ИЗОБРАЗЯВАНЕ НА ТОЧКИТЕ ОТ P^4 ЧРЕЗ ЧЕТВОРКИ ТОЧКИ ОТ P^3 С ПОМОЩТА НА ПРОСТРАНСТВЕНАТА КРИВА ОТ ЧЕТВЪРТИ КЛАС

Анани Лангов

На възможността тримерното пространство P^3 да се изобрази върху равнина с помощта на нормкрива C_3 от трета степен, се обръща внимание от Браунер [1] през 1955 г. Със синтетични средства и много по-пълно този въпрос се разглежда в работите на З. А. Скопец [2] и Асекритов [3]. В моята статия [5] за разлика от методите на Браунер и Скопец кривата C_3 от трета степен се заменя с крива C^3 от трети клас, което позволява проекционната равнина да се избере по-сполучливо от гледна точка на ефективността на реализиране на построенията. В резултат на това цялата теория на изобразяването е построена на други теоретични основи, като е използувана теорията на T-системите конични сечения [4]. В настоящата статия (вж. § 3) този метод се обобщава за изобразяване на четиримерното проективно пространство P^4 върху тримерното P^3, като се използува нормкрива C^4 от четвърти клас.

§ 1. Някои сведения за нормкривите от четвърта степен и четвърти клас

Ще изложим без доказателства някои известни свойства на нормкривите C_4 и C^4 от четвърта степен и четвърти клас, които ще бъдат използувани в тази статия.

Дефиниция 1. Нормкрива C_4 от четвърта степен в проективното пространство P^4 наричаме съвкупността от точките в P^4, през които минават двойки съответни прави на две колинеарни звезди.

Теорема 1. Кривата C_4 е многообразие V_1^4, т. е. тя съдържа ∞^1 точки, а всяка хиперравнина — четири нейни точки (включвайки и нереалните и сливащите се).

Теорема 2. От всяка своя точка кривата C_4 се проектира в конус от трета степен.

Теорема 3. За центрове на звездите, образуващи C_4, могат да се вземат две кои да е точки от C_4.

Дефиниция 2. Бисеканта на кривата C_4 се нарича права, в която се пресичат две съответни равнини при колинеацията, която определя C_4. Трисеканта на C_4 се нарича равнина, в която се пресичат две съответни хиперравнини при колинеацията между звездите, определяща C_4.

Теорема 4. Всяка бисеканта пресича неразпадаща се нормкрива C_4 два пъти, а всяка трисеканта — три пъти. Права не може да има повече от 2 общи точки, а равнина — повече от 3 общи точки с неразпадаща се нормкрива C_4.

Теорема 5. Ако две бисеканти на C_4 се пресичат, общата им точка принадлежи на C_4. Ако две трисеканти на C_4 се пресичат, общата им права е бисеканта на C_4.

Дефиниция 3. Нека S_1 и S са две точки от нормкривата C_4, а φ — колинеация на звездата S_1 върху звездата S_2, пораждаща C_4. Допирателна права (тангента) към C_4 в точката S наричаме правата $t=(SS_1)\varphi$, оскулачна равнина на C_4 в точката S наричаме равнината $\sigma=(S_1\ t)\varphi$, оскулачна хиперравнина на C_4 в точката S — хиперравнината $\pi^3=(S_1\ \sigma)\varphi$.

Теорема 6. Правата t, равнината σ и хиперравнината π^3 нямат освен S други общи точки с C_4.

Забележка 1. Тъй като $(S_1 t)_\varphi=\sigma$ и $(S_1S)_\varphi=t$, то през допирателната t минават две съответни при φ равнини, т. е. t е бисеканта на C_4. Следователно от всички бисеканти на C_4, които минават през S, правата t заема гранично положение, когато втората ѝ обща точка с C_4 съвпада с S. С аналогични разсъждения достигаме до резултата, че оскулачна равнина е трисеканта на C_4, на която трите общи точки с C_4 съвпадат и че оскулачна хиперравнина е хиперравнина, на която четирите общи точки с C_4 съвпадат.

Тъй като в следващите параграфи се използват свойствата на нормкрива C^4 от четвърти клас, то ще формулираме по принципа за дуалност всички дадени дотук дефиниции и теореми.

Дефиниция 1°. Нормкрива C^4 от четвърти клас наричаме съвкупността от хиперравнини, минаващи през съответните равнини на две колинеарни хиперравнини.

Теорема 1°. Кривата C^4 е многообразие V_1^4, т. е. тя съдържа ∞^1 хиперравнини и през всяка точка на пространството минават четири нейни хиперравнини.

Теорема 2°. Всяка хиперравнина от C^4 пресича останалите хиперравнини на C^4 в равнини, принадлежащи накрива C^3 от трети клас.

Теорема 3°. За образуващи C^4 хиперравнини могат да се изберат две кои да е хиперравнини, принадлежащи на C^4.

Дефиниция 2°. Нека C^4 е нормкрива от четвърти клас, получена с помощта на колинеацията φ на хиперравнината S_1^3 върху хиперравнината S^3. Двумерна ос на C^4 наричаме равнина, която съединява две прави, съответни при φ; едномерна ос на C^4 наричаме права, която съединява две съответни точки при φ.

Теорема 4⁰. Всяка двумерна ос на C^4 е равнина, в която се пресичат две хиперравнини, принадлежащи на C^4, а всяка едномерна ос на C^4 е права, в която се пресичат три хиперравнини, принадлежащи на C^4. През произволна равнина минават не повече от две хиперравнини, принадлежащи на C^4, а през права минават не повече от три хиперравнини, принадлежащи на C^4.

Теорема 5⁰. Ако две двумерни оси на C^4 се пресичат, тяхната съединителна хиперравнина принадлежи на C^4.

Дефиниция 3⁰. Нека C^4 е образувана от колинеацията φ на хиперравнината S_1^3 върху хиперравнината S^3. Оскулачна равнина на кривата C^4, принадлежаща на хиперравнината S^3, наричаме равнината $\sigma=(S_1^3\times S_3)_\varphi$. Допирателна права към C^4 в хиперравнината S^3 наричаме правата $t=(S_1^3\times\sigma)_\varphi$. Оскулачна точка на кривата C^4 в хиперравнината S^3 наричаме точката $T=(S_1^3\times t)_\varphi$.

Теорема 6⁰. През σ, t и T не минават други хиперравнини на C^4 освен S^3.

Забележка 1⁰. От всички двумерни оси на C^4, които лежат в S^3, оскулачната равнина заема гранично положение, при което двете хиперравнини от C^4, минаващи през нея, съвпадат с S^3. Допирателната t е гранично положение на едномерна ос на C^4, при която трите хиперравнини, принадлежащи на C^4 и минаващи през t, съвпадат с S^3. Оскулачната точка T е гранично положение, в което четирите хиперравнини на C^4, минаващи през T, съвпадат с S^3.

§ 2. Обобщение на теоремите на Хурвиц

Теорема 1. Ако хиперстените на два петстена $ABCDE$ и $A'B'C'D'E'$, лежащи в P^4, принадлежат на неразпадаща се крива C^4 от четвърти клас, то десетте им върха лежат на крива от четвърта степен.

Доказателство. Хиперстените на дадените пет стени нека означим: $\alpha=BCDE$, $\beta=ACDE$, ..., $\alpha'=B'C'D'E'$,... Въвеждаме още означенията $B_1=\alpha'\times AB$, $C_1=\alpha'\times AC$, ..., $B_1'=\alpha\times A'B'$, $C_1'=\alpha\times A'C'$,... Нека φ е колинеацията на α върху α', която поражда C^4. Лесно се вижда, че $(B)_\varphi=B_1$, $(C)_\varphi=C_1$, ..., $(B_1)_\varphi=B'$, ...

Нека означим с π_1 и π_2 перспективностите на равнините α и α' съответно върху звездите A' и A и разгледаме колинеацията ψ на звездата A върху звездата A', определена по схемата

$$\begin{array}{ccc} \alpha & \overset{\varphi}{\rightarrow} & \alpha' \\ \pi_1 \downarrow & & \downarrow \pi_2 \\ A' & \underset{\leftarrow}{\psi} & A \end{array}, \quad \text{откъдето } \psi=\pi_2^{-1}\varphi^{-1}\pi_1 .$$

Оттук получаваме

$$(AB)_\psi=(AB_1)_\psi=(AB_1)_{\pi_2^{-1}\varphi^{-1}\pi_1}=(B_1)_{\varphi^{-1}\pi_1}=(B)_{\pi_1}=A'B .$$

Аналогично $(AC)_\psi = A'C, \ldots, (AB')_\psi = A'B', \ldots$ Да означим с U_4 кривата от четвърта степен, която се определя от колинеацията ψ. От написаните равенства се вижда, че върховете на дадените петстени лежат на U_4. Единствеността на U_4 следва от това, че нормкрива от четвърта степен се определя еднозначно с помощта на седем свои точки.

Теорема 2. Ако нормкривата U_4 от четвърта степен минава през върховете на два петстена, хиперстените на които принадлежат на неразпадащата се крива C^4 от четвърти клас, то всяка едномерна ос на C^4, която пресича U_4, е бисеканта на U_4.

Доказателство. Нека $ABCDE$ и $A'B'C'D'E'$ са дадените петстени, а ψ е колинеацията на звездата A върху звездата A', която поражда U_4. Тогава $(AX)_\psi = A'X$ за всяко $X \in U_4$.

Ако с π_1 и π_2 означим, както в теорема 1, перспективностите на звездите A и A' върху хиперравнините α' и α, то, както е лесно да се види, колинеацията $\varphi = \pi_1 \psi^{-1} \pi_2^{-1}$ поражда кривата C^4.

Нека l е едномерна ос на C^4, която пресича U_3 в точката L, а α и α' — в точките X и X'. Тогава $(AL)_\psi = A'L$, а $X_\varphi = X'$, откъдето $(AX')_\psi = A'X$. Следователно $(p.\ ALX')_\psi = p.\ A'LX$ или $(p.\ AL)_\psi = p.A'l$, т. е. l е бисеканта на U_4.

Теорема 3. Ако в пространството P^4 нормкривата U_4 от четвърта степен и неразпадащата се нормкрива C^4 от четвърти клас са разположени така, че съществуват два петстена, вписани в U_4 с хиперстени, принадлежащи на C^4, то всяка точка на U_4 е връх на точно един петстен, вписан в U_4, с хиперстени, принадлежащи на C^4.

Доказателство. Нека $P \in U_4$. През P минават четири хиперравнини на C^4, всеки три от които се пресичат в едномерна ос на C^4 и всяка от тези оси пресича U_4 (т. **2**) още един път. Да означим тези 4 новополучени точки Q, R, S, T. През Q минават също четири хиперравнини на C^4, три от които са $PQRS$, $PQST$ и $PQRT$, а четвъртата да означим със σ. През Q минават 4 едномерни оси на C^4, една от които е QP. Да вземем едномерна ос на C^4, минаваща през Q и различна от QP. Една такава ос е $l = PQRS \times PQST \times \sigma = PQS \times \sigma$. Правата l лежи в равнината PQS, минава през Q, различна е от QP. Но вземайки пред вид, че l е бисеканта на U_4 и това, че в равнината PQS всички бисеканти на U_4 са правите PQ, QS и PS, получаваме, че $l = QS$.

Тъй като $l \not\subset \sigma$, то $\sigma \not\subset S$. Разсъждавайки по аналогичен начин, ще получим, че $\sigma \not\subset R, T$, т. е. $PQRST \equiv \sigma$. С това е доказано, че стените на петстена $PQRST$, чиито върхове лежат на U_4, принадлежат на C^4.

§ 3. Изобразяване на P^4 върху P^3 с помощта на C^4

Ако в пространството P^3 са дадени: нормкривата C^3 от трети клас и равнината π^2, принадлежаща на кривата C^3, то в пространството P^4 съществуват ∞^4 нормкриви от четвърти клас C^4, опреде-

лени със следните условия: 1) всяка C^4 съдържа хиперравнината P^3; 2) π^2 е за всяка C^4 оскулачна равнина; 3) хиперравнините на C^4 пресичат P^3 в равнини, принадлежащи на C^3.

Доколкото предлаганият метод за изобразяване напълно се описва със задаване на проекционното пространство P^3, кривата C^3 и равнината ѝ π^2, то в качеството на крива C^4, с помощта на която ще построим споменатото по-горе изобразяване, избираме произволна, но фиксирана неразпадаща се нормкрива C^4 от разгледаното четирипараметрично множество. След като изберем такава крива, ние определяме следното изображение Φ на пространството P^4 върху хиперравнината P^3.

Дефиниция 1. Нека A е произволна точка от P^4. През A минават четири хиперравнини на кривата C^4, които пресичат проекционната хиперравнина P^3 в четири равнини на кривата C^3. Тези четири равнини определят тетраедър $A_1A_2A_3A_4$ (с A_i са означени върховете му), лежащ в P^3. На точката A в съответствието Φ съпоставяме четворката точки $\{A_1, A_2, A_3, A_4\}$. Вземайки пред вид, че тетраедрите със стени, принадлежащи на нормкривата C^3, наричаме H-тетраедри относно C^3 ([6], § 1, деф. 1), получаваме:

Теорема 1. Посредством Φ точките от P^4 се изобразяват в четворки върхове на H-тетраедри относно C^3.

Означаваме с G съвкупността от всички ∞^4 четворки точки, които са четворки върхове на H-тетраедри относно кривата C^3 (стените на тетраедрите се разглеждат като равнини). От дефиниция 1 непосредствено следва, че Φ е еднозначно изображение на пространството P^4 върху множеството G. Лесно е да се види, че Φ е дори 1, 1-значно изображение на P^4 върху G. Наистина нека A_i ($i=1, 2, 3, 4$) е четворка върхове на H-тетраедър относно кривата C^3. През четирите стени на този тетраедър минава по една хиперравнина, принадлежаща на кривата C^4. Тези четири хиперравнини се пресичат в една точка A, която, и само тя, се изобразява посредством Φ в четворката точки $\{A_1, A_2, A_3, A_4\}$. С това 1, 1-значността на Φ е доказана.

1. Изобразяване на права

Нека a е произволна права. Избираме две точки A и B, лежащи на a. Четирите хиперравнини на кривата C^4 през A и хиперравнината P^3 образуват петстен $AA_1A_2A_3A_4$ с хиперстени, принадлежащи на C^4, а четирите хиперравнини на C^4 през B и хиперравнината P^3 образуват друг такъв петстен $BB_1B_2B_3B_4$. Съгласно теорема 1, § 2, съществува крива a_4 от четвърта степен, в която са вписани тези две петстена. Но точките A_i и B_i ($i=1, 2, 3, 4$) от кривата a_4 принадлежат на хиперравнината P^3 и следователно a_4 се разпада на крива a_3 от трета степен, лежаща в P^3, и правата a.

Ако X е произволна точка от правата a, то единственият вписан в кривата a_4 петстен $XX_1X_2X_3X_4$ с хиперстени, принадлежащи на C^4 (съществуващ съгласно теорема 3, § 2), има върховете си X_i ($i=1$,

2, 3, 4) върху кривата a_3 и значи в хиперравнината P^3. Следователно четворката $\{X_1, X_2, X_3, X_4\}$ изобразява посредством Φ точката X. Стените на тетраедъра $X_1X_2X_3X_4$ принадлежат на кривата C^3. Като вземем пред вид, че крива от трета степен, в която могат да се впишат ∞^1 H-тетраедри относно C^3, наричаме ([6], § 1, деф. 1) H крива относно C^3, получаваме:

Теорема 2. Точките от една права a, принадлежаща на P^4, посредством Φ се изобразяват в четворки точки от една H-крива a_3 относно C^3.

Дефиниция 2. На правата a от P^4 посредством Φ съпоставяме H-кривата относно C^3, на която лежат четворките точки, изобразяващи посредством Φ точките от правата a.

От условието за неразпадане на нормкривата C^4 следва, че през една права минават най-много три хиперравнини на C^4. Ще наричаме правата a от тип 0, 1, 2 или 3, когато през a минават съответно 0, 1, 2 или 3 хиперравнини на кривата C^4. Като се вземе пред вид теорема 4^0, § 1, се вижда, че понятията права от тип 3 и едномерна ос на кривата C^4 изразяват един и същ факт.

Ако правата a е от тип 0, тетраедрите A_i ($i=1, 2, 3, 4$) и B_i нямат обща стена. Наистина, ако стената $A_iA_jA_k$ ($i, j, k=1, 2, 3, 4$), $i \neq j \neq k \neq i$, съвпада със стената $B_lB_mB_n$ ($l, m, n=1, 2, 3, 4$), $l \neq m \neq n \neq l$, то хиперравнината C^4, която минава през тази обща стена, минава както през A, така и през B и следователно през правата a. Това противоречи обаче на условието, че a е от тип 0.

Но щом тетраедрите A_i и B_i нямат обща стена, то ([6], § 1, т. 1) a_3 е неразпадаща се H-крива относно C^3.

Нека a е от тип 1, а σ^3 е хиперравнината на C^4, която минава през правата a. Петстените $AA_1A_2A_3A_4$ и $BB_1B_2B_3B_4$, с помощта на които изобразяваме a, имат обща хиперстена σ^3, а тетраедрите A_i ($i=1, 2, 3, 4$) и B_i имат за обща стена равнината $\sigma^2=\sigma^3 \times P^3$. H-кривата a_3 ([6], § 1, т. 1) в този случай се разпада на крива a_2 от втора степен, лежаща в равнината σ^2, и права a_1, пресичаща кониката a_2.

Разсъждавайки по аналогичен начин и вземайки под внимание ([6], § 1, т. 1), получаваме, че: 1) ако правата a е от тип 2, то H-кривата a_3 се разпада на тройка прави (a_1', a_2', a_3'), една от които, например a_2', е ос на кривата C^3, а другите две прави a_1' и a_3' лежат по една в равнините, принадлежащи на кривата C^3 и минаващи през a_2', и 2) ако правата е от тип 3, то H-кривата a_3 се разпада на тройка оси на кривата C^3, които минават през една точка.

2. Изобразяване на равнина

Избираме неколинеарните точки A, B и C, лежащи в дадената равнина α. Точките A, B и C посредством Φ се изобразяват в четворките върхове на H-тетраедрите A_i, B_i, C_i ($i=1, 2, 3, 4$). Тези 12 точки лежат на квадрика α^2 [(6], § 2, т. 8). Точките на правата $a=AB$ се

изобразяват в четворките върхове на H-тетраедрите, вписани в H кривата $a_3 = H(A, B)$. Но a_3 лежи на квадриката α^2, тъй като 8-те върха на тетраедрите $A(A_i)$ и $B(B_i)$ лежат на α^2. Следователно точките на правата a се изобразяват в четворки върхове на H-тетраедри, вписани в квадриката α^2. С аналогични разсъждения стигаме до заключението, че точките на правата $b = AC$ се изобразяват в четворки върхове на H-тетраедри, вписани в α^2.

Нека X е произволна точка на равнината α, вън от правите a и b. През X прекарваме права c, която пресича правите a и b в различни точки P и Q. Тъй като точките P и Q съответно на правите a и b се изобразяват в четворки точки, лежащи на квадриката α^2, то H-кривата $C_3 = H(P, Q)$ лежи на α^2 и следователно четворката точки, която изобразява X, лежейки на кривата C_3, лежи и на α^2.

Като вземем пред вид и това, че квадрика, в която могат да се впишат ∞^2 H-тетраедри, наричаме ([6], § 2, деф. 1) T-квадрика, получаваме:

Теорема 3. Точките, принадлежащи на равнина α от P^4 се изобразяват посредством Ф в четворки точки, лежащи на една T-квадрика α^2 относно C^3.

Дефиниция 3. На равнината α от P^4 посредством Ф съпоставяме T-квадриката α^2, на която лежат четворките точки, изобразяващи посредством Ф точките от α.

Ще разгледаме някои частни случаи. През произволна равнина (§ 1, т. 4°) минават не повече от две хиперравнини на кривата C^4. Равнината α ще наричаме от тип 0, 1 или 2, когато през α минават съответно 0, 1 или 2 хиперравнини $\in C^4$. Както е лесно да се види, понятието равнина от тип 2 съвпада с понятието двумерна ос на C^4.

Нека α е равнина от тип 1. Всички петстени, с помощта на които изобразяваме точките от равнината α, имат обща хиперстена, затова всички тетраедри, в котто се изобразяват точките от α, имат обща стена σ, принадлежаща на C^3. Но ако T-квадриката α^2, изобразяваща равнината α, има компонента равнината σ, то α^2 се разпада на равнините σ и α_1.

Ако α е равнина от тип 2, разсъждавайки по аналогичен начин, ще видим, че T-квадриката α^2, изобразяваща равнината α, е двойка равнини (σ, τ), където и σ, и τ принадлежат на C^3.

3. Изобразяване на равнини от тип 0, съдържащи или не едномерни оси на C^4

Ще докажем, че съществуват равнини от тип 0, които а) съдържат една едномерна ос на C^4 и б) не съдържат нито една едномерна ос на C^4.

Разглеждаме едномерна ос o на кривата C^4 и точка A, нележаща в никоя от хиперравнините σ, τ, μ на C^4, минаващи през правата o. Равнината $oA = \alpha$ е от тип 0. Действително, ако допуснем, че хипер-

равнината γ на C^4 съдържа α, то γ би била четвърта хиперравнина на C^4 през A, което е невъзможно, тъй като C^4 е неразпадаща се крива. В α няма втора едномерна ос на кривата C^4, защото, ако допуснем, че o_1 е такава, то α би била двумерна ос на C^4 (вж. § 1, т. 5⁰), което противоречи на доказаното, че през α не минава хиперравнина на C^4.

За доказателството на б) разглеждаме шест хиперравнини σ_i ($i=1, 2, 3, 4, 5, 6$) на C^4. Точките $A=\sigma_1\times\sigma_2\times\sigma_3\times\sigma_4$, $B=\sigma_1\times\sigma_2\times\sigma_5\times\sigma_6$ са неколинеарни, защото в противен случай през правата ABC биха минавали повече от три хиперравнини на C^4, което е изключено. Ще докажем, че $\alpha=ABC$ не съдържа едномерна ос на C^4. Нито една от хиперравнините σ_i ($i=1, 2, 3, 4, 5, 6$) не съдържа α. Ако допуснем, че σ_5 например съдържа α, то през точката A биха минавали хиперравнините σ_1, σ_2, σ_3, σ_4, σ_5, което е изключено. Да допуснем, че σ е $\neq\sigma_i$ ($i=1, 2, \ldots, 6$) и е хиперравнина на C^4, която минава през α. Но тогава през точките A, B и C ще минават повече от 4 хиперравнини на C^4, което не може да бъде. Следователно α е от тип 0.

Да допуснем, че правата $\rho\not\subset\alpha$ е едномерна ос на C^4. Тъй като A, B, C са неколинеарни точки, то ρ не минава през всички тях и да допуснем, че ρ пресича правата AB в точка X. През X минават хиперравнините σ_3 и σ_4, които минават през AB, и трите хиперравнини λ, μ, ν на C^4 през ρ. При това всички 5 равнини са различни, защото, ако например $\sigma_3=\lambda$, то λ би минавала през ρ и AB, т. е. през равнината α, противно на доказаното. Полученото противоречие, че през точката X минават 5 хиперравнини на C^4, показва, че α не съдържа едномерна ос на кривата C^4.

Тъй като равнините от типа 0 се изобразяват посредством Ф в неразпадащи се на двойка равнини T-квадрики, а образът на едномерна ос на кривата C^4 е тройка оси на кривата C^3, минаващи през една точка, то образ на равнина от тип 0, която съдържа едномерна ос на кривата C^4 [съществуването на която доказахме в а)] е конус, а образ на равнина от тип 0, която не съдържа едномерна ос на C^4 [съществуването на която доказахме в б)], е T-квадрика без особени точки, т. е. хиперболоид.

Така доказахме, че T-квадриките от всички видове се получават от равнини на P^4 с помощта на Ф.

4. Изобразяване на хиперравнина

Нека хиперравнината L^3 принадлежи на кривата C^4. Петстените с помощта на които изобразяваме точките на L^3, имат обща хиперстена L^3. Следователно H-тетраедрите, изобразяващи точките от L^3, имат обща стена равнината $\sigma=L^3\times P^3$, принадлежаща на кривата C^3. Лесно е да се види, че ако се вземе произволен H-тетраедър с една стена σ, то в L^3 съществува точка, която посредством Ф се изобразява в този тетраедър. Но съвкупността на H-тетраедрите с обща

стена наричаме ([6], § 5, деф. 2) съвкупността I^3_σ. Полученият резултат можем да изкажем така:

Точките на една хиперравнина на C^4 се изобразяват в H-тетраедри, принадлежащи на една съвкупност I^3_σ.

Ако хиперравнината L^3 не принадлежи на кривата C^4, то имаме два случая: 1) L^3 съдържа двумерна ос на C^4 и 2) L^3 не съдържа двумерна ос на C^4.

През произволна двумерна ос σ на C^4 минават (вж. § 1, т. 4) две хиперравнини на C^3. Всяка хиперравнина от снопа с ос σ, различна от тях, е хиперравнина от вида 1). В този случай L^3 може да се определи и като съвкупност от точки, лежащи върху правите, които съединяват избрана точка $A \in L^3$ и произволна точка от двумерната ос σ, лежаща в L^3. Равнината σ посредством Φ се изобразява, както видяхме в 3, в T-квадрика, която се разпада на двойка равнини (σ_1, σ_2), принадлежащи на C^3, а всяка точка от σ се изобразява в H-тетраедър, вписан в T-квадриката (σ_1, σ_2), т. е. H-тетраедър, на който един ръб лежи на оста $o = \sigma_1 \times \sigma_2$ на кривата C^3. Значи точките от L^3 се изобразяват в H-тетраедри, вписани в H-криви, които минават през върховете на един тетраедър $A(A_1A_2A_3A_4)$ и имат обща бисеканта една ос o на кривата C^3. Но съвкупността от такива тетраедри наричаме ([6], § 5, деф. 3) съвкупност $I^3_{o,A}$. Полученият резултат можем да формулираме така:

Точките от една хиперравнина, която не принадлежи на кривата C^4, но съдържа двумерна ос на C^4, посредством Φ се изобразяват в H-тетраедри, принадлежащи на една съвкупност $I^3_{o,A}$.

За да докажем съществуването на хиперравнина със свойствата от условието 2), да изберем четири H-тетраедъра A, B, C, D, принадлежащи на една съвкупност I^3_a ([6], § 5, деф. 1), невписани в една T-квадрика. На тези четири тетраедъра в изображението Φ^{-1} отговарят в P^4 четири точки A, B, C, D, нележащи в една равнина. Тези точки определят една хиперравнина L^3, която посредством Φ се изобразява в H-тетраедрите на взетата съвкупност I^3_a. Наистина всяка равнина, лежаща в L^3, пресича правите AB, AC, AD и следователно T-квадриката, която я изобразява посредством Φ, минава през върховете на три тетраедъра от съвкупността I^3_a, т. е. тя изцяло принадлежи на съвкупността I^3_a. Хиперравнината L^3 не съдържа двумерна ос на C^4. Ако σ е двумерна ос на C^4, лежаща в L^3, то тя посредством Φ се изобразява (вж. 3) в T-квадрика, която се разпада на двойка равнини (σ, τ), принадлежащи на C^3. Но всяка T-квадрика, принадлежаща на една съвкупност I^3_a, минава през правата a ([16], § 5, т. 3, сл. 3), т. е. една от равнините σ и τ минава през правата a, което противоречи на дефиницията на съвкупността I^3_a. Полученият резултат можем да изкажем така:

Точките от една хиперравнина на P^4, която не съдържа двумерна ос на кривата C^4, се изобразяват посредством Φ в H-тетраедрите, принадлежащи на една съвкупност I_a^3.

§ 4. Някои свойства на нормкривите от четвърти клас и четвърта степен, произхождащи от свойствата на T-системите квадрики

Теорема 1. Всяка равнина, нележаща в хиперравнина, принадлежаща на нормкривата C^4 от четвърти клас, се пресича от три двумерни оси на C^4.

Теорема 2. Съвкупността от хиперравнините, минаващи през двумерните оси на кривата C^4 от четвърти клас, е хиперповърхнина от трети клас.

Теорема 3. Съвкупността от хиперравнините, които минават през едномерните оси на крива C^4 от четвърти клас, лежащи в една хиперравнина S^3, непринадлежаща на C^4, е хиперповърхнина от втори клас.

Доказателство. Избираме една хиперравнина P^3, принадлежаща на нормкривата C^4, и изобразяваме P^4 върху P^3 с помощта на изображението Φ, дефинирано в § 3.

Доказателство на теорема 1. Дадената равнина α с помощта на Φ се изобразява в T-квадрика α^2, която не се разпада на двойка равнини. Тогава на α^2 лежат три оси на кривата C^3 ([6], § 4, т. 3). Да означим p една от тях и да построим двойката равнини (σ, τ), минаващи през p и принадлежащи на кривата C^3. T-квадриката $F^2(\sigma, \tau)$ пресича T-квадриката α^2 [6], § 4, т. 6) в една H-крива k_3. Посредством Φ^{-1} T-квадриката α^2 се изобразява в равнината α, а T-квадриката $F^2(\sigma, \tau)$ в една двумерна ос λ на C^4. Тъй като H-кривата k_3 лежи върху α^2 и $F^2(\sigma, \tau)$, то правата k, която е образ на кривата k_3 посредством Φ^{-1}, ще лежи на α и λ, т. е. α се пресича от една двумерна ос на C^4. Използувайки и останалите две оси на C^3 в α^2, ще получим още две двумерни оси на C^4, пресичащи α.

Доказателство на теорема 2. Доказателството на твърдението се свежда до това да се докаже, че в произволен сноп хиперравнини има три хиперравнини, минаващи през двумерни оси на кривата C^4. Нека равнината α е централно пространство на снопа хиперравнини Σ. Съгласно теорема 1 съществуват три двумерни оси λ, μ и ν на кривата C^4, пресичащи α. Хиперравнините $\alpha\lambda$, $\alpha\mu$ и $\alpha\nu$ принадлежат на снопа Σ и съдържат двумерни оси на C^4.

Доказателство на теорема 3. Да вземем сноп хиперравнини, непринадлежащи на даденото геометрично място. За това е достатъчно равнината α, която е централно пространство на снопа, да не съдържа едномерна ос на кривата C^4, лежаща в дадената хиперравнина S^3. Посредством изображението Φ равнината α се преобразува в T-квадрика α^2, а хиперравнината S^3 — в съвкупност I_a^3 или съвкуп-

ност $I^3_{o,A}$. Правата $a(o)$ пресича квадриката α^2 в две точки A_1 и B_1. Разглеждаме тройката оси (o_1, o_2, o_3) на кривата C^3, които минават през точката A_1. Трите оси o_1, o_2, o_3 не лежат едновременно на α^2. Ако допуснем, че това не е така, то H-кривата (o_1, o_2, o_3), която принадлежи на I^3_a $(I^3_{o,A})$ (тъй като $a(o)$ е нейна бисеканта) и на α^2, би изобразявала едномерна ос P_3, лежаща в S^3 и в α, което изключихме. Съществува единствен вписан в α^2 H-тетраедър A с връх A_1 ([6], § 2, т. 1). Тъй като той е вписан и в H-кривата (o_1, o_2, o_3), то α и p имат обща точка и следователно определят хиперравнина A^3, която принадлежи на дадения сноп и съдържа едномерна ос на C^4, лежаща в S^3. С помощта на точката B_1 получаваме още една такава хиперравнина B^3. С това теоремата е доказана.

С помощта на принципа за дуалност получаваме следните твърдения, изразяващи свойства на нормкривите от четвърта степен.

1°. Всяка права, която не сече нормкрива от четвърта степен в P^4, се пресича от три бисеканти на тази крива.

2°. Съвкупността от точките на пространството, лежащи на бисекантите на нормкрива от четвърта степен в P^4, е хиперповърхнина от трета степен.

3°. Съвкупността от точките, лежащи на трисекантите на една нормкрива от четвърта степен, минаващи през една точка, е хиперповърхнина от втора степен.

ЛИТЕРАТУРА

1. Brauner, H.: Über die Projektion mittels der Sehnen einer Raumkurve 3. Ordnung. Monatsh. f. M., **59**, 4 (1959), 258—273.
2. Скопец, З. А.: Отображение пространства на плоскость посредством пространственных кривых. Изв. высш. уч. зав., **6** (1961), 97—107.
3. Асекритов, У. М.: Отображение пространства на плоскость посредством кубической окружности, канд. дисертация, Якутск, 1966.
4. Глаголев, А. А.: Теория T-системы. Уч. зап. Моск. обл. пед. ин-та, **39** (1956), вып. 3, 71—103.
5. Лангов, А. С.: Изобразяване на тримерното пространство на равнина с помощта на линейна конгруенция от трета степен и първи клас. Год. на ВТУЗ, том IV, кн. 3.
6. Лангов, А. С.: Някои свойства на тетраедрите със стени, принадлежащи на една нормкрива C^3 от трети клас. Год. на Соф. унив., Мат. фак., **63** (1968/69),...

Постъпила на 11. XI. 1969 г.

REPRÉSENTATION DES POINTS DE P^4 PAR DES QUATRES DE POINTS DE P^3 A L'AIDE D'UNE COURBE RATIONNELLE NORMALE DE CLASSE QUATRE

A. S. Langov

(RÉSUMÉ)

Dans l'espace des projections P^3 on choisit une courbe C^3 de classe trois. Dans l'espace P^4 on choisit une courbe rationnelle normale de classe quatre C^4, non dégénérée, qui contient P^3 et telle que les hyperplans de la courbe C^4 interceptent P^3 en des plans de la courbe C^3.

Au point A de P^4 on fait correspondre les sommets du tétraèdre $A_1A_2A_3A_4$, dont les faces sont formées par l'intersection de P^3 avec les quatre hyperplans de la courbe C^4 qui passent par A. Les sommets du tétraèdre $A_1A_2A_3A_4$ sont obtenus par l'intersection de P^3 avec les quatre axes de C^4 passant par A. On désigne cette correspondance par Φ.

Grâce à Φ, aux points d'une droite a correspondent des tétraèdres inscrits dans une H-courbe et dont les faces appartiennent à C^3 [6].

Aux points d'un plan α correspondent par Φ des tétraèdres inscrits dans une T-quadrique [6].

Aux points d'un hyperplan L^3 correspondent des tétraèdres appartenant à un ensemble I^3 [6].

Puisque la correspondance Φ de P^4 sur P^3 est réalisée par des moyens synthétiques à l'aide d'une courbe C^4, on peut appliquer les propriétés des T-systèmes de quadriques [6] pour obtenir quelques propriétés de la courbe C^4 [§ 4].