О НЕПРЕРЫВНОСТИ НЕКОТОРЫХ ФУНКЦИОНАЛОВ И ЗАМКНУТОСТИ НЕКОТОРЫХ КОНУСОВ

Димитър Скордев

В настоящей работе доказывается одна теорема, которая дает достаточное условие для непрерывности некоторых функционалов и замкнутости некоторых конусов; в формулировке этой теоремы участвует понятие экстремальной (крайней) точки выпуклого множества. Сначала сформулируем и докажем одну лемму.

Лемма. Пусть X — отделимое топологическое вещественное линейное пространство. Пусть даны подмножество K пространства X и отображение f множества K в множестве вещественных чисел и пусть при этом выполняются следующие три условия:

a_1) для любого элемента x множества K и любого неотрицательного числа λ элемент λx принадлежит множеству K и верно равенство

$$f(\lambda x)=\lambda f(x);$$

a_2) множество $\{x : x \in K,\ f(x) \leqq 1\}$ ограничено*;

a_3) множество $\{x : x \in K,\ f(x)=1\}$ замкнуто.

При этих предположениях можно утверждать, что отображение f непрерывно и множество K замкнуто.

Доказательство. Из предположений a_1) и a_2) легко следует, что для любого элемента x множества K имеет место неравенство $f(x) \geqq 0$, причем если $x=0$, то $f(x)=0$, а если $x \neq 0$, то $f(x)>0$. Пусть

$$\{x_\alpha,\ \alpha \in A\} \tag{1}$$

— обобщенная последовательность элементов множества K, которая сходится к некоторому элементу y пространства X. Докажем, что $y \in K$ и обобщенная последовательность

$$\{f(x_\alpha),\ \alpha \in A\} \tag{2}$$

сходится к числу $f(y)$. Прежде всего убедимся, что (2) ограничена, начиная с некоторого места. В самом деле, в противном случае она обладала бы обобщенной подпоследовательностью

$$\{f(x_{\alpha_\beta}\},\ \beta \in B\}, \tag{3}$$

---

* Относительно смысла этого термина см. [1].

расходящейся к $+\infty$, причем можно считать, что $f(x_{\alpha_\beta})>0$ для любого β из B. Рассмотрим тогда обобщенную последовательность

$$\left\{\frac{1}{f(x_{\alpha_\beta})}x_{\alpha_\beta},\quad \beta\in B\right\}. \tag{4}$$

Обобщенная последовательность

$$\{x_{\alpha_\beta},\quad \beta\in B\} \tag{5}$$

сходится (к элементу y), так как она является обобщенной подпоследовательностью обобщенной последовательности (1). Поэтому (4) должна сходиться к нулю пространства X, что противоречит условию a_3). Доказав таким образом, что (2), начиная с некоторого места, ограничена, рассмотрим произвольную сходящуюся обобщенную подпоследовательность обобщенной последовательности (2). Пусть эта подпоследовательность имеет вид (3) и пусть она сходится к числу τ. Мы докажем, что $y\in K$ и $\tau=f(y)$; очевидно, что это будет достаточно для того, чтобы считать лемму доказанной. Возможны два случая: 1) $\tau>0$ и 2) $\tau=0$. В обоих случаях обобщенная последовательность (5) сходится к элементу y. В случае 1) можно считать, что $f(x_{\alpha_\beta})>0$ для любого β из B, и можно рассмотреть обобщенную последовательность (4); она будет сходиться к элементу $\frac{1}{\tau}y$. Отсюда при помощи условия a_3) заключаем, что $\frac{1}{\tau}y\in K$ и $f\left(\frac{1}{\tau}y\right)=1$. Из этого следует непосредственно, что $y\in K$ и $\tau=f(y)$, т. е. то, что требовалось доказать. Переходим к рассмотрению случая 2). Пусть U — произвольное открытое подмножество пространства X, содержащее элемент 0. В силу предположения a_2) можно найти такое положительное число λ, что $\lambda x\in U$ для всех элементов x множества K, удовлетворяющих неравенству $f(x)\leqq 1$. Тогда все элементы x множества K, для которых $f(x)\leqq\lambda$, принадлежат множеству U. Следовательно, все члены (5), начиная с некоторого места, будут принадлежать U. В силу произвольности U это означает, что (5) сходится к нулю пространства X. Но она сходится также и к элементу y. Поэтому имеет место равенство $y=0$ и мы видим, что и в случае 2) $y\in K$ и $\tau=f(y)$.

Замечание. В доказательстве леммы не использовалась непрерывность операции сложения в пространстве X.

Теорема. Пусть X — отделимое локально выпуклое вещественное линейное пространство и пусть в пространстве X даны выпуклый конус K с вершиной 0 и линейный функционал F (не обязательно непрерывный). Пусть через S обозначено множество

$$\{x : x\in K,\ F(x)\leqq 1\},$$

через Q — множество $\{x: x \in K,\ F(x)=1\}$ и через E — множество всех ненулевых экстремальных точек множества S. При этом пусть выполняются следующие два условия:

б$_1$) множество S компактно;

б$_2$) замыкание множества E содержится в множестве Q.

Тогда сужение функционала F на K непрерывно и конус K замкнут.

Доказательство. Обозначим через f сужение функционала F на K. Предположения а$_1$) и а$_2$) доказанной выше леммы выполняются. Теорема будет доказана, если мы докажем, что верно также и утверждение а$_3$). Этим мы сейчас и займемся. Разумеется, можно ограничиться тем случаем, когда в конусе K имеются ненулевые элементы (в противном случае теорема тривиальна). Тогда из теоремы Крейна-Мильмана следует, что множество E непусто. Обозначим через H замкнутую выпуклую оболочку множества E; она компактна, так как содержится в компактном множестве S. Функционал F ограничен снизу на множестве H, так как $F(x) \geqq 0$ для любого x из K. Пусть σ — точная нижняя граница функционала F на множестве H и пусть

$$H_0=\{x: x \in H,\ F(x)=\sigma\}.$$

Из равенства

$$H_0=\bigcap_{n=1}^{\infty}\left((H \cap \left\{x: x \in K,\ F(x) \leqq \sigma+\frac{1}{n}\right\}\right)$$

и предположения б$_1$) следует, что множество H_0 непусто и компактно. Пусть a — некоторая экстремальная точка множества H_0 (по крайней мере одна такая точка существует в силу теоремы Крейна-Мильмана). Точка a будет экстремальной и для всего множества H. Отсюда (см. например [1], гл. II, § 4, предложение 4) следует, что a принадлежит замыканию множества E. На основании предположения б$_2$) заключаем, что имеет место равенство $F(a)=1$, т. е. $\sigma=1$. Так как для любого x из H имеют место неравенства

$$\sigma \leqq F(x) \leqq 1,$$

мы видим, что $F(x)=1$ для любого x из H, т. е.

$$H \subset Q. \tag{6}$$

Рассмотрим множество S_1 всех элементов вида λx, где $0 \leqq \lambda \leqq 1$ и $x \in H$. Это множество выпукло и компактно и содержит все экстремальные точки множества S. Следовательно (по теореме Крейна-Мильмана),

$$S_1 \supset S.$$

Пусть u — произвольный элемент множества Q. Тогда $u \in S_1$ и, следовательно, $u=\lambda x$, где λ — некоторое число и x — некоторый элемент множества H. Отсюда получается равенство

$$F(u)=\lambda F(x)$$

и так как

$$F(u)=F(x)=1,$$

мы видим, что $\lambda=1$. Но тогда $u=x$ и поэтому $u \in H$. В силу произвольности элемента u мы таким образом доказали, что

$$Q \subset H. \tag{7}$$

Из (7) и (8) следует, что $Q=H$. Так как множество H замкнуто, тем самым истинность утверждения a_3) доказана.

Из доказанной теоремы получаем:

Следствие. Пусть X — отделимое локально выпуклое вещественное линейное пространство и пусть в пространстве X даны выпуклый конус K с вершиной 0 и линейный функционал F (не обязательно непрерывный). Пусть через S обозначено множество

$$\{x : x \in K,\ F(x) \leqq 1\},$$

а через E — множество всех ненулевых экстремальных точек множества S. Если множество S компактно и множество E замкнуто, то сужение функционала F на K непрерывно и конус K замкнут.

ЛИТЕРАТУРА

1. Бурбаки, Н.: Топологические векторные пространства. Москва, 1959.

Постъпила на 13. XI. 1970 г.

ON THE CONTINUITY OF SOME FUNCTIONALS AND THE CLOSEDNESS OF SOME CONES

D. Skordev

(SUMMARY)

Let X be a Hausdorff locally convex real linear space. Let K be a convex cone in X. Let F be a linear functional in X (not necessarily continuous) such that the set

$$S=\{x : x \in K,\ F(x) \leqq 1\}$$

is compact. We denote by E the set of the non-zero extreme points of S.

Theorem. If $F(x)=1$ for all x in the closure of E, then the restriction of F on K is continuous and K is closed.

Corollary. If E is closed, then the restriction of F on K is continuous and K is closed.