НЯКОЛКО БЕЛЕЖКИ ВЪРХУ PI-АЛГЕБРИТЕ

Михаил Б. Гаврилов, Любомир Ив. Давидов, Иван К. Тонов

Нека F е поле с характеристика нула. Ще разглеждаме асоциативни алгебри над F. Да означим с $F[x]$ свободната алгебра, породена от изброимото множество образуващи

$$(x)=x_1,\ x_2,\ldots,\ x_n,\ldots,$$

а с $F^1[x]$ да означим свободната алгебра с единица e. Образуващите x_i ще бележим някой път още с буквите y, z, u,... Един идеал T в $F[x]$ ще наричаме напълно характеристичен идеал (или накратко T-идеал), ако от $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in T$ следва, че

$$f(g_1, g_2, \ldots, g_n) \in T$$

за произволни $g_1(x), g_2(x), \ldots, g_n(x) \in T$. Един T-идеал T в $F^1[x]$ ще наричаме T^*-идеал, ако от $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in T$ следва, че $\dfrac{\partial f(x)}{\partial x_i} \in T$ за $i=1, 2, \ldots, n$. Ако няма опасност от недоразумение, T^*-идеалите в $F^1[x]$ ще наричаме пак T-идеали.

Нека сега A е произволна алгебра. Полиномът $f(x_1, \ldots, x_n) \in F[x]$ ще наричаме тъждество в алгебрата A, ако $f(a_1, a_2, \ldots, a_n)=0$ за всеки набор $a_1, a_2, \ldots, a_n$ на елементи от A. Множеството от всички тъждества в A ще бележим с $T(A)$. Една алгебра A е PI-алгебра, ако $T(A) \neq \{0\}$. Може да се докаже, че за всяка PI-алгебра A множеството $T(A)$ е T-идеал в $F[x]$ (съответно в $F^1[x]$, ако A е с единица) и, обратно, ако T е T-идеал в $F[x]$ (или в $F^1[x]$), то съществува PI-алгебра A такава, че $T(A)=T$.

Казваме, че тъждеството $f(x)=0$ следва от тъждествата $f_1(x)=0, \ldots, f_n(x)=0, \ldots$, ако $f(x)$ принадлежи на T-идеала, породен от $f_1(x), \ldots, f_n(x), \ldots$ (който ще бележим с $\{f_1(x), \ldots, f_n(x), \ldots\}_T$), или все едно, ако $f(x)=0$ е тъждество във всяка алгебра, в която $f_i(x)=0$, $i=1, 2, \ldots, n, \ldots$ са тъждества. Известно е [1], че всички тъждества, важащи в една алгебра A, следват от полилинейните тъждества

$$\sum_{\sigma} \lambda_\sigma x_{i_1} x_{i_2} \ldots x_{i_n}=0 \qquad (\lambda_\sigma \in F),$$

важащи в A. Ако A е с единица, всички полилинейни тъждества пък следват от нормалните комутаторни произведения. В работата [4] К. Дочев поставя въпроса, дали тъждеството

$$(1) \qquad d(x, y, z)=[xy+yx, z]\circ[[y, z], [z, x]]=0^*$$

следва от тъждеството на Хол: $h(x, y, z)=[[x, y]^2, z]=0$, и от тъждеството $S_4(x_1, x_2, x_3, x_4)=0$, където изобщо $S_n(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ се определя като

$$S_n(x_1, \ldots, x_n)=\sum(-1)^{[i_1 i_2 \ldots i_n]} x_{i_1} x_{i_2} \ldots x_{i_n}.$$

Ние ще покажем, че (1) следва от тъждеството на Хол. За целта да означим с H T-идеала: $H=\{h(x, y, z)\}_T$. Първо ще докажем следната

Лема 1. По модул идеала H са изпълнени сравненията:

(2) $y[x_1, x_2, x_3]\circ[x_1, x_2]\equiv[x_1, x_2, y][x_1, x_2, x_3] \pmod H$,

(3) $[x_1, x_2, x_3]y\circ[x_1, x_2]\equiv-[x_1, x_2, x_3][x_1, x_2, y] \pmod H$,

(4) $[x_1, x_2, x_3]\circ[x_1, x_3]+[x_1, x_2]\circ[x_1, x_3, x_3]=0 \pmod H$.

Доказателство. Сравнението (2) следва от веригата сравнения:

$$y[x_1, x_2, x_3][x_1, x_2]+[x_1, x_2]y[x_1, x_2, x_3]=y[x_1, x_2, x_3][x_1, x_2]$$
$$+y[x_1, x_2][x_1, x_2, x_3]+[x_1, x_2, y][x_1, x_2, x_3]=y([x_1, x_2, x_3]$$
$$\circ[x_1, x_2])+[x_1, x_2, y][x_1, x_2, x_3]\equiv[x_1, x_2, y][x_1, x_2, x_3] \pmod H.$$

Аналогично (3) се получава от

$$[x_1, x_2, x_3]y[x_1, x_2]+[x_1, x_2][x_1, x_2, x_3]y$$
$$\equiv[x_1, x_2, x_3][y, [x_1, x_2]]=-[x_1, x_2, x_3][x_1, x_2, y] \pmod H.$$

Като пък линеаризираме $h(x, y, z)$, ще получим

$$h(x_1, x_2, y_1, y_2, z)=[x_1, y_1, z]\circ[x_2, y_2]+[x_1, y_2, z]$$
$$\circ[x_2, y_1]+[x_2, y_1, z]\circ[x_1, y_2]+[x_2, y_2, z]\circ[x_1, y_1]$$

и ако тук положим

$$x_1=x_1, \quad x_2=x_1, \quad y_1=x_2, \quad y_2=x_3, \quad z=x_3,$$

то

$$h(x_1, x_1, x_2, x_3, x_3)=[x_1, x_2, x_3]\circ[x_1, x_3]+[x_1, x_3, x_3]\circ[x_1, x_2]$$
$$+[x_1, x_2, x_3]\circ[x_1, x_3]+[x_1, x_3, x_3]\circ[x_1, x_2],$$

откъдето вече следва сравнението (4).

---

* По дефиниция $x\circ y=xy+yx$. При това означеното с „$\circ$" действие извършваме след умножението, т. е. $ab\circ cd=(ab)\circ(cd)$.

Сега вече можем да докажем

Теорема 1. Тъждеството (1) следва от тъждеството на Хол.

Доказателство. Линеаризираме $h(x, y, z)$ само по x:

$$h(x_1, x_2, y, z)=[x_1, y, z]\circ[x_2, y]+[x_2, y, z]\circ[x_1, y],$$

и полагаме

$$x_1=x, \quad x_2=xy+yx, \quad y=z, \quad z=[y, z].$$

Тогава

$$h(x, xy+yx, z, [y, z])=[x, z, [y, z]]\circ[xy+yx, z]$$
$$+[xy+yx, z, [y, z]]\circ[x, z]=-d(x, y, z)+\varphi(x, y, z),$$

където $\varphi(x, y, z)=[xy+yx, z, [y, z]]\circ[x, z]$. Следователно, за да докажем теоремата, достатъчно ще бъде да покажем, че

$$\varphi(x, y, z)\equiv 0 \pmod{H}.$$

Наистина като използваме сравненията (2), (3) и (4), получаваме последователно

$$\varphi(x, y, z)=[xy+yx, z, [y, z]]\circ[x, z]$$
$$=[x[y, z]+[x, z]y+y[x, z]+[y, z]x, [y, z]]\circ[x, z]$$
$$=(-[y, z, x][y, z]+x[y, z, [y, z]]+[x, z, [y, z]]y+[x, z][y,[y,z]]$$
$$+y[x, z, [y, z]]-[y, z, y][x, z]+[y, z][x, [y, z]])\circ[x, z]$$
$$=(-[y, z, x][y, z]+[x, z, [y, z]]y-[x, z][y, z, y]+y[x, z, [y, z]]$$
$$-[y, z, y][x, z]-[y, z][y, z, x])\circ[x, z]$$
$$=-[y, z, x][y, z]\circ[x, z]+[x, z, [y, z]]y\circ[x, z]-[x, z][y, z, y]\circ[x, z]$$
$$+y[x, z, [y, z]]\circ[x, z]-[y, z, y][x, z]\circ[x, z]-[y, z][y, z, x]\circ[x, z]$$
$$=-[x, z, [y, z]][x, z, y]+[x, z, y][x, z, [y, z]]-[x, z]^2[y, z, y]$$
$$-2[x, z][y, z, y][x, z]-[y, z, y][x, z]^2$$
$$=-[x, z][y, z][x, z, y]+[y, z][x, z][x, z, y]+[x, z, y][x, z][y, z]$$
$$-[x, z, y][y, z][x, z]-[x, z]^2[y, z, y]-[y, z, y][x, z]^2$$
$$-2[x, z][y, z, y][x, z]$$
$$=[y, z][x, z][x, z, y]+[x, z, y][x, z][y, z]-[[x, z, y][y, z], [x, z]]$$
$$-[x, z][y, z, y][x, z]-[y, z, y][x, z]^2-([x, z][x, z, y][y, z]$$
$$+[x, z][y, z, y][x, z]+[x, z][y, z][x, z, y]+[x, z]^2[y, z, y])$$
$$=[y, z][x, z][x, z, y]+[x, z, y][x, z][y, z]-[[x, z, y][y, z], [x, z]]$$

$$-[x, z][y, z, y][x, z]-[y, z, y][x, z]^2-[x, z]([x, z, y]\circ[y, z]+[x, z]\circ[y, z, y])$$
$$=[y, z][x, z][x, z, y]+[x, z, y][x, z][y, z]-[[x, z, y][y, z], [x, z]]$$
$$-[x, z][y, z, y][x, z]-[y, z, y][x, z]^2-[x, z]([z, x, y]\circ[z, y]$$
$$+[z, y, y]\circ[z, x])$$
$$\equiv[y, z][x, z][x, z, y]+[x, z, y][x, z][y, z]-[x, z, y][y, z][x, z]$$
$$+[x, z][x, z, y][y, z]-[x, z][y, z, y][x, z]-[y, z, y][x, z]^2$$
$$\equiv[y, z][x, z][x, z, y]+[y, z][x, z, y][x, z]-([y, z][x, z, y][x, z]$$
$$+[x, z, y][y, z][x, z]+[x, z][y, z, y][x, z]+[y, z, y][x, z]^2)$$
$$=[y, z]([x, z]\circ[x, z, y])-([x, z, y]\circ[y, z]+[y, z, y]\circ[x, z])[x, z]$$
$$\equiv-([z, x, y]\circ[z, y]+[z, y, y]\circ[z, x])[x, z]\equiv 0 \pmod H,$$

или все едно $\varphi(x, y, z)\equiv 0 \pmod H$, с което теоремата е доказана.

Класът M от всички PI-алгебри, удовлетворяващи някаква фиксирана система тъждества, ще наричаме многообразие от PI-алгебри. Разбира се, без ограничение на общността можем да предполагаме тези тъждества полилинейни. T-идеала, породен от тях, ще бележим с $T(M)$. Очевидно, ако $A \in M$, то $T(M)\subset T(A)$ и, обратно, ако $T(M)\subset T$, то има алгебра $A \in M$ такава, че $T(A)=T$. Ще казваме, че T-идеалът T в $F[x]$ (или $F^1[x]$) е шпехтовски, ако той се поражда (като напълно характеристичен идеал) от крайна система полиноми $f_1, f_2, \ldots, f_n$ и всеки T-идеал $T_1 \supset T$ е също крайно породен, Едно тъждество $f(x)=0$ (многообразие M) ще наричаме шпехтовско. ако T-идеалът $T_f=\{f(x)\}_T(T(M))$ е шпехтовски. С други думи, тъждеството $f(x)=0$ (многообразието M) е шпехтовско, когато тъждествата във всяка алгебра A, в която важи тъждеството $f(x)=0$ $(A \in M)$, следват от краен брой тъждества, важащи в нея. В работата [1] Specht поставя въпроса, дали за всяка алгебра тъждествата, важащи в нея, следват от краен брой, т. е. дали всеки T-идеал в $F[x]$ (съответно в $F^1[x]$) е шпехтовски. Засега този въпрос стои открит. Получени са само някои частни резултати. По-точно доказано е, че T-идеалите $\{x^n\}_T$, $\{\alpha x_1 \ldots x_n+\beta x_{i_1} x_{i_2} \ldots x_{i_n}\}_T$, $\{[x_1 \ldots x_k, x_k \ldots x_{k+l}]\}_T$ в $F[x]$ и T-идеалите $\{[x_1, x_2, x_3]\}_T$, $\{[[x_1, x_2], [x_3, x_4]]\}_T$, $\{[x_1, x_2, x_3, x_4]\}_T$ в $F^1[x]$ са шпехтовски. Ние ще докажем сега няколко твърдения във връзка с шпехтовостта на някои T-идеали и на някои многообразия от PI-алгебри. С познати разсъждения се доказва следната

Лема 2. Един T-идеал е шпехтовски тогава и само тогава, когато е крайно породен и всяка растяща редица от T-идеали, започваща с него, се стабилизира на крайно място.

Доказателство. (а) Нека T е шпехтовски T-идеал. Да допуснем, че има растяща редица от T-идеали

$$T=T^{(0)}\subset T^{(1)}\subset T^{(2)}\subset\ldots\subset T^{(p)}\subset\ldots,$$

която не се прекъсва на крайно място. Разглеждаме T-идеала

$$T_0=\bigcup_{\nu=0}^{\infty}T^{(\nu)}.$$

Тъй като $T\subset T_0$, то T_0 е крайно породен. Нека $f_1(x),\ldots,f_s(x)$ е една система елементи, пораждащи T_0. Тогава съществуват числа n_i такива, че $f_i(x)\in T^{(n_i)}$. Явно $T^{(m)}=T_0$ за всяко $m\geqq\max(n_1,\ldots,n_s)$, което показва, че редицата от T-идеали

$$T^{(0)}\subset T^{(1)}\subset\ldots\subset T^{(p)}\subset\ldots$$

се стабилизира.

(б) Да допуснем сега, че T е крайно породен и че T не е шпехтовски. Тогава съществува T-идел $T_1\supset T$, който не е крайно породен. Нека $T=\{f_1, f_2,\ldots, f_s\}_T$. Тъй като T_1 не е крайно породен, могат да се намерят елементи $f_{s+1},\ldots, f_{s+i},\ldots$ такива, че

$$\{T, f_{s+1},\ldots, f_{s+i}\}_T\subset\{T, f_{s+1},\ldots, f_{s+i}, f_{s+i+1}\}_T\subset T_1,$$

като включванията са строги. Тогава очевидно редицата

$$T\subset\{T, f_{s+1}\}\subset\{T, f_{s+1}, f_{s+2}\}\subset\ldots$$

няма да се стабилизира на крайно място.

Следствие 1. Ако един T-идеал е шпехтовски, то и всеки T-идеал, който го съдържа, е шпехтовски.

Следствие 2. Ако $f(x)=0$ е шпехтовско тъждество и ако от тъждеството $g(x)=0$ следва $f(x)=0$, то $g(x)=0$ е също шпехтовско.

Следствие 3. Ако многообразието M е шпехтовско и многообразието $N\subset M$, то N е шпехтовско.

Доказателство. Получава се от факта, че ако $N\subset M$, то

$$T(N)\supset T(M).$$

Теорема 2. Многообразието P, породено от тъждеството

$$S_3(x_1, x_2, x_3)=x_1x_2x_3-x_1x_3x_2+x_2x_3x_1-x_2x_1x_3 \tag{5}$$
$$+x_3x_1x_2-x_3x_2x_1=0,$$

е шпехтовско, т. е. T-идеалът $\{S_3(x_1, x_2, x_3)\}_T$ е шпехтовски.

Доказателство. Чрез субституциите $x_3=x_3x_4$; $x_1=-x_1x_2$, $x_2=x_3$, $x_3=x_4$; $x_1=x_2x_4$, $x_2=x_1$; $x_1=-x_2$, $x_2=x_4$, $x_3=x_1x_3$; $x_1=-x_2$, $x_2=x_3$, $x_3=x_4$ получаваме, че от тъждеството (5) следват тъждествата

$$x_1x_2x_3x_4-x_2x_1x_3x_4+x_2x_3x_4x_1-x_2x_1x_3x_4+x_3x_4x_1x_2-x_3x_4x_2x_1=0, \tag{6}$$

(7) $-x_1x_2x_3x_4+x_1x_2x_4x_3-x_3x_4x_1x_2+x_3x_1x_2x_4-x_4x_1x_2x_3+x_4x_3x_1x_2=0$,

(8) $x_2x_4x_1x_3-x_2x_1x_3x_1+x_1x_3x_4x_1-x_1x_2x_4x_3+x_3x_2x_1x_1-x_3x_1x_2x_4=0$,

(9) $-x_2x_4x_1x_3+x_2x_1x_3x_4-x_3x_1x_2x_2+x_4x_2x_1x_3-x_1x_3x_2x_4+x_1x_3x_4x_2=0$,

(10) $-x_2x_3x_4+x_2x_4x_3-x_3x_4x_2+x_3x_2x_4-x_4x_2x_3+x_4x_3x_2=0$.

Да умножим сега (5) с x_4 отляво и (10) с x_1 отдясно. Ще получим

(11) $x_4x_1x_2x_3-x_4x_1x_3x_2+x_4x_2x_3x_1-x_4x_2x_1x_3+x_4x_3x_1x_2-x_4x_3x_2x_1=0$,

(12) $-x_2x_3x_4x_1+x_2x_4x_3x_1-x_3x_4x_2x_1+x_3x_2x_4x_1-x_4x_2x_3x_1+x_4x_3x_2x_1=0$.

Ако съберем (6), (7), (8), (9), (11) и (12), ще получим

$$2x_4x_3x_1x_2-2x_3x_4x_2x_1+2x_3x_2x_4x_1-2x_4x_1x_3x_2=0,$$

откъдето чрез преномерация на променливите следва тъждеството

(13) $x_1x_2x_3x_4-x_2x_1x_4x_3+x_2x_4x_1x_3-x_1x_3x_2x_4=0$.

Да умножим сега отляво (13) със z и да положим пак в (13)

$$x_2=-zx_2.$$

Ще получим

(14) $zx_1x_2x_3x_4-zx_2x_1x_4x_3+zx_2x_4x_1x_3-zx_1x_3x_2x_4=0$,

(15) $-x_1zx_2x_3x_4+zx_2x_1x_4x_3-zx_2x_4x_1x_3+x_1x_3zx_2x_4=0$.

Събираме (14) и (15) и тогава

(16) $zx_1x_2x_3x_4-x_1zx_2x_3x_4+x_1x_3zx_2x_4-zx_1x_3x_2x_4=0$.

От (16) пък следват тъждествата

(17) $x_5x_6x_1x_2x_3x_4-x_6x_1x_5x_2x_3x_4+x_6x_1x_5x_2x_4-x_5x_6x_1x_3x_2x_4=0$,

(18) $x_6x_1x_5x_2x_3x_4-x_1x_6x_5x_2x_3x_4+x_1x_3x_6x_5x_2x_4-x_6x_1x_3x_5x_2x_4=0$,

(19) $-x_6x_5x_1x_2x_3x_4+x_1x_6x_5x_2x_3x_4-x_1x_3x_6x_5x_2x_4+x_6x_5x_1x_3x_2x_4=0$,

получени съответно чрез субституциите $z=x_5$, $x_1=x_6x_1$; $z=x_6$, $x_2=x_5x_2$ и $z=-x_6x_5$. Събираме сега (17), (18) и (19) и получаваме

$$[x_5, x_6]x_1x_2x_3x_4-[x_5, x_6]x_1x_3x_2x_4=0$$

или

$$[x_5, x_6]x_1[x_2, x_3]x_4=0,$$

което е еквивалентно на

$$[x_1, x_2]x_3[x_4, x_5]x_6=0,$$

или все едно на

(20) $x_1x_2x_3x_4x_5x_6-x_2x_1x_3x_4x_5x_6+x_2x_1x_3x_5x_4x_6-x_1x_2x_3x_5x_4x_6=0$.

От друга страна, (13) може да се запише още така:

$$x_1[x_2, x_3]x_4 = x_2[x_1, x_4]x_3.$$

Да положим тук $x_1 = x_4$. Тогава

$$x_1[x_2, x_3]x_1 = 0$$

или като линеаризираме

(21) $$x_1[x_2, x_3]x_4 = x_4[x_3, x_2]x_1.$$

Също така посредством субституциите $x_3 = -x_3x_4$, $x_4 = x_5x_6$; $x_1 = x_5$, $x_2 = x_3$, $x_3 = x_6$; $x_2 = x_2x_5$, $x_3 = x_3x_4$, $x_4 = x_6$ виждаме, че от (13) следват тъждествата

(22) $$-x_1x_2x_3x_4x_5x_6 + x_2x_1x_5x_6x_3x_4 - x_2x_5x_6x_1x_3x_4 + x_1x_3x_4x_2x_5x_6 = 0,$$

(23) $$x_5x_3x_6x_4 - x_3x_5x_4x_6 + x_3x_4x_5x_6 - x_5x_6x_4x_3 = 0,$$

(24) $$x_1x_2x_5x_3x_4x_6 - x_2x_5x_1x_6x_3x_4 + x_2x_5x_6x_1x_3x_4 - x_1x_3x_4x_2x_5x_6 = 0.$$

Да умножим още (23) отляво с x_2x_1:

(25) $$x_2x_1x_5x_3x_6x_4 - x_2x_1x_3x_5x_4x_6 + x_2x_1x_3x_4x_5x_6 - x_2x_1x_5x_6x_4x_3 = 0.$$

И сега, като съберем (20), (22), (24) и (25), ще получим

$$x_1x_2x_5x_3x_4x_6 - x_2x_5x_1x_6x_3x_4 + x_2x_1x_5x_3x_6x_4 - x_1x_2x_3x_5x_4x_6 = 0,$$

или все едно

(26) $$x_1x_2[x_5, x_3]x_4x_6 + x_2(x_1x_5x_3x_6 - x_5x_1x_6x_3)x_4.$$

Но според (21) и (13) имаме

$$x_1x_2[x_5, x_3]x_4x_6 = x_4x_6[x_3, x_5]x_1x_2$$

и

$$x_2(x_1x_5x_3x_6 - x_5x_1x_6x_3)x_4 = x_2[x_1x_3, x_5x_6]x_4.$$

Тогава (26) добива вида

(27) $$x_4x_6[x_3, x_5]x_1x_2 + x_2[x_1x_3, x_5x_6]x_4 = 0.$$

Пак от (21) получаваме, че

$$x_2[x_1x_3, x_5x_6]x_4 = x_4[x_5x_6, x_1x_3]x_2,$$

и тогава от (27) следва

$$x_4x_6[x_3, x_5]x_1x_2 + x_4[x_5x_6, x_1x_3]x_2 = 0,$$

или все едно

(28) $$x_4(x_6x_3x_5x_1 - x_6x_5x_3x_1 + x_5x_6x_1x_3 - x_1x_3x_5x_6)x_2 = 0.$$

Според (13) обаче

$$x_5x_6x_1x_3-x_6x_5x_3x_1+x_6x_3x_5x_1=x_5x_1x_6x_3,$$

откъдето се вижда, че от (28) следва тъждеството

$$x_4x_5x_1x_6x_3x_2-x_4x_1x_3x_5x_6x_2=0.$$

Оттук чрез преномерация на променливите получаваме окончателно, че от тъждеството $S_3(x_1, x_2, x_3)=0$ следва тъждеството $x_1x_2x_3x_4x_5x_6=x_1x_3x_5x_2x_4x_6$. С други думи, многообразието P се съдържа в многообразието R, породено от двучленното тъждество $x_1x_2x_3x_4x_5x_6=x_1x_3x_5x_2x_4x_6$. Според работата [2] многообразието R е шпехтовско, откъдето следва шпехтовостта и на нашето многообразие P.

Теорема 3. Многообразието K от алгебрите с единица, удовлетворяващи тъждество от вида

$$[x_1, x_2, x_3, x_4]=\alpha[x_{i_1}, x_{i_2}, x_{i_3}, x_{i_4}], \tag{29}$$

където $\alpha \in F$, а $i_1i_2i_3i_4$ е произволна пермутация на числата 1234, е шпехтовско.

Доказателство. Ще разгледаме два случая:

I случай. $\alpha=\pm 1$. В този случай доказателството се извършва, като се разгледат последователно всевъзможните пермутации на числата 1234 и поотделно за всяка се докаже, че многообразието, породено от (29), е шпехтовско, или все едно, че T-идеалът

$$T=\{[x_1, x_2, x_3, x_4]-\alpha[x_{i_1}, x_{i_2}, x_{i_3}, x_{i_4}]\}_T$$

е шпехтовски. Тъй като доказателствата във всички случаи вървят аналогично и се свеждат до това да се покаже, че T съдържа шпехтовския (по [6]) T-идеал $T_1=\{[[x_1, x_2], [x_3, x_4]]\}_T$ или шпехтовския (пак по [6]) T-идеал $T_2=\{[x_1, x_2, x_3, x_4]\}_T$, то ние няма да извършим доказателството във всичките му подробности, а само ще приведем няколко примера:

а) $i_1i_2i_3i_4=1243$, т. е. (29) добива вида

$$[x_1, x_2, x_3, x_4]-[x_1, x_2, x_4, x_3].$$

Но като вземем пред вид, че

$$[x_1, x_2, x_3, x_4]-[x_1, x_2, x_4, x_3]=[[x_1, x_2], [x_3, x_4]],$$

то веднага получаваме

$$[[x_1, x_2], [x_3, x_4]]=0,$$

т. е. $T_1 \subset T$.

б) $i_1i_2i_3i_4=1324$ или (29) в този случай има вида

$$[x_1, x_2, x_3, x_4]-[x_1, x_3, x_2, x_4]=0.$$

От тъждеството на Якоби следва обаче, че

$$[x_1, x_2, x_3, x_4]-[x_1, x_3, x_2, x_4]\equiv[x_3, x_2, x_1, x_4],$$

което показва, че

$$[x_3, x_2, x_1, x_4]=0,$$

т. е. $T_2\subset T$.

II случай. $\alpha\neq\pm 1$, т. е. $\alpha^2\neq 1$. Да разгледаме най-напред онези от полиномите (29), за които пермутацията $i_1i_2i_3i_4$ има свойството

$$\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ i_1 & i_2 & i_3 & i_4\end{pmatrix}^2=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 1 & 2 & 3 & 4\end{pmatrix}.$$

Но тогава явно ще имаме

$$\alpha\,[x_{i_1}, x_{i_2}, x_{i_3}, x_{i_4}]-\alpha^2[x_1, x_2, x_3, x_4]=0,$$

което показва, че

$$[x_1, x_2, x_3, x_4]=0,$$

или все едно, че $T_2\subset T$, т. е. T е шпехтовски T-идеал.

Доказателството в останалите случаи се извършва, като се показва, че T съдържа T-идеал, за който вече е доказано, че е шпехтовски. Ние отново няма да привеждаме подробно доказателствата във всички случаи, тъй като са аналогични, а ще се задоволим да дадем два примера:

а) Нека (29) има вида

$$[x_1, x_2, x_3, x_4]-\alpha[x_3, x_1, x_2, x_4]=0.$$

Тогава

$$[x_1, x_2, x_3, x_4]-(-\alpha)[x_1, x_3, x_2, x_4]=0.$$

От друга страна обаче, пермутацията 1324 има свойството

$$\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 1 & 3 & 2 & 4\end{pmatrix}^2=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 1 & 2 & 3 & 4\end{pmatrix},$$

откъдето веднага следва, че и тук T е шпехтовски T-идеал.

б) Нека (29) има вида

$$[x_1, x_2, x_3, x_4]-\alpha[x_2, x_3, x_4, x_1]=0.$$

Тогава

$$[x_1, x_2, x_3, x_4]-\alpha^2[x_3, x_4, x_1, x_2]=0.$$

Ако $\alpha^2=-1$, то шпехтовостта на T следва от I случай. Ако пък $\alpha^2\neq 1$, шпехтовостта на T следва от факта, че

$$\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 3 & 4 & 1 & 2\end{pmatrix}^2=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 1 & 2 & 3 & 4\end{pmatrix}.$$

Нека сега A и B са две произволни многообразия от PI-алгебри. Под произведение AB на тези многообразия ще разбираме класа на всички алгебри, състоящ се от всевъзможните разширения на произволна алгебра от A с помощта на произволна алгебра от B. Под произведение $T_1 * T_2$ на два T-идеала T_1 и T_2 ще разбираме T-идеала, породен от всички елементи от вида

$$f(g_1(x), \ldots, g_n(x)),$$

където $f(x_1, \ldots, x_n) \in T_1$, а $g_i(x) \in T_2$. Лесно се вижда, че ако A и B са многообразия, то AB е също многообразие и $T(AB) = T(A) * T(B)$. Следователно съвкупността от всички многообразия с така въведената операция умножение е групоид. Естествено е да се постави въпросът за описанието на този групоид. Оказва се ([5]), че този групоид е неасоциативен.

Лема 3. Нека T-идеалът T_1 се поражда от полилинейните елементи $f_j(x)$, а T-идеалът T_2 — от полилинейните елементи $g_i(x)$. Тогава T-идеалът $T_1 * T_2$ се поражда (като T-идеал) от елементите, имащи вида

$$f_j(y_1^{\varepsilon_1} g_1(x) y_2^{\varepsilon_2}, \ldots, y_{2n-1}^{\varepsilon_{2n-1}} g_n(x) y_{2n}^{\varepsilon_{2n}}), \tag{30}$$

където елементите $g_i(x)$ са записани с помощта на различни променливи, y_k са променливи, които не се срещат в записа на елементите $g_i(x)$, $\varepsilon_k = 0,1$.

Верността на тази лема следва от полилинейността на пораждащите елементи.

Нека сега $g(x) = 0$ е някакво тъждество. Да означим с $T_g = \{g(x)\}_T$ T-идеала, породен от него, а с M многообразието, породено от него. Алгебрата $M[x] = F[x]/T_g$ ще наричаме релативно-свободна алгебра. Ако са дадени две подмногообразия A и B на M, M-произведение на тези многообразия ще наричаме многообразието

$$A._M B = (AB) \cap M.$$

Ако няма опасност от недоразумение, така дефинираното M-умножение ще наричаме само умножение.

Да разгледаме сега КД-многообразието M, породено от конкретното тъждество

$$g(x) = [x_1 x_2, x_3] = 0.$$

Лема 4. В сила са следните сравнения по модул T-идеала

$$T_g = \{[x_1 x_2, x_3]\}_T.$$

$$(x_1 \circ x_2)(x_3 \circ x_4) \equiv 2x_1 x_2 (x_3 \circ x_4) \equiv 4 x_1 x_2 x_3 x_4 \pmod{T_g}, \tag{33}$$

$$x_1 x_2 [x_3, x_4] \equiv 0 \pmod{T_g}. \tag{34}$$

Доказателство: Сравнението (33) се получава от следната верига сравнения:

$$(x_1\circ x_2)(x_3\circ x_4)=(x_1x_2+x_2x_1)(x_3\circ x_4)=(x_1x_2)(x_3\circ x_4)+(x_2x_1)(x_3\circ x_4)$$
$$\equiv x_1x_2(x_3\circ x_4)+x_2(x_3\circ x_4)x_1$$
$$\equiv x_1x_2(x_3\circ x_4)+x_1x_2(x_3\circ x_4)=2x_1x_2(x_3\circ x_4)=2x_1x_2(x_3x_4+x_4x_3)$$
$$=2x_1x_2x_3x_4+2x_1x_2x_4x_3$$
$$\equiv 2x_1x_2x_3x_4+2x_4x_1x_2x_3\equiv 2x_1x_2x_3x_4+2x_1x_2x_3x_4=4x_1x_2x_3x_4 \pmod{T_g}.$$

При това ще отбележим, че това сравнение лесно се обобщава по индукция за $s>1$:

$$(x_1\circ x_2)\ldots(x_{2s-1}\circ x_{2s})\equiv 2^{s-1}x_1x_2\ldots x_{2s-2}(x_{2s-1}\circ x_{2s})\equiv 2^s x_1\ldots x_{2s} \pmod{T_g}.$$

Сравнението (34) пък следва от

$$0\equiv[x_1x_2x_3, x_4]\equiv x_1x_2x_3x_4-x_4x_1x_2x_3\equiv x_1x_2x_3x_4-x_1x_2x_4x_3$$
$$\equiv x_1x_2[x_3, x_4] \pmod{T_g}.$$

Нека A е подмногообразие на M и $f(x)=0$ да е едно негово определящо тъждество

$$f(x)=\sum_{\sigma}\alpha_\sigma x_{i_1}x_{i_2}\ldots x_{i_n} \quad (\alpha_\sigma\in F),$$

което, както знаем, можем да изберем полилинейно. Очевидно

$$f(x)\equiv\lambda_1x_1x_2x_3\ldots x_{n-1}x_n+\lambda_2x_2x_1x_3\ldots x_{n-1}x_n \pmod{T_g}.$$

В зависимост от коефициентите λ_1 и λ_2 могат да се разгледат следните случаи:

I. $\lambda_1=\lambda_2=0$. Тогава $f(x)\equiv 0 \pmod{T_g}$, т. е. $f(x)\in T_g$.

II. $\lambda_1+\lambda_2=0$, $\lambda_1\neq 0$. Тогава е в сила сравнението

$$f(x)\equiv[x_1, x_2]x_3x_4\ldots x_n \pmod{T_g}$$

или $[x_1, x_2]x_3x_4\ldots x_n=0$ в $M[v]$ и ако $n\geqq 4$, то $f(x)\in T_g$ според сравнението (34).

III. $\lambda_1+\lambda_2\neq 0$. Като извършим смяната $x_1\leftrightarrow x_2$, получаваме

$$f(v)\equiv(x_1\circ x_2)x_3x_4\ldots x_n \pmod{T_g}.$$

Оттук според (33), ако $n\geqq 4$, ще бъде изпълнено сравнението

$$f(v)\equiv x_1x_2\ldots x_n \pmod{T_g}.$$

По такъв начин получаваме, че ако за подмногообразието A едно от определящите тъждества е от степен $n\geqq 4$, то във всяка алгебра на A е изпълнено и тъждество

$$x_1x_2\ldots x_n=0.$$

Ако пък $n\leqq 3$, тъждествата са от вида $x_1x_2=0$, $[x_1, x_2]=0$, $x_1\circ x_2=0$, $x_1x_2x_3=0$, $x_1[x_2, x_3]=0$, $x_1(x_2\circ x_3)=0$.

Норма $N(A)$ на едно подмногообразие A ще наричаме дължината на най-късото тъждество, което не е от вида $x_1^{\varepsilon}[x_2, x_3]=0$ ($\varepsilon=0, 1$) и е определящо за A.

Лема 5. Ако A и B са две подмногообразия на M, то

$$N(AB)=N(A)N(B).$$

Доказателство. Да положим $N(A)=n$ и $N(B)=m$. Ако са изпълнени тъждествата $x_1x_2\ldots x_n=0$ (определящо за A) и $x_1x_2\ldots x_m=0$ (определящо за B), то в AB ще бъде изпълнено тъждество от вида $y_1y_2\ldots y_{nm}=0$, което ще бъде и най-късото определящо тъждество за AB, т. е. $N(AB)=N(A)N(B)$. Нека сега $N(A)=2(3)$, така че определящото тъждество да е от вида $(x_1\circ x_2)x_3^{\varepsilon}$ и $N(B)=m$. Тогава в AB ще бъде изпълнено тъждеството

$$(y_1\circ y_2)\ldots(y_{2m-1}\circ y_{2m})=0,$$

т. е.

$$y_1y_2\ldots y_{2m}=0 \quad (m\geqq 2),$$

респективно

$$(y_1\circ y_2)y_3\ldots(y_{3m-2}\circ y_{3m-1})y_{3m}=0,$$

т. е.

$$y_1y_2\ldots y_{3m}=0 \quad (m\geqq 2),$$

при което тези тъждества ще са определящи за подмногообразието AB, и то тъждества, имащи минимална дължина. Ако пък $N(A)=n$, $N(B)=2(3)$, то в AB ще бъдат изпълнени тъждествата

$$y_1y_2\ldots y_n\circ y_{n+1}\ldots y_{2n}=0,$$

т. е.

$$y_1y_2\ldots y_{2n}=0 \quad (n\geqq 2),$$

респективно

$$(y_1\ldots y_n\circ y_{n+1}\ldots y_{2n})y_{2n+1}\ldots y_{3n}=0,$$

т. е.

$$y_1y_2\ldots y_{3n}=0 \quad (n\geqq 2).$$

Остава случаят, когато $N(A)=2(3)$ и $N(B)=2(3)$ и определящите тъждества в двата случая са от вида $(x_1\circ x_2)x_3^{\varepsilon}$ ($\varepsilon=0, 1$). Тогава

$$((x_1 \circ x_2)\, x_3^{\varepsilon} \circ (x_4 \circ x_5)\, x_6^{\varepsilon})\,(x_7 \circ x_8)\, x_9^{\varepsilon})^{\eta}$$

$$= 2x_1x_2x_4x_5\,(x_3x_4)^{\varepsilon}\,((x_7 \circ x_8)\, x_9^{\varepsilon})^{\eta} = \begin{cases} 2x_1x_2x_4x_5x_7x_8\,(x_3x_6x_9)^{\varepsilon} & \eta = 1, \\ 2x_1x_2x_4x_5\,(x_3x_6)^{\varepsilon} & \eta = 0, \end{cases}$$

с което лемата е доказана.

Лема 6. Ако едно подмногообразие D_ε е определено с тъждеството $[x_1, x_2]\, x_3^{\varepsilon}$, то за всяко подмногообразие A имаме

$$AD_\varepsilon = D_\varepsilon A = M.$$

Доказателство. Твърдението е тривиално, като се има пред вид, че

$$[x_1x_2x_3, x_4] \equiv 0 \pmod{T_g}.$$

Да разгледаме сега полугрупата G, състояща се от целите неотрицателни числа и от два анихилатора w_0 и w_1, като умножение с тях дефинираме по следния начин:

$$n\omega_0 = \omega_0 n = 0 \qquad (n \geqq 2),$$

$$n\omega_1 = \omega_1 n = 0 \qquad (n \geqq 2),$$

$$\omega_0\omega_1 = \omega_1\omega_0 = 0.$$

Теорема 4. Групоидът на всички подмногообразия на M е изоморфен с полугрупата G.

Доказателство. На всяко подмногообразие A, отлично от D_0 и D_1, съпоставяме естестзеното число $N(A)$, а на D_0 и D_1 съпоставяме съответно ω_0 и ω_1. Твърдението на теоремата тогава следва непосредствено от леми 5 и 6.

Нека сега $(A_\alpha)_{\alpha \in I}$ е фамилия от алгебри над F. Да означим с $A = \prod_{\alpha \in I} A_\alpha$ множеството

$$\{f \mid f : I \to \bigcup_{\alpha \in I} A, \ f(\alpha) \in A_\alpha\}$$

и да въведем в него операциите

$$(f+g)(\alpha) = f(\alpha) + g(\alpha); \quad (fg)(\alpha) = f(\alpha)\, g(\alpha).$$

Получаваме така алгебра A, която ще наричаме **директно произведение** на алгебрите $(A_\alpha)_{\alpha \in I}$. Нека D е някакъв филтър в I. Да дефинираме тогава в A следната релация на еквивалентност: ще казваме, че $f \equiv g \pmod{D}$ точно тогава, когато множеството

$$\{\alpha \mid \alpha \in I, \ f(\alpha) = g(\alpha)\} \in D.$$

Фактор-алгебрата $\overline{A}$ по тази релация на еквивалентност ще наричаме **филтровано произведение на алгебрите** $(A_\alpha)_{\alpha \in I}$ **по филтъра** D и ще я бележим е $\prod_{\alpha \in I} A_\alpha / D$. С $\overline{f}$ пък ще бележим класа

на еквивалентност, който съдържа елемента $f \in A$. Филтровано произведение по максимален филтър в I (ултрафилтър) ще наричаме ултрапроизведение.

Нека сега $(A_\alpha)_{\alpha \in I}$ е фамилия от PI-алгебри. Означаваме $T_\alpha = T(A_\alpha)$ и $\overline{T} = T(\overline{A})$, където $\overline{A} = \prod_{\alpha \in I} A_\alpha / D$, а D е някакъв ултрафилтър в I.

Теорема 5. Ултрапроизведение на PI-алгебри е PI-алгебра, като при това $\overline{T} = \prod_{\alpha \in I} T_\alpha / D$.

Доказателство. Нека $p \in \overline{T}$ /$p(x_1, x_2, \ldots, x_n)$; можем, разбира се, да предполагаме полилинейно, ако $\overline{T}$ е T-идеал). Тъй като $p \in \overline{T}$, за всяка n-орка $\overline{f}_1, \ldots, \overline{f}_n \in \overline{A}$ ще имаме $p(\overline{f}_1, \ldots, \overline{f}_n) = 0$, т. е.

$\overline{p(f_1, f_2, \ldots, f_n)} = 0$, или все едно $\{\alpha \mid p(f_1, \ldots, f_n)(\alpha) = 0\} \in D$. Да разгледаме сега множеството

$$\{\alpha \mid p(a_1^\alpha, \ldots, a_n^\alpha) = 0, \ \forall (a_1^\alpha, \ldots, a_n^\alpha) \in A\}$$

$$= \{\alpha \mid p(f_1(\alpha), \ldots, f_n(\alpha) = 0 \ \forall (f_1, \ldots, f_n) \in A\} = \{\alpha \mid p(f_1, \ldots, f_n)(\alpha) = 0$$

$$\forall (f_1, \ldots, f_n) \in A\} \in D.$$

Следователно $\{\alpha \mid p \in T_\alpha\} \in D$, т. е. $p \in \prod_{\alpha \in I} T_\alpha / D$.

Обратно, нека $p \in \prod_{\alpha \in I} T_\alpha / D$. Тогава

$$\{\alpha \mid p(a_1^\alpha, \ldots, a_n^\alpha) \cdot \forall (a_1^\alpha, \ldots, a_n^\alpha)\} \in D.$$

Но за всяка n-орка имаме

$$p(\overline{f}_1, \ldots, \overline{f}_n) = \overline{p(f_1, \ldots, f_n)}.$$

Ако разгледаме множеството

$$\{\alpha \mid p(f_1, \ldots, f_n)(\alpha) = 0\} = \{\alpha \mid p(f_1(\alpha), \ldots, f_n(\alpha)) = 0\}$$

$$= \{\alpha \mid p(a_1^\alpha, \ldots, a_n^\alpha) = 0\} \in D,$$

получаваме $\{\alpha \ p(f_1, \ldots, f_n)(\alpha) = 0 \ \in D$, което показва, че $p \in \overline{T}$.

Нека сега $S \in D$. Означаваме $T_s = \bigcap_{\alpha \in S} T_\alpha$.

Теорема 6. За всяко $S \in D$ имаме $T_s \subset \overline{T}$ и $\bigcup_{s \in D} T_s = \overline{T}$.

Доказателство. Нека $p \in T_s$, т. е. $p \in T_\alpha$ за всяко $\alpha \in S$. Следователно за всяко $\alpha \in S$ ще имаме

$$p(a_1^\alpha, \ldots, a_n^\alpha) = 0$$

при произволни $a_i^\alpha \in A$. Нека $\overline{f}_1, \ldots, \overline{f}_n \in \overline{A}$ и да вземем произволни техни представители $f_1, f_2, \ldots, f_n$ в A. Тогава

$$f_i(\alpha)=a_i^\alpha \in A_\alpha \text{ и } p(\bar{f}_1,\ldots,\bar{f}_n)=\overline{p(f_1,\ldots,f_n)}=0.$$

Да разгледаме сега множеството

$$\{\alpha \mid p(f_1,\ldots,f_n)(\alpha)=0\}=\{\alpha \mid p(f_1(\alpha),\ldots,f_n(\alpha))=0\}$$
$$=\{\alpha \mid p(a_1^\alpha,\ldots,a_n^\alpha)=0\}\supset S.$$

Тъй като D е филтър, то $\{\alpha \mid p(f_1,\ldots,f_n)(\alpha)=0\} \in D$ и следователно $p \in \bar{T}$, което показва включването $T_s \subset \bar{T}$.

За да докажем втората част на теоремата, ще вземем пред вид, че за всяко $S \in D: T_s \subset \bar{T}$ и тогава $\bigcup_{S \in D} T_s \subset \bar{T}$. Обратно, ако $p \in \bar{T}$, то $S=\{\alpha \mid p \in T_\alpha\} \in D$, т. е. $p \in T_s$, а следователно и $p \in \bigcup_{S \in D} T_s$, което показва, че

$$\bigcup_{S \in D} T_s=\bar{T}.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Specht, W.: Gesetze im Ringen I. Math. Zeitschr. 52 (1950), 557—589.
2. Латышев, В. Н.: О шпехтовости некоторых многообразий ассоциативных алгебр. Алгебра и логика, 8 (1969), 660—673.
3. Amitsur, S. A.: Rational identities and applications to algebra and geometry. Journ. of algebra, 3 (1966), 304—359.
4. Лочев, К.: Квадратични алгебри. Изв. на МИ БАН, XI (1970), 247—255.
5. Гаврилов, М. Б.: О многообразиях ассоциативных алгебр. Докл. БАН, 21 (1968), № 10, 989—992.
6. Гаврилов, М. Б.: О некоторых T-идеалах в свободной ассоциативной алгебре. Алгебра и логика, 8 (1969), 172—175.

Постъпила на 24. XI. 1970 г.

SOME REMARKS ON PI-ALGEBRAS

M. B. Gavrilov, L. Iv. Davidov, Iv. K. Tonov

(SUMMARY)

Let $F[x]$ be the free associative algebra over the field F of characteristic 0. Using the notions of T-ideals, variety of PI-algebras, ultraproduct, adopted in the papers [1] and [5], the results obtained in the present paper can be formulated as follows:

1. The identity

$$d(x, y, z)=[xy+yx, z]\circ[[y, z], [x, z]]=0$$

follows from Hall's identity $h(x, y, z)=[[x, y]^2, z]=0$.
(This is an answer of a question put in [4]).

2. If T is T-ideal and $S_3(x_1, x_2, x_3) \in T$ or

$$[x_1, x_2, x_3, x_4]-\alpha[x_{i_1}\ x_{i_2}\ x_{i_3}\ x_{i_4}] \in T,$$

then T is finitely generated.

3. The grupoid of subvarieties of the variety M, generated by identity $[x_1\ x_2, x_3]=0$, is a semigroup.

4. If D is an ultrafilter in the set I and $(A_\alpha)_{\alpha\in I}$ is a family of PI-algebras, then $T(\prod_{\alpha\in I} A_\alpha/D)=\prod_{\alpha\in I} T(A_\alpha)/D$ and $\bigcup_{S\in D} T_s=T(\prod_{\alpha\in I} A_\alpha/D)$ where

$$T_s=\prod_{\alpha\in S} T(A_\alpha)$$

for any $S\in D$.