ВЪРХУ НЯКОИ ОЦЕНКИ И АСИМПТОТИЧНИ ФОРМУЛИ ЗА ОПЕРАТОРИ В БЕЗКРАЕН ИНТЕРВАЛ

Васил М. Веселинов

В тази работа са получени оценки за степента на приближаване на някои класи ограничени функции с операторите на Фейер и Джексън — Вале-Пусен в безкраен интервал относно хаусдорфово разстояние. Установени са също така и някои асимптотични формули за обобщените оператори на Вайерщрас и Ландау.

§ 1

Оценки за операторите на Фейер и Джексън — Вале-Пусен

Най-напред ще въведем някои означения и определения.

С $r(f, g)$ ще означаваме хаусдорфовото разстояние между функциите $f(x)$ и $g(x)$, дефинирани и ограничени в интервала $(-\infty, \infty)$. (Определението и свойствата на хаусдорфовото разстояние между функции са дадени в обзорната статия на Бл. Сендов [1].)

Модул на немонотонност $\mu_f(\delta)$ на функцията $f(x)$ в интервала $(-\infty, \infty)$ се нарича числото

$$\mu_f(\delta)=\frac{1}{2}\sup_{|x_1-x_2|\leq\delta}\{\sup_{x_1\leq x\leq x_2}[|f(x_1)-f(x)|+|f(x_2)-f(x)|-|f(x_1)-f(x_2)|]\}.$$

Ще казваме, че функцията $f(x)$ е локално монотонна в интервала $(-\infty, \infty)$, ако е изпълнено условието $\lim_{\delta\to 0}\mu_f(\delta)=\mu_f(0)=O$ [1].

Ако $f(x)$ е равномерно непрекъсната върху цялата ос, то тя е локално монотонна, обаче има и прекъснати функции, които са локално монотонни в $(-\infty, \infty)$.

Да означим с H_μ съвкупността от локално монотонните в интервала $(-\infty, \infty)$ функции $f(x)$, за които $\sup_{-\infty<x<\infty}|f(x)|\leq H$ и $\mu_f(\delta)\leq\mu(\delta)$, където H е константа и $\mu(\delta)$ е монотонно ненамаляваща функция, за която $\lim_{\delta\to 0}\mu(\delta)=\mu(0)=O$.

Нека $K_n(t)$ е неотрицателно четно ядро със сумируем квадрат на $(-\infty, \infty)$, за което

$$\int_{-\infty}^{\infty}K_n(t)\,dt=1.$$

Да разгледаме линейния оператор

$$L_n(f;\ x)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x+t)\,K_n(t)\,dt,$$

дефиниран в съвкупността H_μ.

Ще използуваме следната теорема:

Теорема А. Нека $f(x)\in H_\mu$. Тогава за всяко $\delta>0$ е в сила неравенството

$$r(f,\ L_n(f))\leqq \max\left[\delta,\ \mu(4\,\delta)+4\,H\int_{\delta}^{\infty} K_n(t)\,dt\right]. \tag{1}$$

Тази теорема е аналог на общата теорема на Бл. Сендов и се доказва с метода, даден в [1] и [2].

За оператора на Фейер

$$F_n(f;\ x)=\frac{2}{n\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(x+t)\left(\frac{\sin\frac{nt}{2}}{t}\right)^2 dt$$

имаме

$$\int_{\delta}^{\infty} K_n(t)dt=\frac{2}{n\pi}\int_{\delta}^{\infty}\left(\frac{\sin\frac{nt}{2}}{t}\right)^2 dt\leqq\frac{2}{n\pi}\int_{\delta}^{\infty}\frac{dt}{t^2}=\frac{2}{\pi n\delta}. \tag{2}$$

От (1) и (2), като положим $\delta=\frac{1}{4}\,n^{-1/2}$, получаваме следната теорема:

Теорема 1. Нека $f(x)\in H_\mu$. Тогава е изпълнено неравенството

$$r(f,\ F_n(f))\leqq\mu(n^{-1/2})+\left(\frac{1}{4}+\frac{32\,H}{\pi}\right)n^{-1/2}.$$

Да означим с H_α съвкупността от функциите $f(x)\in H_\mu$, за които $\mu(\delta)\leqq M\delta^\alpha$, където M и α са константи, $M\geqq 0$, $0<\alpha\leqq 1$.

Теорема 2. Нека $f(x)\in H_\alpha$. Тогава е изпълнено неравенството

$$r(f,\ F_n(f))\leqq c_1 n^{-\frac{\alpha}{1+\alpha}},\ \text{където}\ c_1=\max\left[1{,}4\ M+\frac{8\,H}{\pi}\right]. \tag{3}$$

Доказателство. Теорема 2 следва от неравенствата (1) и (2), като положим $\delta=n^{-\frac{1}{1+\alpha}}$.

Оценката (3) не може да се подобри по отношение на порядъка, което е показано в [1] и [2].

Теореми 1 и 2 са доказани от Бл. Сендов ([1], [2]) в случая, когато функцията $f(x)$ е периодична с период 2π.

Да разгледаме сега оператора на Джексън — Вале-Пусен

$$I_n(f;\ x)=\frac{12}{\pi n^3}\int_{-\infty}^{\infty} f(x+t)\left(\frac{\sin\frac{nt}{2}}{t}\right)^4 dt.$$

Теорема 3. Нека $f(x)\in H_\mu$. Тогава е изпълнено неравенството

$$r(f,\ I_n(f))\leqq \mu(n^{-3/4})+\left(\frac{1}{4}+\frac{1024H}{\pi}\right)n^{-3/4}. \tag{4}$$

Доказателство. За ядрото на оператора $I_n(f;\ x)$ получаваме

$$\int_\delta^\infty K_n(t)\,dt=\frac{12}{\pi n^3}\int_\delta^\infty\left(\frac{\sin\frac{nt}{2}}{t}\right)^4 dt\leqq\frac{12}{\pi n^3}\int_\delta^\infty\frac{dt}{t^4}=\frac{4}{\pi n^3\delta^3}. \tag{5}$$

Като положим в (1) и (5) $\delta=\frac{1}{4}n^{-3/4}$, получаваме (4).

Теорема 4. Нека $f(x)\in H_\alpha$. Тогава е изпълнено неравенството

$$r(f,\ I_n(f))\leqq c_2\,n^{-\frac{3\alpha}{3+\alpha}},\ \text{където}\ \ c_2=\max\left[1{,}4\,M+\frac{16H}{\pi}\right]. \tag{6}$$

Доказателството на теорема 4 се получава от неравенствата (1) и (5) при $\delta=n^{-\frac{3}{3+\alpha}}$.

Оценката (6) е точка по отношение на порядъка. Това се вижда от следния пример. Да разгледаме 2π-периодичната функция $\varphi(x)$, дефинирана с

$$\varphi(x)=\begin{cases}1 & \text{за}\ -\pi\leqq x<0,\\ \left(\frac{x}{\pi}\right)^\alpha & \text{за}\ 0\leqq x\leqq\pi;\quad 0<\alpha\leqq 1.\end{cases}$$

В [2] е показано, че $\varphi(x)\in H_\alpha$. Може да се докаже, че съществува константа $c>0$, независеща от n, за която

$$r(\varphi,\ I_n(\varphi))\geqq c\,n^{-\frac{\alpha}{1+\alpha}}. \tag{7}$$

Доказателството на (7) е подобно на доказателството на теорема 6.4 от [2].

§ 2

Асимптотични формули за обобщените оператори на Вайерщрас и Ландау

Да разгледаме обобщения оператор на Вайерщрас

$$W_n[f(t);\, x] = \frac{s\, n^{1/s}}{2\,\Gamma(1/s)} \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, e^{-n|t-x|^s} dt, \quad s > 0.$$

Ще докажем следната

Теорема 5. Нека са изпълнени условията:

а) функцията $f(x)$ е измерима в интервала $(-\infty, \infty)$;

б) производната $f^{(2k)}(x)$ съществува във фиксирана точка $x \in (-\infty, \infty)$;

в) $|f(t)| \leqq A\, e^{a|t|^s}$ за всяко $t \in (-\infty, \infty)$, където M и a са константи.

Тогава е в сила формулата

$$\lim_{n\to\infty} n^{2k/s} \left\{ W_n[f(t);\, x] - \sum_{m=0}^{2k-1} \frac{f^{(m)}(x)}{m!} W_n[(t-x)^m;\, x] \right\} =$$

$$= \frac{\Gamma\left(\frac{2k+1}{s}\right)}{\Gamma(1/s)} \frac{f^{(2k)}(x)}{(2k)!}.$$

Доказателство: От условието б) следва разложението

$$f(t) = \sum_{m=0}^{2k} \frac{f^{(m)}(x)}{m!} (t-x)^m + (t-x)^{2k}\, \theta(t-x), \tag{8}$$

където $\lim\limits_{u\to 0} \theta(u) = 0$.

Оттук, като използваме условието в), получаваме следното неравенство:

$|\theta(t-x)| \leqq N(x)\, e^{a|t|^s}$, където $N(x)$ е константа, зависеща от x.

По-нататък от (8) следва

$$n^{2k/s} \left\{ W_n[f(t);\, x] - \sum_{m=0}^{2k-1} \frac{f^{(m)}(x)}{m!} W_n[(t-x)^m;\, x] \right\} =$$

$$= n^{2k/s} \frac{f^{(2k)}(x)}{(2k)!} W_n[(t-x)^{2k};\, x] + n^{2k/s} W_n[(t-x)^{2k}\, \theta(t-x);\, x].$$

След елементарни преобразования получаваме

$$W_n[(t-x)^{2k};\, x] = \frac{s\, n^{1/s}}{\Gamma(1/s)} \int_0^{\infty} u^{2k} e^{-nu^s} du = \frac{\Gamma\left(\frac{2k+1}{s}\right)}{\Gamma(1/s)} n^{-2k/s}.$$

Нека $\{\alpha_n\}_1^{\infty}$ е редица от реални числа, за която $\alpha_n > 0$, $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n = 0$ и $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n n^{1/s} = \infty$.

По-нататък имаме

$$n^{2k/s}\ W_n[(t-x)^{2k}\,\theta(t-x)\,;\ x]$$

$$\leqq n^{2k/s}\left(\int\limits_{x-\alpha_n}^{x+\alpha_n}+\int\limits_{-\infty}^{x-\alpha_n}+\int\limits_{x+\alpha_n}^{\infty}\right)(t-x)^{2k}\,|\theta(t-x)|\,e^{-n|t-x|^s}dt$$

$$\leqq n^{2k/s}\sup_{|u|\leqq\alpha_n}|\theta(u)|\,\frac{s\,n^{1/s}}{\Gamma(1/s)}\int\limits_0^{\alpha_n}u^{2k}e^{-nu^s}du$$

$$+n^{2k/s}\frac{s\,n^{1/s}}{2\,\Gamma(1/s)}\left(\int\limits_{-\infty}^{-\alpha_n}u^{2k}\,|\theta(u)|\,e^{-n|u|^s}du+\int\limits_{\alpha_n}^{\infty}u^{2k}\,|\theta(u)|\,e^{-nu^s}du\right)$$

$$=\sup_{|u|\leqq\alpha_n}|\theta(u)|\,\frac{s}{\Gamma(1/s)}\int\limits_0^{\alpha_n n^{1/s}}t^{2k}e^{-t^s}dt+\frac{s}{2\,\Gamma(1/s)}\int\limits_{-\infty}^{-\alpha_n n^{1/s}}t^{2k}\,|\theta(n^{-1/s}t)|\,e^{-|t|^s}dt$$

$$+\frac{s}{2\,\Gamma(1/s)}\int\limits_{\alpha_n n^{1/s}}^{\infty}t^{2k}\,|\theta(n^{-1/s}t)|\,e^{-t^s}dt\leqq\sup_{|u|\leqq\alpha_n}|\theta(u)|\,\frac{s}{\Gamma(1/s)}\int\limits_0^{\alpha_n n^{1/s}}t^{2k}e^{-t^s}dt$$

$$+N(x)\frac{s}{2\,\Gamma(1/s)}\left(\int\limits_{-\infty}^{-\alpha_n n^{1/s}}t^{2k}\exp(a\,|x|+n^{-1/s}|t|^s-|t|^s)\,dt\right.$$

$$\left.+\int\limits_{\alpha_n n^{1/s}}^{\infty}t^{2k}\exp(a\,|x|+n^{-1/s}|t|^s-t^s)\,dt\right)$$

$$\leqq\sup_{|u|\leqq\alpha_n}|\theta(u)|\,\frac{s}{\Gamma(1/s)}\int\limits_0^{\alpha_n n^{1/s}}t^{2k}e^{-t^s}dt$$

$$+N(x)\frac{s}{\Gamma(1/s)}\int\limits_{\alpha_n n^{1/s}}^{\infty}t^{2k}\exp\left\{t^s\left[a\left(\frac{|x|}{\alpha_n n^{1/s}}+n^{-1/s}\right)^s-1\right]\right\}dt$$

$$\leqq\sup_{|u|\leqq\alpha_n}|\theta(u)|\,\frac{s}{\Gamma(1/s)}\int\limits_0^{\alpha_n n^{1/s}}t^{2k}e^{-t^s}dt+N(x)\frac{s}{\Gamma(1/s)}\int\limits_{\alpha_n n^{1/s}}^{\infty}t^{2k}e^{-\frac{t^s}{2}}dt$$

за достатъчно големи n.

Като вземем пред вид, че интегралът $\int\limits_0^{\infty}t^{2k}e^{-\frac{t^s}{2}}dt$ е сходящ, оттук получаваме

$$\lim_{n\to\infty} n^{2k/s} W_n[(t-x)^{2k}\,\theta(t-x);\ x]=0.$$

С това теорема 5 е доказана.

Подобна теорема е в сила и за обобщения оператор на Ландау

$$P_n[f(t);\ x]=\frac{r\,n^{1/r}}{\Gamma(1/2r)}\int_0^1 f(\lambda_n t)\,[1-(t-\lambda_n^{-1}x)^{2r}]^n\,dt,$$

$$\lambda_n>0,\ \lim_{n\to\infty}\lambda_n=\infty;\quad r=1,\ 2,\ 3,\ldots$$

Теорема 6. Нека са изпълнени условията:

а) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\lambda_n^s}{n}=0$, където $s\geqq 2r$;

б) $f(t)$ е измерима в $[0,\ \infty)$ и диференцируема от ред $2k$ във фиксирана точка $x>0$;

в) $|f(t)|\leqq A\,e^{at^s}$ за всяко $t\geqq 0$, където M и a са константи.

Тогава е в сила формулата

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^{1/2r}}{\lambda_n}\right)^{2k}\left\{P_n[f(t);\ x]-\sum_{m=0}^{2k-1}\frac{f^{(m)}(x)}{m!}P_n[(t-x)^m;\ x]\right\}=$$

$$=\frac{\Gamma\left(\dfrac{2k+1}{2r}\right)}{\Gamma(1/2r)}\,\frac{f^{(2k)}(x)}{(2k)!}.$$

Доказателството на теорема 6 е подобно на доказателството на теорема 5.

При $r=1$ от теорема 6 следва теоремата на Радецки [3].

Авторът изказва дълбока благодарност на проф. д-р Бл. Сендов за вниманието, проявено от него към настоящата работа.

ЛИТЕРАТУРА

1. Сендов, Бл.: Некоторые вопросы теории приближений функций и множеств в хаусдорфовой метрике. Усп. мат. наук, XXIV, 5 (149) (1969), 141—178.
2. Сендов, Бл.: Върху някои линейни методи за апроксимиране на периодични функции относно хаусдорфово разстояние. Год. на Соф. унив., Физ.-мат. фак. 58 (1965), 107—140.
3. Radecki, I.: On Modified Landau polynomials. Studia math. 21, № 3 (1962), 233—290.

Постъпила на 10. XI. 1970 г.

ON SOME ESTIMATES AND ASYMPTOTIC FORMULAS FOR OPERATORS ON AN INFINITE INTERVAL

V. M. Veselinov

(SUMMARY)

Some estimates for approximation of a function relative to Hausdorff metric on whole axis are received using the Fejer and Jackson-Vallee-Poussin operators. These estimates are expressed by the modulus of non-monotonicity of the function, which is defined in [1].

Some asymptotic formulas are obtarned for the generalized Weierstrass and Landau operators.