прямая A_0B_0 проходит через точку S; это видно из гармонических четверок $(OA_0B_1\,1) = -1$, $(OB_0A_1\,2) = -1$, где точки 1 и 2 лежат соответственно на прямых SA_1 и SB_1.

Треугольники A_1B_1S и $B_0A_0T_0$ перспективны, так как прямые A_1B_0, B_1A_0 и ST_0 проходят через точку O. Прямые A_1B_0 и B_1A_0 являются двойными прямыми квадратичного преобразования. Действительно, прямая A_1B_0 проходит через фундаментальную точку A_1 поля π_1 и поэтому она преобразуется в конику, распавшуюся на прямую A_0T_0 и на прямую s_0, проходящую через B_0. На прямой A_1B_0 имеется двойная точка O. Следовательно, прямая s_0 пройдет и через точку O, т. е. она совпадает с прямой $A_1B_0 \equiv OB_0$. Аналогичным образом получаем, что и прямая B_1A_0 двойная прямая квадратичного преобразования Φ_2. Тогда пары соответственных точек полей π_1 и π_0 в рассматриваемом квадратичном преобразовании, лежащие на прямой A_1B_0 (соответственно на B_1A_0), индуцируют на этой прямой проективное соответствие. Точка O двойная точка этой проективности. Точке A_1 соответствует точка $3 = A_1B_0 . T_0A_0$, так как точке A_1 в квадратичном преобразовании Φ_2 соответствует прямая A_0T_0. Аналогично точке $2 = SB_1 . A_1B_0$ соответствует точка B_0. Это проективное соответствие дает возможность строить соответственные точки в квадратичном преобразовании для точек, лежащих на A_1B_0 (аналогично на B_1A_0).

II. Пусть точки A и B, в которых бисеканта l пересекает F_3^2, совпадают. Тогда l будет касательная к F_3^2 в точке $A \equiv B$. Предполагаем, что A не лежит на прямой u. Прямая l изотропно проектируется в распавшуюся на три прямые кривую третьего порядка (SA_1, SA_1, l_1). Аксиальная проекция C_0 точки C, имеющей изотропную проекцию C_1, есть точка полярно сопряженная точке O относительно всех коник, проходящих через S, A_1, C_1 и касающихся прямой l_1 в точке A_1.

Найдем в этом случае фундаментальные точки квадратичного кремонова преобразования Φ_2. Обозначим через k^2 единственную конику, лежащую на F_3^2 и касающуюся l в точке A. Пусть T_0 след плоскости этой коники $((T_0 OS T_1) = -1$, где $T_1 = l_1 . SO)$.

Рассмотрим прямую SA_1 поля π_1. Когда точка X_1 движется по прямой SA_1 точка X на F_3^2 описывает образующую a в точке A. Любая точка образующей a и прямая l определяют касательную плоскость к F_3^2 в точке A, так как она проходит через l и a. След этой касательной плоскости есть точка $A_1 \equiv A_0$ поля π_0.

Когда точка X_1 поля π_1 движется по прямой l_1, точка X на F_3^2 движется по конике k^2. Следовательно, прямой l_1 поля π_1 соответствует точка T_0 — след плоскости k^2. Точке A_1 пересечения прямых SA_1 и l_1 должна соответствовать прямая $A_0 T_0 \equiv A_1 T_0$ поля π_0.

Найдем соответствующий элемент точке S поля π_1 в поле π_0.

Рассмотрим гиперплоскость $(\beta^3 = u, l)$, так как все точки прямой u изотропно проектируются в точку S. В β^3 лежит плоскость (S, l), след которой есть точка S, а также и плоскость (a, l) — касательная плоскость к F_3^2 в A, след которой есть точка $A_1 \equiv A_0$. Следовательно, точке S поля π_1 соответствует прямая — $SA_0 \equiv SA_1$ поля π_0.

Приводим таблицу фундаментальных элементов преобразования Φ_2:

π_1		π_0	
фунд. точки	фунд. прямые	фунд. прямые	фунд. точки
$A_1 \equiv B_1$		$T_0 \bar{A}_0 \equiv T_0 A_1$	
	l_1		T_0
	SA_1		$\bar{A}_0 \equiv A_1$
S		$S\bar{A}_0 \equiv SA_1$	

III. Пусть точки A и B на F_3^2 разные, но точка A лежит на прямой u. Тогда $S \equiv A_1$ и A_1 определяется однозначно изотропной проекцией a_1 образующей поверхности F_3^2, на которой она лежит. Чтобы найти аксиальную проекцию из бисеканты $l \equiv AB$ произвольной точки C на F_3^2, если известна ее изотропная проекция C_1, строим следующим образом след C_0 плоскости (CAB). Плоскость (CAB) лежит в гиперплоскости (u, BC) и C_0 будет лежать на следу этой гиперплоскости,

т. е. на поляре точке O относительно распавшейся коники (SB_1, SC_1). Плоскость (CAB) лежит и в гиперплоскости, проходящей через плоскость единственной коники на F_3^2 через B и C и через образующую a, т. е. C_0 будет лежать и на поляре точки O относительно распавшейся коники (a_1, B_1C_1).

Чтобы найти образ точки A_1 в Φ_2, необходимо построить след фигуры, соединяющей точку A с точками A и B. Это есть гиперплоскость через касательную плоскость в точке A и через точку B. След касательной плоскости в точке A есть точка S, а след плоскости (a, B), которая тоже лежит в этой гиперплоскости, есть точка $\bar{A}_0$ ($\bar{A}_0$ лежит на OB_1 и $(OA_0\, 1\, B_1) = -1$, $1 = a_1 . OB_1$). Получаем, что точке A_1 поля π_1 соответствует в Φ_2 прямая $S\bar{A}_0$ поля π_0.

Соединительная фигура точки B и прямой AB есть гиперплоскость, содержащая касательную плоскость к F_3^2 в точке B и точку A. След этой гиперплоскости есть прямая SB_1 так как S есть след плоскости (A, b), где b образующая F_3^2 в точке B, а B_1 есть след касательной плоскости в B. Таким образом точке B_1 поля π_1 соответствует прямая SB_1 поля π_0.

Тогда прямой $A_1B_1 \equiv SB_1$ поля π_1 соответствует в Φ_2 точка пересечения прямых $S\bar{A}_0$ и SB_1, т. е. точка S поля π_0, что видно и непосредственно.

Когда точка X_1 поля π_1 движется по прямой a_1, точка X на F_3^2 описывает образующую a. След плоскости $(XAB) \equiv (a, B)$ есть точка $\bar{A}_0$. Прямой a_1 поля π_1 соответствует точка $\bar{A}_0$ поля π_0.

Мы получили и в этом случае фундаментальные элементы преобразования:

фунд. точки	фунд. прямые	фунд. прямые	фунд. точки
$S \equiv A_1$		$S\bar{A}_0$	
B_1		SB_1	
	$A_1B_1 \equiv SB_1$		S
	a_1		$\bar{A}_0$

IV. Наконец возьмем в качестве бисеканты AB касательную l к F_3^2 в точке A, лежащей на прямой u. Такая касательная однозначно определяется изотропной проекцией M_1 некоторой точки M поверхности F_3^2 и следом M_0 плоскости (M, l), при условии, что точка M не лежит на образующей a в A. Для изотропной проекции a_1 образующей a выполнено $(SM_0, SO, SM_1, a_1) = -1$. Теперь если дана изотропная проекция C_1 точки C поверхности F_3^2, мы можем найти ее аксиальную проекцию C_0 из касательной l. Пользуясь указанным результатом и заменяя точки M_0, M_1 точками C_0, C_1, получаем $(t = SC_0, SO, a_1, SC_1) = -1$.

Плоскость (C, l) лежит в гиперплоскости (l, CM). След g_0 этой гиперплоскости проходит через M_0 — след (M, l) и еще через след плоскости (AMC) — точка C^*, которую мы можем найти как в случае III аксиального проектирования. Тогда $C_0 = t.g$.

Теперь будем искать фундаментальные точки кремонова преобразования. Когда точка X_1 поля π_1 движется по прямой a_1, точка X на F_3^2 движется по образующей a. Плоскость (X, l) всегда есть касательная плоскость к F_3^2 в точке A и ее след есть точка S. Итак, прямой a_1 поля π_1 соответствует в Φ_2 точка S поля π_0.

Найдем аксиальную проекцию точки $S \equiv A_1$ поля π_1. Плоскости, соединяющие эту точку с касательной l, образуют пучок в соприкасающейся гиперплоскости вдоль образующей a в точке A. Следы этих плоскостей лежат на прямой a_1. Точке A_1 поля π_1 соответствует прямая a_1 поля π_0.

Следовательно, в этом случае имеем:

фунд. точки	фунд. прямые	фунд. прямые	фунд. точки
$S \equiv A_1 \equiv B_1$		a_1	
	a_1		S

Рассмотренная нами связь между изотропными и аксиальными проекциями точек поверхности F_3^2 дает возможность получить решения всех задач аксиального отображения этой поверхности, поскольку задачи изотропного отображения F_3^2 решены.

ЛИТЕРАТУРА

1. Енева, Г., Скопец, З.: Построение плоской модели четырехмерного проективного пространства изотропным проектированием нормповерхности третьего порядка. Год. на Соф. унив., Мат. фак., **62** (1967/68), 243—258.
2. Hudson, H.: Cremona transformation. Cambridge, 1927.

Постъпила на 11. XI. 1969 г.

ZUSAMMENHANG ZWISCHEN DER AXIALEN UND DER ISOTROPEN PROJEKTION DER NORMFLÄCHE DRITTER ORDNUNG DES RAUMES P^4

G. Enewa

(ZUSAMMENFASSUNG)

Bei der axialen Projektion der Normfläche dritter Ordnung F_3^2 in einem vierdimensionalen projektiven Raum P^4, wird als Projektionsebene

eine Tangentialebene der Fläche und als Achse (aus der die Projektion erfolgt) eine beliebige Bisekante der Fläche gewählt. Da dieselbe Ebene auch bei den isotropen Projektionen der F_3^2 (durch die Tangentialebene) als Projektionsebene verwendet wird, ist es möglich darin eine Verwandtschaft zwischen den isotropen und den axialen Projektionen der Punkte der F_3^2 festzustellen. Es wird gezeigt, daß diese Verwandtschaft eine quadratische Cremonatransformation des Feldes der isotropen Projektionen ins Feld der axialen Projektionen ist. Es werden die Fundamentalpunkte und die Fundamentalgeraden der Transformation gefunden. Die drei Fundamentalpunkte in jedem von den untersuchten Feldern sind verschieden, wenn die Achse der Projektion die Fläche F_3^2 in zwei verschiedenen Punkte schneidet — dabei liegen diese Punkte nicht auf der einzigen Geraden u, die alle Erzeugenden der Fläche F_3^2 schneidet. Zwei von den Fundamentalpunkten, bezw. in dem einen und in dem anderen Feld, fallen zusammen, wenn die Achse der Projektion die Fläche F_3^2 in zwei zusammenfallenden Punkten schneidet (d. h. wenn sie eine Tangente von F_3^2 ist) oder wenn die Achse eine richtige Bisekante ist, aber der eine von ihren mit der Fläche F_3^2 gemeinsamen Punkten auf der Geraden u liegt. Die drei Fundamentalpunkte fallen (in jedem der Felder) zusammen, wenn die Achse der Projektion eine Tangente der Fläche F_3^2 in einem Punkt der Geraden u ist.

Der zwischen den isotropen und den axialen Projektionen der Punkte der Fläche F_3^2 untersuchte Zusammenhang ergibt die Möglichkeit für eine Lösung aller Aufgaben der axialen Projektion dieser Fläche, da die Aufgaben der isotropen Projektion gelöst sind.