ОБ УПЛОТНЕНИИ НА БИКОМПАКТЫ

Николай Г. Хаджииванов

Уплотнениями называют взаимно-однозначные непрерывные отображения „на".

По-видимому, впервые П. С. Александровым был поставлен вопрос о нахождении необходимых и достаточных условий для того, чтобы топологическое пространство могло быть уплотнено на компакт или бикомпакт. Он задал и следующий конкретный вопрос: можно ли всегда уплотнить на компакт связное, локально-связное, полное метрическое пространство со счетной базой, являющееся суммой счетного числа компактов? Ю. М. Смирнов в [1] отвечает отрицательно на этот вопрос. В связи с этим Ю. М. Смирнов спрашивает: если в условии этого вопроса дополнительно потребовать, чтобы пространство было n-связным и локально n-связным, будет ли уплотнение на бикомпакт.

В этой заметке мы даем отрицательный ответ на вопрос Ю. М. Смирнова в случае $n=1$. Общий случай будет рассмотрен в другом месте.

Пример A_2. Пусть S^2 — двумерная единичная сфера в E^3. На S^2 рассмотрим последовательность симплициальных разбиений K_1, $K_2, \ldots, K_i, \ldots$, где полиэдр K_{i+1} является симплициальным разбиением полиэдра K_i. Предположим, кроме того, что мелкость разбиения K_i меньше $\frac{1}{2^{i+1}}$. Через L_i будем обозначать одномерный остов полиэдра K_i. Пусть D^3 — единичный шар пространства E^3. В E^4 определим следующее множество:

$$A_2 = S^2 \cup \bigcup_{i=1}^{\infty}\left(D^3 \times \frac{1}{i}\right) \cup \bigcup_{i=1}^{\infty}\left(L_i \times \left[0, \frac{1}{i}\right]\right).$$

Теорема A_2. Пространство A_2 — 1-связное и локально 1-связное[1] тримерное полное метрическое пространство[2] со счетной базой, являющееся суммой счетного числа компактов, которое не уплотняется ни на один бикомпакт.

В E^3 рассмотрим последовательность концентрических 2-мерных сфер $S^2, S_1^2, \ldots, S_i^2, \ldots$ с центром в начале $0_3=(0, 0, 0) \in E^3$ и с ра-

---

[1] Относительно определения 1-связности и локальной 1-связности см. [2].

[2] Множество A_2 метризуемо с полной метрикой, так как оно есть G_δ — множеством в полном метрическом пространстве E^4.

диусами $1, 1+1, \ldots, 1+\frac{1}{i}, \ldots$ Спроектируем из начала полиэдр K_i. Положим

$$H_i = \bigcup \left\{ \mu x / 1 \leqq \mu \leqq 1 + \frac{1}{i},\ x \in L_i \right\},$$

т. е. H_i — это та часть конуса над L_i с вершиной 0_3, которая содержится в замкнутом слое между сферами S^2 и S_i^2.

Определим в E^3 множество

$$B = S^2 \cup \bigcup_{i=1}^{\infty} S_i^2 \cup \bigcup_{i=1}^{\infty} H_i.$$

Для доказательства теоремы A_2 нам понадобится следующая

Лемма B. Пространство B — 1-связно и локально 1-связно.

Доказательство леммы B. Положим $B_m = S^2 \cup \bigcup_{i=m}^{\infty} S_i^2 \cup \bigcup_{i=m}^{\infty} H_i$. Очевидно $B_1 = B$.

1. Пусть $\varphi : [\alpha, \beta] \to [B_m \setminus B_{m+1}]$ — непрерывное отображение, $\varphi(\alpha) \in S_{m+1}^2$, $\varphi(\beta) \in S_{m+1}^2$, $\varphi((\alpha, \beta)) \subset B_m \setminus B_{m+1}$.

Тогда существует такая гомотопия $\varphi_t(x)$, что $\varphi_0(x) = \varphi(x)$, $\varphi_1(x) \in S_{m+1}^2$ для любого x и

$$(1) \qquad \rho(\varphi_{t'}(x), \varphi_{t''}(x)) \leqq \frac{1}{2^m} + \frac{1}{m} - \frac{1}{m+1},\ 0 \leqq t', t'' \leqq 1,\ \alpha \leqq x \leqq \beta.$$

Кроме того, гомотопия закреплена в концах интервала, т. е. $\varphi_t(\alpha) = \varphi(\alpha)$, $\varphi_t(\beta) = \varphi(\beta)$ для любого t.

Докажем утверждение 1. Возьмем симплициальное разбиение K полиэдра $[B_m \setminus B_{m+1}]$ с мелкостью меньше $\frac{1}{2^m}$, сохраняя при этом данное симплициальное разбиение на S_m^2 [1] и принимая за вершины точки $\varphi(\alpha)$ и $\varphi(\beta)$. Потом прогомотопируем φ до его симплициального приближения s так, что во время деформации образ любой точки $x \in [\alpha, \beta]$ остается в замкнутом симплексе, внутренность которого содержит точку $\varphi(x)$ [2]. Так как s — симплициальное отображение, то образ интервала $[\alpha, \beta]$ при отображении s будет лежать в одномерном остове $K^{(1)}$ полиэдра K. Однако очевидно $K^{(1)} \subset [H_m \setminus B_{m+1}]$. Ясно, что S_{m+1}^2 является строгим деформационным ректрактом множества $[H_m \setminus B_{m+1}] \cup S_{m+1}^2$ [3] с гомотопией, которая деформирует точки на расстояние не

---

[1] Идет речь о симплициальном разбиении на S_m^2, которое получилось проектированием из начала 0_3 полиэдра K_m.

[2] См. например [3].

[3] Относительно определения этого понятия см. [3].

больше $\frac{1}{m}-\frac{1}{m+1}$. Поэтому отображение S гомотопно отображению $\varphi':[\alpha, \beta]\to S^2_{m+1}$. Окончательно, φ гомотопно отображению $\varphi':[\alpha, \beta]\to S^2_{m+1}$ и притом гомотопия удовлетворяет всем условиям, которые мы сформулировали в 1.

2. Непрерывное отображение $\varphi_m:[0, 1]\to B_m$ можно так деформировать до отображения $\varphi_{m+1}:[0, 1]\to B_{m+1}$, что гомотопия $\varphi_t(x)$ удовлетворяет неравенствам

$$\rho(\varphi_{t'}(x), \varphi_{t''}(x))\leqq\frac{1}{2^m}+\frac{1}{m}-\frac{1}{m+1},\ 0\leqq t',\ t''\leqq 1,\ 0\leqq x\leqq 1,$$

и при этом она закреплена на множестве $\varphi_m^{-1}\ B_{m+1}$.

Докажем утверждение 2. Множество $\varphi_m^{-1}(B_m\setminus B_{m+1})$ открыто в $[0, 1]$. Пусть $\varphi_m^{-1}(B_m\setminus B_{m+1})=\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}(\alpha_i, \beta_i)$, где система интервалов $\{(\alpha_i, \beta_i)\}_{i=1}^{\infty}$ дизъюнктна. Ясно, что $\varphi_m(\alpha_i)\in S^2_{m+1}$, $\varphi_m(\beta_i)\in S^2_{m+1}$. Допустим, что в бесконечном множестве интервалов $\{(\alpha_{i_j}, \beta_{i_j})\}_{j=1}^{\infty}$ отображение φ_m принимает значения на S^2_m, т. е. для каждого j существует точка $x_j\in(\alpha_{i_j}, \beta_{i_j})$, для которой $\varphi_m(x_j)\in S^2_m$. Без ограничения общности можем считать, что $\alpha_{i_j}\to x_0$ и следовательно $\beta_{i_j}\to x_0$ и $x_j\to x_0$. Получаем $\varphi_m(x_0)\in S^2_{m+1}$, $\varphi_m(x_0)\in S^2_m$ — противоречие. Следовательно только в конечном числе интервалов $\{(\alpha_i, \beta_i)\}_{i=1}^{p}$ отображение φ_m может принимать значения на S^2_m. Тогда, применяя 1, можем прогомотопировать φ_m до отображения φ', для которого $\varphi'\left(\bigcup\limits_{i=1}^{p}(\alpha_i, \beta_i)\right)\subset S^2_m$, с гомотопией, закрепленной на $[0, 1]\setminus\bigcup\limits_{i=1}^{p}(\alpha_i, \beta_i)$ и удовлетворящей неравенствам (1). Снова пользуясь тем, что B_{m+1} является строгим деформационным ретрактом множества $B_{m+1}\cup[H_m\setminus B_{m+1}]$ и замечая, что $\varphi'([0, 1])\subset[H_m\setminus B_{m+1}]\cup B_{m+1}$, мы можем прогомотопировать φ' до отображения $\varphi_{m+1}:[0, 1]\to B_{m+1}$ и то так, что гомотопия удовлетворяет неравенствам (1)[1]. Кроме того, эта гомотопия закреплена на $(\varphi')^{-1}\ B_{m+1}$, и следовательно $\varphi_{m+1}(x)=\varphi'(x)$ для любого $x\in\bigcup\limits_{i=1}^{p}(\alpha_i, \beta_i)$. Окончательно, отображение $\varphi_m:[0, 1]\to B_m$ гомотопно отображению $\varphi_{m+1}:[0, 1]\to B_{m+1}$ и при том гомотопия удовлетворяет неравенствам (1) и закреплена на $\varphi_m^{-1}\ B_{m+1}$.

3. Пусть $\varphi:[0, 1]\to B$ — непрерывное отображение и $\varphi(0)\in S^2$, $\varphi(1)\in S^2$. Тогда существует гомотопное ему непрерывное отображение $\varphi_0:[0, 1]\to S^2$ и при том с гомотопией, закрепленной в точках 0 и 1.

[1] В правой стороне можем считать, что имеем только $\frac{1}{m}-\frac{1}{m+1}$.

Докажем утверждение 3. Из 2 следует, что для отображения $\varphi:[0, 1]\to B$ существует такая гомотопия $F_1:[0, 1]\times\left[\frac{1}{2}, 1\right]\to B$, что $F_1(x, 1)=\varphi(x)$, $F_1\left(x, \frac{1}{2}\right)\in B_2$; если $x\in\varphi^{-1}B_2$, то $F_1(x, t)=\varphi(x)$; кроме того, выполнены неравенства:

$$\rho(F_1(x, t'), F_1(x, t''))\leqq\frac{1}{2}+1-\frac{1}{2},\quad \frac{1}{2}\leqq t', t''\leqq 1,\ 0\leqq x\leqq 1.$$

Продолжая индуктивно, мы построим гомотопии $F_m:I\times\left[\frac{1}{m+1}, \frac{1}{m}\right]\to B_m$, такие что $F_m\left(x, \frac{1}{m}\right)=F_{m-1}\left(x, \frac{1}{m}\right)$, $F_m\left(x, \frac{1}{m+1}\right)\in B_{m+1}$ для любого x. Кроме того, если для некоторого x имеем $F_m\left(x, \frac{1}{m}\right)\in B_{m+1}$, то $F_m(x, t)=F_{m-1}\left(x, \frac{1}{m}\right)$ для $t\in\left[\frac{1}{m+1}, \frac{1}{m}\right]$. Наконец, выполнены неравенства

$$\rho(F_m(x, t'), F_m(x, t''))\leqq\frac{1}{2^m}+\frac{1}{m}-\frac{1}{m+1},\ 0\leqq x\leqq 1.$$

Легко можно доказать, что последовательность $\left\{F_m\left(x, \frac{1}{m}\right)\right\}_{m=}^{\infty}$ сходится равномерно. Положим $\varphi_0=\lim\limits_{m\to\infty}F_m\left(x, \frac{1}{m}\right)$. Отображение φ_0 непрерывно и $\varphi_0(x)\in S^2$ для любого x.

Определим отображение $F:I^2\to B$ следующим образом

$$F(x, t)=\begin{cases} F_m(x, t) & \text{если } t\in\left[\frac{1}{m+1}, \frac{1}{m}\right], \\ \varphi_0(x), & \text{если } t=0. \end{cases}$$

Легко можно убедиться в том, что отображение $F(x, t)$ непрерывно и $F(0, t)=\varphi(0)=\varphi_0(0)$ и $F(1, t)=\varphi(1)=\varphi_0(1)$ для любого t.

4. Пространство B — 1-связно.

Докажем утверждение 4. Пусть $\varphi^{(1)}:[0, 1]\to B$ и $\varphi^{(2)}:[0, 1]\to B$ — непрерывные отображения и $\varphi^{(1)}(0)=\varphi^{(2)}(0)$, $\varphi^{(1)}(1)=\varphi^{(2)}(1)$. Необходимо доказать, что существует гомотопия $\psi:I^2\to B$, для которой $\psi(x, 0)=\varphi^{(1)}(x)$, $\psi(x, 1)=\varphi^{(2)}(x)$, $\psi(0, t)=\varphi^{(1)}(0)$, $\psi(1, t)=\varphi^{(1)}(1)$. Ее существование следует сразу из 3 в случае, когда $\varphi^{(1)}(0)\in S^2$, $\varphi^{(1)}(1)\in S^2$, потому что S^2 1-связное пространство. Общий случай сводится к этому, так как пространство B линейно связно. На доказательстве не будем останавливаться.

5. Пространство B — локально 1-связно.

Докажем утверждение 5. Во всех точках $y \in B \setminus S^2$ пространство B локально стягиваемо и следовательно локально 1-связно. Поэтому интересен случай, когда $y \in S^2$. Точка y обладает произвольно малыми линейно связными окрестностями. Достаточно доказать, что каждая такая окрестность 1-связна. Это доказывается таким образом как и 1-связность самого пространства B.

Доказательство теоремы A_2.

Положим $C = S^2 \cup \bigcup\limits_{i=1}^{\infty}\left(S^2 \times \frac{1}{i}\right) \cup \bigcup\limits_{i=1}^{\infty}\left(L_i \times \left[0, \frac{1}{i}\right]\right)$.

Легко доказывается, что подпространство C пространства A_2 гомеоморфно пространству B. Следовательно, C 1-связно. Для доказательства односвязности пространства A_2 достаточно доказать, что если $\varphi : [0, 1] \to A_2$ непрерывное отображение и $\varphi(0) \in S^2$, $\varphi(1) \in S^2$, то существует гомотопия $F : I^2 \to A_2$, для которой $F(x, 0) = \varphi(x)$, $F(x, 1) \in C$, $F(0, t) = \varphi(0)$, $F(1, t) = \varphi(1)$.

Существует такое ν, что если $m \geqq \nu$, то $\varphi([0, 1]) \not\ni \mathbf{0}_3 \times \frac{1}{m}$. Действительно, в противоположном случае существует последовательность чисел $x_j \in [0, 1]$, для которых $\varphi(x_j) \in \mathbf{0}_3 \times \left[0, \frac{1}{j}\right]$. Можем считать, что $\{x_j\}_{j=1}^{\infty}$ сходится. Пусть $x_0 = \lim\limits_{j\to\infty} x_j$. Тогда $\varphi(x_0) = \mathbf{0}_3$ — противоречие, так как $\mathbf{0}_3 \notin A_2$. Множество $\bigcup\limits_{i=1}^{\nu}\left(\operatorname{Int} D^3 \times \frac{1}{i}\right)$ открыто и следовательно $\varphi^{-1}\bigcup\limits_{i=1}^{\nu}\left(\operatorname{Int} D^3 \times \frac{1}{i}\right) = \bigcup\limits_{i=1}^{\infty}(\alpha_i, \beta_i)$, где система интервалов $\{(\alpha_i, \beta_i)\}_{i=1}^{\infty}$ — дизъюнктна. Как и в доказательстве предшествующей леммы (см. 2), убеждаемся, что только в конечном числе интервалов φ может принимать значение, совпадающее с некоторым из центров шаров $D^3 \times 1, \ldots, D^3 \times \frac{1}{\nu}$. Пусть это интервалы $(\alpha_1, \beta_1), \ldots, (\alpha_p, \beta_p)$. В каждом из этих интервалов прогомотопируем φ до отображения, не принимающего значения в упомянутых центрах, и то с гомотопией, закрепленной в конечных точках интервала. В точках множества $[0, 1] \setminus \bigcup\limits_{i=1}^{p}(\alpha_i, \beta_i)$ определим гомотопию тождественно. Получим гомотопию, деформирующую φ до отображения ψ, не принимающего значения в центрах шаров $\left\{D^3 \times \frac{1}{k}\right\}_{k=1}^{\infty}$ и притом закрепленной в точках $x = 0$ и $x = 1$. И так $\psi(x) \in A_2 \setminus \bigcup\limits_{k=1}^{\infty}\left(\mathbf{0}_3 \times \frac{1}{k}\right)$. Множество C является строгим деформацион-

ным ретрактом множества $A_2 \setminus \bigcup_{k=1}^{\infty}\left(0_3 \times \frac{1}{k}\right)$. Следовательно ψ можно прогомотопировать до отображения, принимающего значения только на C и то так, что гомотопия была бы закрепленной в точках $x=0$ и $x=1$.

В результате мы получаем гомотопию $F: I^2 \to A_2$, для которой $F(x, 0)=\varphi(x)$, $F(x, 1) \in C$, $F(0, t)=\varphi(0)$, $F(1, t)=\varphi(1)$. Этим 1-связность пространства A_2 доказана.

Насчет доказательства локальной 1-связности остаются в силе замечания в доказательстве леммы (см. 5).

Из теоремы 3 в нашей работе [4] следует, что A_2 не уплотняется на бикомпакт.

Доказательство теоремы закончено.

ЛИТЕРАТУРА

1. Смирнов, Ю. М.: Уплотнения на бикомпакты и связь с бикомпактными расширениями и с ретракцией. Fund. Math., 63 (1968), 199—211.
2. Ху Сы-Цзян: Теория гомотопий. Москва, 1964.
3. Стинрод, Н., Эйленберг, С.: Основания алгебрической топологии. Москва, 1958.
4. Хаджииванов, Н. Г.: О продолжении отображений в сферу. Год. на Соф. унив., Мат. фак., 64 (1969/70), 1—6.

Постъпила на 24. II. 1970 г.

SUR LES APPLICATIONS BIJECTIVES ET CONTINUES SUR DES BICOMPACTS

N. G. Hadjiivanov

(RÉSUMÉ)

Dans cet article on construit un exemple d'un sous-ensemble d'un espace euclidien à quatre dimensions qui est complet par rapport à un métrique, qui est la somme d'une suite dénombrable de compacts et est 1-connexe et localement 1-connexe, mais qui ne s'applique pas de façon bijective et continue sur aucun bicompact.

Cet exemple est la solution d'un problème de P. S. Alexandrov et U. M. Smirnov.