ЕДИН НАЧИН ЗА ПРЕПОДАВАНЕ НА ТЕОРИЯТА НА РЕАЛНИТЕ ЧИСЛА В СРЕДНИТЕ УЧИЛИЩА

Димитричка Шопова

I. Постановка на въпроса

В училищната практика стабилно се следва историческият ход на развитието на понятието число. Първо се работи с естествените числа и нулата. После тяхното множество се разширява до множеството на дробните неотрицателни числа, след това — до множеството на рационалните числа и най-сетне — до множеството на реалните числа. Така че точното заглавие на темата „реални числа" в средните училища е: разширяване множеството на рационалните числа до множеството на реалните. Това разширяване за разлика от предишните е свързано с качествено нови трудности. Новите числа — ирационалните, които се въвеждат при него, и действията с тях не са резултат на непосредствена човешка практика, а на абстрактен логически анализ. По същността си този материал далеч не е елементарен и е получил завършено математическо оформяване едва през XIX в. в работите на Дедикинд и Кантор [3, 4]. Същевременно обаче без въвеждането на реалните числа не може да се изучават най-основни в математиката и близки до живота и практиката теми, като решаване на уравнения от втора и по-висока степен, измерване на отсечки и пр. Да се изостави тази тема от програмата за средните училища е невъзможно.

Така възниква един от големите проблеми в методиката на преподаването на математиката. С него са се занимавали и се занимават най-сериозно много математици [1, 2, 5, 6, 8, 9, 11, 12].

В същност безспорно е, че едно що-годе изчерпателно излагане на разширяването множеството на рационалните числа до множеството на реалните в средните училища изисква твърде много учебно време. Затова в училища, в които не се дава превес на математиката спрямо другите учебни дисциплини, такова изложение не е целесъобразно. Поради това се стига до практиката в такива училища въвеждането на ирационалните числа да се извършва бегло. С това обаче проблемът не се решава. Че това е така, свидетелстват незадоволителните резултати от обучението по този материал. Те се потвърждават и от анкетите, проведени от нас преди започване на обучението в университета със студенти от I курс математика, производствен профил. В

самия учебник по алгебра [10], по който тези студенти са се готвили като ученици, по въпроса са допуснати сериозни недостатъци от логическо естество. Така от стр. 3 до стр. 13 се употребяват нашироко символи от вида $\sqrt{3}$, $\sqrt{7}$ и пр., пресмятат се техни приблизителни стойности, а чак на стр. 13 се дава „Понятие за ирационално число". Но преди въвеждането на ирационални числа уравненията $x^2=3$, $x^2=7$ и пр. нямат решение, т. е. символите $\sqrt{3}$, $\sqrt{7}$ нямат смисъл. На много места в урока „Понятие за ирационално число" смисълът на твърденията не е ясен. Така като обосновка на твърдението, че $\sqrt{2}$ е ирационално число, се дава равенството $\sqrt{2}=1{,}4142\ldots$ (стр. 14, ред. 15—19 отгоре). Но никъде не е изяснено как е дефиниран изразът 1,4142. . . и защо това не е периодична дроб.

Изобщо досега не е намерен задоволителен общопризнат начин за въвеждането на ирационалните числа в средните училища.

Обаче проблемът, който ни интересува в случая, е по-ограничен. Интересува ни преподаването на темата „Разширяване множеството на рационалните числа до множеството на реалните" за ученици със засилен интерес към математиката в училища, където се отделя повече време за изучаване на математика.

Начало на изработването на нашата система за преподаване на темата „реални числа" бе поставено през 1964 год., когато беше сформиран към Математическия факултет на Софийския университет един девети клас. Това е началото на сега действуващата национална математическа гимназия, в която преподаватели от Математическия факултет водят обучението по математика. Програмата по алгебра за тази гимназия започва с темата „реални числа". От постановката на този въпрос до голяма степен зависи стилът на работата по математика там, както и съдържанието ѝ.

С разработването на най-подходящ начин за излагане на тази тема се зае катедрата по диференциално и интегрално смятане. Първоначалната система беше изработена от проф. Я. Тагамлицки и доц. Д. Скордев. През 1965/66 год. тя беше използувана от ст. ас. при катедрата по висша алгебра Д. Димитров, а през 1966/67 год. от мл. н. сътр. към БАН Ив. Байчев. От 1966/67 уч. год. преподаването по алгебра в IX клас беше поето от мен. Тогава отново беше обмислен методът за преподаване на „реални числа" и по предложение на доц. Д. Скордев бяха въведени редица основни изменения. По-нататък в процеса на работата се оформи една стабилна система за разработване в гимназиите на темата „реални числа" и свързаните с нея въпроси. Изложение на тази разработка под заглавие „Реални числа" с автори Д. Шопова и Д. Скордев е под печат в издателство „Народна просвета".

II. Основни положения в нашата система за излагане темата „Реални числа“ за ученици

Основните положения, прокарани в нашата система, са следните:

Реалните числа се дефинират като „безкрайни десетични дроби“, по-точно като символи от вида

$$N+\frac{a_1}{10}+\frac{a_2}{10^2}+\ldots+\frac{a_n}{10^n}+\ldots,$$

където N е цяло число, $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ са числа измежду числата 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.

Дефинирането на понятието „реално число“ като безкрайна десетична дроб е почти общоприето в средните училища. Наистина има и отклонения. Така в твърде известния курс [7] на Fr. Papy реалните числа се въвеждат като безкрайни двоични дроби (стр. 30—35). Наистина този начин има и своите удобства. Обаче популярността на използването на безкрайните десетични дроби не е случайна. Тя се базира на най-силния аргумент — близостта му до практиката. Десетичните дроби, десетичните приближения се използват повсеместно. При това учениците разполагат с една много ценна за случая пропедевтика — безкрайните периодични десетични дроби. Чрез него крачката към понятието „безкрайна десетична дроб“ е съвсем естествена и удобна.

Особеното в нашата дефиниция на понятието „реално число“ е, че числата $a_1, a_2, \ldots$ се вземат цели неотрицателни, докато при общоприетата в средните училища дефиниция за реално число те имат знака на N. Това различие идва от основното различие между целите, които си поставят съответните разработки. Едната има за цел да въведе възможно по-просто и кратко реалните числа, без да засяга много проблеми, които влече след себе си това въвеждане. Другата разработка си поставя за задача да акцентира тъкмо на тези проблеми, да разгледа изчерпателно разрешението на някои от тях, а разрешението на останалите да е лесно реализуемо.

В същност трудностите в преподаването на темата „реални числа“ в средните училища не са при въвеждането на понятието реално (респективно ирационално) число, а при построяването аритметиката на реалните числа. В нашата система изграждането на тази аритметика става по метод, близък до метода на Кантор — с редици от рационални числа. Тук обаче не се работи явно с използваните от него „класи редици от рационални числа“. Вместо това се въвежда понятието „еквивалентни редици от рационални числа“ и се доказва, че тази еквивалентност има свойствата на равенство. За целта първо се дава дефиниция кога една редица от рационални числа клони към рационално число. Еквивалентни редици се дефинират като такива, за които редицата от разликите на едноименните им членове клони към нула. Като основен представител на едно реално число

$$\alpha = N + \frac{a_1}{10} + \ldots + \frac{a_n}{10^n} + \ldots$$

се използува редицата с общ член

$$(\alpha)_n = N + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \ldots + \frac{a_n}{10^n},$$

наречен n-та частична дроб на α. Така две числа се наричат равни, ако редиците от частичните им дроби са еквивалентни. Редица от рационални числа се счита, че клони към реално число, ако е еквивалентна на редицата от частичните му дроби. Положително се нарича такова реално число, което има положителна частична дроб. Сбор (респ. произведение) на две реални числа се нарича границата на редицата, получена с почленно събиране (умножение) на редиците от частичните им дроби, и прочее.

Причината да възприемем казаната дефиниция за реално число е, че при нея редицата от частични дроби на всяко реално число е монотонно растяща. Това дава възможност за общо разрешаване на много проблеми. Основна в нашия метод на изложение се явява теоремата: всяка монотонно растяща и ограничена редица от крайни десетични дроби има граница в множеството на реалните числа. С нея лесно се обосновава, че всеки две реални числа имат сбор и произведение. Същата се използува и за установяване съществуването на решение на уравнението $\alpha x = \beta$ $(\alpha \neq 0)$ при дефиниране на частно от реални числа.

Доказателството, което даваме на тази теорема, се състои в следното:

Нека

(1) $$\delta_1, \delta_2, \ldots \delta_n, \ldots$$

е монотонно растяща редица от крайни десетични дроби с горна граница рационалното число δ.

За крайните десетични дроби сме възприели записването

$$N + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \ldots + \frac{a_p}{10^p},$$

където N е цяло число, а $a_1, a_2, \ldots, a_p$ са цели неотрицателни числа от 0 до 9. Затова всяка десетична дроб не е по-малка от цялата си част. От това следва, че δ е горна граница и на редицата от целите части на числата (1). Но щом едно множество от цели числа е ограничено отгоре, то в него има най-голямо число N_0 (тази теорема се доказва, когато се прави преговор на рационални числа). От друга страна, редицата от целите части на (1) е монотонно растяща. И наистина, щом

$$a = N + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \ldots + \frac{a_p}{10^p} \leq N' + \frac{b_1}{10} + \frac{b_2}{10^2} + \ldots + \frac{b_q}{10^q},$$

то

$$N \leqq a < N' + 1,$$

т. е.

$$N < N' + 1,$$

и оттам

$$N + 1 \leqq N' + 1$$

(такава теорема за целите числа е доказана при същия преговор). Тъй че

$$N \leqq N'.$$

Тогава, ако числото N_0 стои на k-то място в редицата от целите части на (1), то всички нейни членове от k-тия нататък са равни на N_0.

След това вземаме редицата от първите цифри в дробната част на (1). Тя е монотонна растяща поне от k-тия член нататък. И наистина от

$$N_0 + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \ldots + \frac{a_p}{10^p} \leqq N_0 + \frac{b_1}{10} + \frac{b_2}{10^2} + \ldots + \frac{b_q}{10^q}$$

следва

$$a_1 + \frac{a_2}{10} + \ldots + \frac{a_p}{10^{p-1}} \leqq b_1 + \frac{b_2}{10} + \ldots + \frac{b_q}{10^{q-1}},$$

а оттам и

$$a_1 \leqq b_1.$$

Понеже тази редица е ограничена (горна граница е 9), то и нейните членове от известен номер нататък ще са равни на едно и също цяло неотрицателно число $c_1 \leqq 9$.

На същото основание и редицата от вторите цифри в дробните части на числата (1) от известно място нататък ще се състои от равни числа и т. н.

По този начин се дефинира едно реално число

$$\alpha = N_0 + \frac{c_1}{10} + \frac{c_2}{10^2} + \ldots,$$

което е търсената граница. И наистина по дефиниция редицата (1) да клони към α ще рече тя да е еквивалентна на редицата от частичните дроби на α, т. е. редицата с общ член $(\alpha)_n - \delta_n$ да клони към 0. А това е очевидно изпълнено.

Целесъобразността на използувания от нас метод за излагане темата „реални числа“ за ученици се подкрепя между другото и от факта, че той се оказа доста близък в известно отношение до идеите на акад. А. И. Маркушевич, изложени в негови лекции по въпроса [6].

Едно от съществените различия на нашата система от тези идеи се отнася за безкрайните десетични дроби, на които цифрите от известно място нататък са деветки. А. И. Маркушевич, както и П. С. Алек-

сандров и А. Н. Колмогоров в статията си [1] възприемат становището въпросните безкрайни десетични дроби да не се считат за реални числа, докато ние не ги изключваме от множеството на числата. Съображенията, поради които те възприемат това изкуствено ограничение, са да се освободят от равенства от вида $0,(9)=1,(0)$, тъй че цифрите на всеки две равни числа да съвпадат. Нашето предпочитание пък е с оглед не само да избегнем това неестествено ограничение на понятието „реално число", но и да избегнем неприятните усложнения, до които то би довело при изработване аритметиката на реалните числа и доказателствата на основните свойства в нея. Освен това на базата на този конкретен материал учениците имат възможност да се запознаят с релация за еквивалентност между обекти, които не съвпадат. Това, разбира се, е подходящо само когато се отделя достатъчно време за изучаване на тази тема, докато становището на съветските математици се отнася за масовите училища.

III. Методическа разработка

Описаната система за преподаване на „реални числа" беше прилагана от мен в продължение на 4 години. В резултат се оформи една добре изпробвана в практиката нейна методическа разработка. Тя се базира на обичайните за средното училище методи. Материалът се разработва с максимално участие и активност от страна на учениците. Затвърдява се чрез системно преговаряне и изпитване. Лекционен метод не се използува.

Разработката на отдела „реални числа" се започва с обширна подготовка от около 20 учебни часа. В нея се прави преговор на ученото за числата в предходните класове, като тези знания се уточняват, систематизират се и се допълват с нужните за предстоящата работа елементи.

Известна представа за съдържанието на тази подготовка може да се добие от заглавията на уроците, чрез които приблизително тя е провеждана:

1. Множеството N на естествените числа и нулата: основни понятия и аксиоми в него, геометрично представяне, дефиниция за наредба, разлика и частно (1—2 часа).

Тук се дава идея как може да се изградят логически познатите на учениците свойства на тези числа.

2. Метод на математическата индукция (3—4 часа).

Отначало методът се изяснява и използва, без да се свързва с аксиомите. Накрая се формулира принципът на математическата индукция и ако силите на учениците позволят, се доказва чрез аксиомата, че 1 е най-малкото естествено число.

3. Множеството на дробните числа: необходимост от разширение множеството N; дефиниция на дробно число; включване на N в

множеството D на дробните числа; геометрично представяне на дробните числа; дефиниция на равенство в D и проверка на основните свойства на равенството; доказателство, че в D има и нови числа; дефиниция на сбор в D и проверка на основните свойства на сбора; наредба в D; дефиниция на разлика в D; дефиниция на произведение в D и проверка на основните му свойства; дефиниция на частно в D и доказване на затвореността на D относно действието деление (около 3 часа).

Тук се акцентира върху проблемите, които възникват при разширяване множеството на числата, както и върху доказателството за съществуване и единственост на частно в D.

4. Множество на рационалните числа (2 часа).

Разработката става в стила на предходния урок. Целта е да се осъзнаят добре проблемите, които трябва да се разрешават при всяко разширяване множеството на числата.

5. Дефиниция на степен с показател 0. Доказателство на свойството: ако x и y са цели числа и $x<y$, то $x+1\leqq y$, и на тъждеството $(x-y)(x^{n-1}+x^{n-2}y+\ldots+y^{n-1})=x^n-y^n$ (2 часа).

6. Крайни десетични дроби: въвеждане термина „десетична дроб от n-ти ред“ за числа от вида $N+\frac{a_2}{10}+\frac{a_2}{10^2}+\ldots+\frac{a_n}{10^n}$, където N е цяло число, $a_1, a_2, \ldots, a_n$ са числа измежду 0, 1, . . . , 9; упражняване в записване на отрицателни десетични дроби в такъв вид; доказване на теоремата: всяко ограничено отгоре множество от десетични дроби от един и същи ред съдържа най-голямо число (2 часа).

7. Представяне рационалните числа като десетични дроби: редици от десетични приближения с недостиг и с излишък на рационално число; безкрайни десетични периодични дроби (1 час).

8. Редици от рационални числа, които клонят към рационално число. Теореми за редици, получени с почленно събиране, изваждане и умножение на такива редици, теорема за умножение на ограничена редица с редица, клоняща към 0 (2 часа).

За изясняване на това важно понятие се вземат много примери главно от десетични приближения на рационално число с оглед пряката цел, за която е нужен в случая този апарат.

9. Еквивалентни редици; доказателство, че тази еквивалентност има свойствата на равенството (2 часа).

И това понятие се въвежда и конкретизира на базата на редици от десетични приближения на рационални числа.

10. Действие коренуване в множеството на рационалните числа (2 часа).

Корен n-ти от неотрицателно число a се дефинира като неотрицателно решение на уравнението $x^n=a$. Доказва се единственост на това решение. Вземат се много примери с корени, които съществуват в множеството на рационалните числа.

За въвеждането на реалните числа и изграждането на тяхната аритметика се отделят също около 20 часа, обхващащи примерно следните уроци:

1. Необходимост от разширяване множеството на рационалните числа и подготовка на понятието реално число (1 час).

В този урок се доказва, че уравнението $x^2=2$ няма решение рационално число, и се изтъква необходимостта от разширяване множеството на рационалните числа. Търсят се десетични дроби от ред 1, 2, 3. . . такива, че квадратите им да се различават най-малко от 2. Те се подреждат в две редици — едните с квадрат, по-малък от 2, а другите — по-голям от 2.

2. Дефиниция на реално число. Дефиниция кога една редица от рационални числа клони към реално число. Равенство между рационално и реално число (1 час).

Тук се припомнят проблемите, които предстоят да се разрешават при разширяване множеството на числата.

3. Равенство между реални числа (1 час).

Освен на свойствата на равенството в множеството на реалните числа тук се обръща сериозно внимание на равенства от вида

$$0,(9)=1,(0); \quad 1,(9)=0,(0); \quad 2,1(9)=2,2(0) \text{ и пр.}$$

4. Дефиниция на дължина на отсечка. Геометрично представяне на реалните числа. Взаимно еднозначно съответствие между множеството на реалните числа и точките на числовата ос (2 часа).

5. Всяка монотонно растяща редица от крайни десетични дроби има граница (1 час).

6. Сбор от реални числа: определение на сбор; доказателство, че всеки две реални числа имат сбор; доказателство на основните закони за сбор от числа (2 часа).

7. Разлика на реални числа: дефиниция на противоположно число на дадено реално число; дефиниция за разликата $a-b$ като решение на уравнението $a=b+x$ (с доказателство на единственост и съществуване на такова) (2—3 часа).

8. Положителни и отрицателни реални числа: определение на положително число и следствие от него. Определение за отрицателно число. Доказателство на теоремата: ако $a\neq 0$, то само едно от числата a и $-a$ е положително. Определение на абсолютна стойност на реално число. Доказателство, че необходимо и достатъчно условие едно реално число да е положително, е да съществува редица от рационални числа, клоняща към него, в която безройно много членове са по-големи от фиксирано положително число. Доказателство, че сборът на две положителни числа е положително число (2—3 часа).

9. Наредба на реалните числа: определение. Транзитивност на неравенството. Неравенствата $(\alpha)_n \leqq \alpha \leqq (\alpha)_n + \frac{1}{10^n}$. Доказателство, че не-

обходимо и достатъчно условие за $\alpha > \beta$ е да съществува частична дроб на α, която да е по-голяма от някоя увеличена частична дроб на β (2—3 часа).

10. Умножение на реални числа: определение; доказателство, че ако $a = b$ и ac съществува, то съществува и bc и $bc = ac$.

Съществуването на произведение на всеки две реални числа се установява последователно: след установяване съществуването на $a.0$ се доказва съществуване на ab, ако a и b са положителни. За останалите случаи се използва теоремата: ако ab съществува, то съществува и $(-a)b$ и е равно на $-(ab)$. Установява се и валидността на комутативния, асоциативния и дистрибутивния закон, както и почленното умножение на равенства (2—3 часа).

11. Ирационални числа: доказателство, че дефинираното в точка 1. реално число $\alpha = 1{,}4142\ldots$ е решение на уравнението $x^2 = 2$. Въвеждане на означението $\sqrt{2}$. Дефиниция на ирационално число (1 час).

12. Идея за частно на реални числа: определение на частното $a : b$ от реални числа като решение на уравнението $a = bx$. Изясняване чрез пример на начина, по който се образува монотонно растяща и ограничена редица от крайни десетични дроби, която клони към търсеното решение (1 час).

Понеже вече методите са изяснени, въпросът не се разработва изчерпателно и общо.

13. Съществуване на корен n-ти от неотрицателно число (1 час).

Въпросът се разглежда изчерпателно, защото това е една от целите, която е поставена при разширяване множеството на рационалните числа до множеството на реалните.

След това се изтъква, че тъй като за реалните числа са валидни редица основни свойства на рационалните числа, валидни са и следствията, които произтичат от тези свойства. Това ни освобождава от необходимостта да се занимаваме с тези следствия.

По-нататък се продължава с обичайния материал за действие коренуване и действия с радикали.

IV. Резултати от прилагането

Описаният начин за развиване темата „реални числа“ се прилага, както вече споменахме, 4 години в IX клас на националната математическа гимназия в София. Учениците на тази гимназия се набират с конкурсен изпит по математика измежду завършилите VIII клас кандидати. Обаче било че гимназията още не е много популярна, било че системата на конкурсните изпити не е много съвършена, досега повечето ученици в тази гимназия се оказват старателни, с желание да се учат, но не и с ярко изразени математически способности. Някои от тях получават едва задоволителни оценки по математика даже и върху обичаен за всички гимназии материал. Затова резултатите, получавани

от преподаването в тези класове, могат да се считат постижими и в обикновени гимназии, стига да има достатъчно учебно време и желание от страна на учениците, напр. в кръжоци, школи, на факултативни занятия.

Програмата по алгебра за IX клас в тази гимназия обхваща следния материал: през I учебен срок се изучават „реални числа“ и действие коренуване — с 3 часа седмично. През II учебен срок с 4 часа седмично се учи обичайният материал за действия с радикали, квадратни уравнения и неравенства, биквадратни и ирационални уравнения и системи от втора степен, допълнен с деление на полиноми на една променлива, отстраняване известен корен от уравнение и някои свойства на рационалните корени на уравнение с цели коефициенти. През третия срок се взема материалът за граници на редици от реални числа: определение; действия със сходящи редици; сходимост на монотонни редици; теорема на Кантор и принцип за непрекъснатост на множеството на реалните числа; точка на сгъстяване на редици; теорема на Болцано-Вайерщрас; принцип за компактност.

В следната таблица е даден успехът по алгебра и геометрия на тези девети класове, получен при прилагане на описаната система за преподаване на темата „реални числа“: (вж. стр. 11).

Класът IX^{л} през 1968/69 учебна година беше образуван от кандидати, класирали се на конкурсния изпит с по-нисък бал от тези на IX^{к}. В IX^{к} алгебра преподавах аз, а в IX^{л} — учителката Александрина Цветкова, която се ръководеше от същата програма и мои материали. Оценките по геометрия са приведени за добиване по-пълна представа за нивото на учениците. (Обучението по геометрия е водено от други преподаватели от Математическия факултет с изключение на IX^{л} клас, където и по геометрия преподавател беше А. Цветкова).

При преценка на резултатите, дадени в тази таблица, трябва да се има пред вид, че учениците не са разполагали с писмена разработка на материала, който учат по математика. Обаче докато по всички други въпроси тази липса можеше да се компенсира (макар и само отчасти) с ползване на литература, то при нашата разработка на реални числа на учениците не можеше да се препоръча да ползват никакво писмено помагало.

Освен това всяко обучение, доколкото изпълнява педагогическото си предназначение, благоприятствува развитието на учащите се. Затова по възможност материалът трябва да се подрежда по растяща трудност. В случая обаче този принцип не може да се спазва. Материалът по алгебра, изучаван през втория срок, е от по-елементарно естество, отколкото реалните числа, изучавани през първия срок.

Като се има пред вид всичко това, данните, дадени в таблицата, показват, че нашата система за разработка на реални числа се явява напълно достъпна за ученици от тази възраст. При това резултатите от това обучение са тъй многостранни, че данните за оценките са съвсем недостатъчни, за да се получи една що-годе ясна представа за тях.

Учеб. год.	Учеб. срок	Оценки по алгебра 2	3	4	5	6	Сред. усп.	Оценки по геометрия 2	3	4	5	6	Сред усп.
1966/67	I	—	6	11	6	2	4,16	—	—	8	17	—	4,68
	II	—	4	13	3	4	4,46	—	2	8	10	3	4,61
	III	—	1	6	13	3	4,78	—	—	9	9	5	4,83
1967/68	I	—	12	9	14	2	4,16	—	6	16	15	—	4,24
	II	—	5	20	10	2	4,24	—	5	16	12	4	4,41
	III	—	2	17	12	6	4,59	—	4	12	14	7	4,65
1968/69 IX[к] кл.	I	—	8	10	8	1	4,07	—	5	12	10	—	4,19
	II	—	1	16	9	1	4,37	—	2	11	12	2	4,52
	III	—	—	13	13	1	4,56	—	3	9	13	2	4,52
1968/69 IX[л] кл.	I	—	8	11	9	—	4,04	—	9	15	5	—	3,86
	II	—	3	12	8	3	4,42	—	4	14	7	2	4,26
	III	—	1	10	10	5	4,73	—	2	12	2	4	4.40
1969/70 IX[а] кл.	I	—	7	16	8	2	4,15	—	3	19	8	3	4,33
1969/70 IX[б] кл.	I	—	2	12	9	2	4,84	—	—	4	17	4	5,00

Прилаганата от нас система за излагане отдела „реални числа“ не е изградена самоцелно. Чрез нея се цели не само да се дадат знания относно реалните числа. До IX клас по възприетия у нас начин на обучаване по алгебра нищо не се доказва. За аксиоми и теореми там никъде не става дума. Обучавани по алгебра в такъв дух, учениците добиват стабилен навик да не виждат проблемите и нуждата от логическа обосновка в материала, изучаван в предмета „алгебра“ до края на гимназиалния курс. И това е лесно обяснимо. Щом по „алгебра“ се приема да се обосновават истините, както в естествените науки — индуктивно, щом никъде не е ставало дума за аксиоми, не е ясно кога ще се искат логически обосновки и кога ще се приемат индуктивни такива. Не са определени методите, които се допускат за установяване на истините в предмета, не е определена базата, от която се тръгва за логическото му изграждане.

Чрез преговора, провеждан в началото на IX клас за подготовка на темата „реални числа“ при нашата система, без да се стига до подробно и скучно формализиране, знанията на учениците за числата се поставят на ясни логически основи. Дългото съсредоточаване на вниманието върху предимно теоретичния материал от отдела „реални числа“ се оказва добро средство за ликвидиране на утвърдения у учениците навик да не се замислят върху логическата страна на изучаваното в дисциплината „алгебра“. Чрез него се провежда едно продължително и системно обучение на учениците в математическо ми-

слене и математическо изграждане на материала. А в една математическа гимназия такъв завой към логическо изграждане знанията по „алгебра“ е наложителен.

И трябва да се отбележи, че този процес не протича гладко и леко. Макар че повечето от провежданите доказателства са съвсем прости и естествени, отначало те затрудняват учениците. Оказва се, че е нужно системно и продължително обучение, за да станат привични доказателствата извън геометрията. Затова и ефектът е голям. Интелектуалното и математическо развитие, което се реализира в резултат на това обучение, е очебийно в болшинството случаи.

Чрез разработката на темата „реални числа“ по нашата система се реализира и друг не по-маловажен образователен ефект. Известно е, че понятието „граница“ на редица, на функция е фундаментално в повечето клонове на математиката. Без него не може да се мине дори и при най-съкратените програми по математика за средните училища. Същевременно то затруднява не само учениците, но и повечето студенти. За усвояването на едно по-сложно понятие от решаващо значение се явява подготовката му, натрупването на конкретен материал, на който то се явява обобщение, както и продължителното използване на този материал. Такава подготвителна роля на понятието граница може предварително да се очаква, че ще изиграе изучаването на темата реални числа по нашата система. При нея реалните числа се разглеждат като граници на конкретни редици — редиците от частичните и увеличените частични дроби. Това е естествено продължение на опита, който учениците имат във връзка с десетичните приближения на рационалните числа. Тук понятието граница на редица се явява необходимо и оправдано от самата практика — смятането с реални числа. При това то естествено се свързва с геометрични нагледи — образите на частичните и увеличените частични дроби и на реалните числа върху числовата ос, а също и с процеса на измерване на отсечка. Продължителното използване на тези конкретни числови редици при разработката на реални числа създава една здрава база от представи, върху която по-нататък лесно се изгражда общото понятие граница на редица и на функция.

Очакванията в това отношение напълно се потвърждават от практиката. След школата на „реални числа“ в края на IX клас теорията на граници на редици от реални числа се оказва изненадващо достъпна за учениците. Това се вижда и от данните на таблицата за успеха на тези ученици. Цифровият успех за третия срок е чувствително по-висок от този на първите два срока.

За потвърждаване на тези резултати ще приведа още някои числови данни: на контролни работи в края на IX клас обучаваните по нашата система ученици най-малко грешки допускат върху материала за граници на редици. На такава контролна работа през последната (1969) година от всичко 27 ученици само един прави съществена грешка в определението за граница, а с използването на това опреде-

ление за доказване, че дадена редица клони към дадено число, само 4 от тях не се справят. Дори и при използването на същата дефиниция за обосновка, че дадена редица не е сходяща, 14 се справят добре, а 13 — отчасти.

Сведения за трайността на понятието „граница", получено в резултат на това обучение, дават и следните анкети. В началото на първия час по алгебра в X клас обучаваните по нашата система ученици трябваше, без да са предупредени предварително, да отговорят за 5—10 минути анонимно на три въпроса, един от които беше дефиницията на понятието „граница на редица от числа". Оказва се, че и трите години почти всички тези ученици три месеца след занятията знаят добре това понятие. При това формулировката, която дават, не е една и съща, често тя не е гладка и добре оформена езиково, но смисълът на понятието е предаден. С други думи, личи, че не се касае за здраво заустен текст, а за наистина усвоено понятие.

Числовите данни от тези анкети са следните: 1967 год. — от 23 ученици 19 са дали верен отговор, 4 — със съществени грешки; 1969 год. — $X^к$ клас — от 27 ученици 20 отговарят вярно, 7 — с грешки; 1969 год. — $X^л$ клас — от 22 ученици 14 отговарят вярно, 4 — с грешки и 4 не са отговорили.*)

При аналогична анкета в началото на XI клас — 1969 год., от 29 ученици 23 дават верен отговор, 5 с грешки и 1 не отговаря.

За сравнение бяха направени анкети от същия вид и в обикновени класове. Понеже граници на редици там се учат в X клас, анкети са правени в началото на XI клас:

1968 год. — от 23 ученици никой не дава верен отговор (13 правят съществени грешки и 10 не отговарят).

1969 год. — от 21 ученици 3 дават верен отговор, 13 с грешки, 5 не отговарят.

Със същата цел такива анкети бяха направени с новоприети студенти от I курс математика, производствен профил. Резултатите са следните:

1968 год. — от всичко 124 студенти 54 дават верен отговор, 32 със съществени грешки, 38 дават съвсем погрешен отговор или не отговарят.

1969 год. — от 55 студенти 26 дават верен отговор, 17 допускат съществени грешки, 12 не отговарят.

При това трябва да се има пред вид, че това са студенти по математика, т. е. младежи, завършили гимназия с достатъчно висок успех, избрали да следват тъкмо математика и показали преди два месеца достатъчно висок успех на писмен и устен конкурсен изпит по математика.

*) Тук въпросът за граница беше поставен последен и някои не са имали време да отговорят.

Заключение

Всичко гореизложено показва, че разработката на темата „реални числа“ по описаната система се оказва резултатна и целесъобразна и с оглед даване на математически знания, и с оглед развиване на математическото мислене и общото интелектуално израстване на учениците. А изобщо гимназиалният период на обучение по математика има възможността да култивира навици, методи на мислене, да изгражда постепенно и системно понятия, каквито висшето учебно заведение няма. Има елементи на математическо изграждане, които, ако не се реализират в средното училище, висшето не може да попълни. Описаният метод за разработка на темата „реални числа“ претендира, че използва рационално тъкмо тези специфични възможности на средното училище.

Наистина нашата система за преподаване на темата „реални числа“ е приложима за твърде малко гимназии. Обаче от този експеримент може да се извлече полза и за масовите средни училища. Разработката изцяло може да се използва в извънкласни занимания — математически школи, кръжоци, семинари, факултативни занятия.

ЛИТЕРАТУРА

1. Александров, П. С., Колмогоров, А. Н.: Иррациональные числа. Мат. в школе, 1941, 3, 3—8.
2. Галетов, И. Г.: К вопросу об изучении иррациональных чисел в школе. Мат. в школе, 1957, 3, 11—14.
3. Dedekind, R.: Stetigkeit und irrationale Zahlen. 1912.
4. Cantor, G.: Ueber die Ausdehnung eines Satzes aus der Theorie der trigonometrischen Reihen. Math. Ann. 5 (1872). 123—129.
5. Лебег, А.: Об измерении величин. Москва, 1960.
6. Маркушевич, А. И.: Действительные числа и основные принципы теории пределов. Москва, 1948.
7. Рару, F.: Mathématique moderne, 1967, 6.
8. Рупасов, К. А.: К вопросу о школьном изложении теории иррациональных чисел. Мат. в школе, 1957, 3, 5—10.
9. Хинчин, А. Я.: Восемь лекции по математическому анализу, Москва, 1948.
10. Цървенков, В., Николов, Ал., Павлов, Н.: Алгебра за IX клас. София, 1966.
11. Шварцбурд, С. И., Монахов, В. М., Ашкинузе, В. Г.: Обучение в математических школах. Москва, 1965.
12. Из методических указаний американской комисии по преподаванию математики. Мат. в школе, 1962, 5. 76—81.
13. Goodstein, R. L.: Fundamental Concepts of Mathematics. London, 1962.

Постъпила на 14. IV. 1970 г.

UNE MÉTHODE D'ENSEIGNER LA THÉORIE DES NOMBRES RÉELS DANS L'ÉCOLE SECONDAIRE

D. Chopova

(RÉSUMÉ)

Dans ce travail nous proposons une méthode d'enseigner la théorie des nombres réels qui a été employée pendant quatre ans en 9-ème classe au gymnase mathématique de la Faculté des mathématiques de Sofia. Cette méthode est accessible pour les élèves et mathématiquement elle est correcte.

Dans cette méthode on définit les nombres réels comme des fractions décimales infinies, plus exactement comme des symboles de la forme

$$N+\frac{a_1}{10}+\frac{a_2}{10^2}+\ldots+\frac{a_n}{10^n}+\ldots$$

où N est un entier, $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ sont parmi les nombres 0, 1, 2... 9. On définit les relations „égalité" et „inégalité", ainsi que les opérations arithmétiques entre les nombres réels d'une manière qui est proche de la méthode de Cantor — en utilisant des suites de nombres rationnels. Dans ce but, on considère d'abord des suites de nombres rationnels à limite rationnelle. On introduit ensuite la notion de l'équivalence entre les suites de nombres rationnels. Deux telles suites sont appelées équivalentes si la suite des différences de leurs membres correspondants tend vers zéro. On démontre que cette équivalence a les propriétés de l'égalité. On emploie le représentant principal du nombre réel

$$L=N+\frac{a_1}{10}+\ldots+\frac{a_n}{10^n}+\ldots$$

Il s'agit de la suite dont les éléments sont

$$(L)_n=N+\frac{a_1}{10}+\ldots+\frac{a_n}{10^n},$$

que nous appelons n-ième fraction partielle de L.

Ainsi, on dit que deux nombres réels sont égaux si les suites de leurs fractions partielles sont équivalentes. On dit qu'une suite de nombres rationnels tend vers un nombre réel si cette suite est équivalente à la suite des fractions partielles du nombre. On dit qu'un nombre réel est positif s'il a une fraction partielle positive. La somme (le produit) de deux nombres réels est la limite de la suite obtenue par l'addition (resp. la multiplication) des suites de fractions partielles correspondantes.

Il est clair que d'après cette définition la suite des fractions partielles de chaque nombre réel est croissante. Donc, le théorème suivant a un

rôle fondamental dans cette méthode: chaque suite bornée et monotone de fractions décimales finies a une limite. On en déduit l'existence de la somme et du produit de deux nombres réels arbitraires.

Pour introduire et exercer les nombres réels nous avons employé environ 20 heures de cours, contenant une examination d'une heure, beaucoup d'exemples et des travaux de contrôle.

Cette théorie fut précédée d'environ 20 heures, dans lesquelles on donna l'axiomatique des nombres entiers positifs suivant un sens proche de celui de Péano: on donne une idée sur la construction de la théorie des nombres rationnels, on résout des problèmes d'induction mathématiques, on fait un résumé sur les fractions décimales périodiques et finies.

Dans le présent travail nous donnons des renseignements sur les résultats obtenus qui montrent que cette matière est entièrement accessible au moins à la catégorie donnée d'élèves de 9-ème classe, qu'elle aide beaucoup pour leur évolution mathématique et qu'elle prépare l'assimilation de la théorie des limites.