# ИНТЕРПОЛАЦИОННИ ФОРМУЛИ ЗА НЯКОИ КЛАСИ ОТ ЦЕЛИ ФУНКЦИИ. ТЕОРЕМИ ЗА ЕДИНСТВЕНОСТ

**Татяна Аргирова**

Тук се съдържат теореми, които установяват известна връзка между ръста и нулите на някои класи цели функции. Тези теореми се базират на развития на функциите в редове от елементарни дроби.

Нека $f(z)$ е цяла функция, която удовлетворява неравенството

$$|f(z)| \leq Le^{\alpha|y|}, \quad (z=x+iy,\ 0<\alpha<\pi),\ L=\text{const}, \tag{1}$$

за достатъчно големи стойности на $|z|$. За да получим едно представяне на тази функция в сбор от елементарни дроби, ще изследваме линейния интеграл

$$J_n = \int_{C_n} \frac{f(\zeta)\sin \pi\delta\zeta}{(\zeta-z)\sin \pi\zeta}\, d\zeta,$$

където $C_n$ е окръжността $|z|=r_n=n+\frac{1}{2}$ ($n$ достатъчно голямо), а $\delta$ е рационално число от вида $\frac{1}{q}$, за което $0<\pi\delta<\pi-\alpha$.

Като означим подинтегралната функция с $F(z)$, можем да напишем равенството

$$J_n = \operatorname{Res}(F;\ z) + \sum_{k=-n}^{n} \operatorname{Res}(F;\ k). \tag{2}$$

Ще покажем, че $J_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$. Като вземем пред вид условието (1) и факта, че функцията $\frac{1}{\sin \pi z}$ е ограничена в областта, която се получава, като от цялата равнина извадим достатъчно малки кръгчета около точките $z=k$ ($k=0,\ \pm 1,\ \pm 2, \ldots$), то за всяко $z$, за което $|y|\leq 1$, получаваме оценката

$$\left|\frac{f(z)\sin \pi\delta z}{\sin \pi z}\right| \leq L_1 e^{\alpha|y|}\left|\frac{1}{\sin \pi z}\right| \leq L_1 e^{\alpha}.\ M_1 = M_2. \tag{3}$$

При $y>1$ пък имаме

$$\frac{f(z)\sin\pi\delta z}{\sin\pi z} \leq \frac{Le^{\alpha y}(e^{\pi\delta y}+e^{-\pi\delta y})}{e^{\pi y}-e^{-\pi y}} \tag{4}$$

$$= \frac{Le^{(\alpha-\pi+\pi\delta)y}(1+e^{-2\pi\delta y})}{1-e^{-2\pi y}} \leq M_3.$$

Нека $M=\max M_2, M_3$. Като приложим (3) и (4), получаваме

$$J_n \leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{f(\zeta)\sin\pi\delta\zeta}{\zeta-z\ \sin\pi\zeta}\, d\zeta \leq \frac{r_n}{2\pi(r_n-z)}\int_0^{2\pi} \frac{f(\zeta)\sin\pi\delta\zeta}{\sin\pi\zeta}\, d\theta,$$

$$\int_0^{2\pi} \frac{f(\zeta)\sin\pi\delta\zeta}{\sin\pi\zeta}\, d\theta \leq \int_0^{\varepsilon} M\, d\theta + \int_{\varepsilon}^{\pi-\varepsilon} \frac{f(\zeta)\sin\pi\delta\zeta}{\sin\pi\zeta}\, d\theta$$

$$+\int_{\pi-\varepsilon}^{\pi+\varepsilon} M d\theta + \int_{\pi+\varepsilon}^{2\pi-\varepsilon} \frac{f(\zeta)\sin\pi\delta\zeta}{\sin\pi\zeta}\, d\theta + \int_{2\pi-\varepsilon}^{2\pi} M d\theta, \tag{5}$$

където $\varepsilon$ е достатъчно малко. Тъй като $\alpha-\pi+\pi\delta<0$, то

$$\int_{\varepsilon}^{\pi-\varepsilon} \frac{f(\zeta)\sin\pi\delta\zeta}{\sin\pi\zeta}\, d\theta \leq \int_{\varepsilon}^{\pi-\varepsilon} \frac{Le^{r_n(\alpha-\pi+\pi\delta)\sin\varepsilon}(1+e^{-2\pi r_n\sin\varepsilon})}{1-e^{-2\pi r_n\sin\varepsilon}}\, d\theta \longrightarrow 0$$

когато $n\to\infty$.

Същата оценка се отнася и за четвъртия интеграл отдясно в (5). Числото $\varepsilon$ можем да изберем колкото си искаме малко, следователно каквото и да е $\varepsilon_1$ (5) ни дава основание да заключим, че

$$J_n<\varepsilon_1 \text{ при } n>N, \text{ т. е. } J_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Като пресметнем резидуумите и направим граничен преход в (2), получаваме следното развитие на $f(z)$:

$$f(z)=\frac{\sin\pi z}{\sin\pi\delta z}\lim_{\substack{n\to\infty}}\sum_{k=-n}^{n}\frac{(-1)^k f(k)\sin\pi\delta k}{\pi(z-k)}$$

или

$$f(z)=\frac{\sin\pi z}{\sin\pi\delta z}\sum_{-\infty}^{\infty}\frac{(-1)^k f(k)\sin\pi\delta k}{\pi(z-k)}, \tag{6}$$

където $k \neq s.q$ $(s=0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$, $\delta = \frac{1}{q}$.

Така доказахме следната

Теорема 1. Ако $f(z)$ е цяла функция, подчинена на (1), то в сила е представянето (6).

Оттук веднага следва една теорема за единственост.

Теорема 1'. Нека $f(z)$ е цяла функция, за която важи (1). Нека освен това $f(z)$ се анулира за всяко цяло $k$ с изключение на числата $k=s.q$ $(s=0, \pm 1, \ldots)$. Тогава

$$f(z) \equiv 0.$$

Да разгледаме по-нататък случая $\alpha=\pi$. Нека $f(z)$ е цяла функция и нека

$$f(z) \leqq Le^{\pi y}, \quad L=\text{const}. \tag{7}$$

В този случай ще си послужим с интеграла

$$J_n = \int_{C_n} \frac{f(\zeta)\, d\zeta}{\zeta(\zeta - z)\sin \pi\zeta} \quad \left(C_n:\ z = r_n = n + \frac{1}{2}\right).$$

Ако $F(z)$ е функцията под интеграла, имаме

$$J_n = \operatorname{Res}(F; z) + \operatorname{Res}(F;\ 0) + \sum_{\substack{-n \\ k \neq 0}}^{n} \operatorname{Res}(F;\ k). \tag{8}$$

Съвсем лесно се проверява, че в разглеждания случай функцията $\frac{f(z)}{\sin \pi z}$ е ограничена в равнината без малки кръгчета около нулите на $\sin \pi z$, откъдето веднага следва, че $J_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$.

Чрез граничен преход в (8) получаваме

$$f(z) = z \sin \pi z \left[ \sum_{\substack{k=-\infty \\ k \neq 0}}^{\infty} \frac{(-1)^k \pi f(k)}{k(z-k)} + \frac{f'(0)\, z + f(0)}{\pi z^2} \right], \tag{9}$$

или следната

Теорема 2. Нека $f(z)$ е цяла функция, за която е изпълнено (7) Тогава тази функция се представя във вида (9). Ако при това $f(k)=0$ $(k=\pm 1, \pm 2, \ldots)$, то $f(z)$ има вида

$$f(z) = \frac{f'(0)\, z + f(0)}{\pi z} \sin \pi z.$$

Ако освен това и $f(0)=0$, но $f'(0) \neq 0$,

$$f(z) = \frac{f'(0)}{\pi} \sin \pi z \quad \text{или} \quad f(z) = C \sin \pi z.$$

Като поискаме и $f'(0)=0$, получаваме

$$f(z)\equiv 0.$$

Да направим едно приложение на теорема 2.

Лесно се проверява, че ако $\varphi(t)$ е ограничена и интегруема функция,

$$f(z)=\int_0^{\pi}\varphi(t)\sin zt\,dt$$

е цяла функция, удовлетворяваща условието (7). От това следва, че $f(z)$ може да се представи като сбор от елементарни дроби във вида (9),

Аналогично на теорема 1 и теорема 2, като се използува

$$J_n=\int_{C_n}\frac{f(\zeta)\,d\zeta}{(\zeta-z)\left(\sin\frac{\pi}{2}\zeta\right)^2},$$

се доказва и

Теорема 3. Нека $f(z)$ е цяла функция, изпълняваща условието (1). Нека точките $z=2k$ $(k=0,\ \pm 1,\ldots)$ са двойни нули на $f(z)$. В такъв случай $f(z)\equiv 0$. При $\alpha=\pi$ получаваме $f(z)=C\left(\sin\frac{\pi}{2}z\right)^2, C=\text{const}$.

По-нататък ще се занимаем с цели функции, подчинени на ограничението

(10) $$|f(z)|\leq Le^{\alpha(|x|+|y|)} \qquad (\alpha<\pi),\ L=\text{const},$$

за достатъчно големи стойности на $|z|$. За да получим и за тези функции резултати от вида на предните, ще изследваме линейния интеграл

$$J_n=\frac{1}{2\pi i}\int_{C_n}\frac{f(\zeta)\,d\zeta}{(\zeta-z)\sin\pi\zeta\sin\pi i\zeta},\quad C_n:\quad z=r_n=n+\frac{1}{2}.$$

Като означим подинтегралната функция с $F(z)$, можем да напишем равенството

(11) $$J_n=\sum_{\substack{k=-n\\k\neq 0}}^{n}\operatorname{Res}(F;k)+\sum_{\substack{k=-n\\k\neq 0}}^{n}(\operatorname{Res}F;\ ki)+\operatorname{Res}(F;z)+\operatorname{Res}(F;0).$$

Да покажем, че и в този случай $J_n\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}0$. Въз основа на (10), точно както в теорема 1, се вижда валидността на неравенствата

$$\left|\frac{f(z)}{\sin\pi z\sin\pi iz}\right|\leq L\frac{e^{\alpha|y|}}{|\sin\pi z|}\cdot\frac{e^{\alpha|x|}}{|\sin\pi iz|}\leq A.B \qquad (A=\text{const},\ B=\text{const}),$$

за всяко $z$ от равнината без малки кръгчета около точките $z=k$ и $z=ik$ $(k=0,\pm 1,\ldots)$. Оттук, пак както в теорема 1, заключаме, че

$$J_n\to 0,\ \text{когато}\ n\to\infty.$$

Чрез граничен преход в (11) получаваме развитието

$$(12)\qquad f(z)=\sum_{-\infty}^{\infty}\frac{i(-1)^{k+1}}{\pi\,\mathrm{sh}\,\pi k}\left[\frac{f(k)}{k-z}+\frac{f(ik)}{k+iz}\right]\sin\pi z\sin\pi iz$$
$$+\frac{\sin\pi z\sin\pi iz}{i\pi^2}\,\frac{f'(0)z+f(0)}{z^2}.$$

Така доказахме

Теорема 4. Всяка цяла функция, за която е в сила (10), може да се представи във вида (12). Оттук непосредствено следва

Теорема 4'. Ако $f(z)$ е цяла функция, удовлетворяваща условието (10), и $f(k)=0$, $f(ik)=0$ $(k=0,\ \pm1,\ldots)$, то $f(z)\equiv0$.

Да спрем вниманието си на случая $\alpha=\pi$. Нека $f(z)$ е цяла функция, за която е изпълнено условието

$$(13)\qquad |f(z)|\leq e^{\pi(x+y)}.$$

Целесъобразно е в този случай да използуваме интеграла

$$J_n=\frac{1}{2\pi i}\int_{C_n}\frac{f(\zeta)\,d\zeta}{(\zeta-z)^2\sin\pi\zeta\sin\pi i\zeta},\qquad C_n:|z|=n+\frac{1}{2}.$$

Очевидно $J_n\to0$ при $n\to\infty$. Като пресметнем съответните резидууми получаваме следното уравнение за функцията $f(z)$:

$$f'(z)-\pi f(z)(\mathrm{cotg}\,\pi z+i\,\mathrm{cotg}\,\pi iz)$$
$$=\sin\pi z\sin\pi iz\left\{\sum_{-\infty}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{\pi\sin\pi ik}\left(\frac{f(k)}{(k-z)^2}-i\,\frac{f(ik)}{(ik-z)^2}\right)+i\,\frac{f'(0)z^2-2f(0)z}{\pi^2z^4}\right\}.$$

Оттук при предположение, че $f(k)=0$, $f(ik)=0$ $(k=0,\ \pm1,\ \pm2,\ldots)$ $f'(0)=0$, получаваме

$$f'(z)-\pi f(z)(\mathrm{cotg}\,\pi z+i\,\mathrm{cotg}\,\pi iz)=0.$$

Всички функции, които удовлетворяват това уравнение, имат вида

$$f(z)=C\sin\pi z\sin\pi iz,\qquad C=\mathrm{const}.$$

Теорема 5. Единствените цели функции, подчинени на условието (13) и анулиращи се в точките $z=k$ и $z=ik$ $(k=0,\ \pm1,\ \pm2,\ldots)$, са функциите $f(z)=C\sin\pi z\sin\pi iz$ ($C$ е произволна константа).

Теорема 4 можем да приложим например за функцията

$$f(z)=\int_0^{\beta}\varphi(t)\sin zt\sin izt\,dt,\quad \beta<\pi,$$

където $\varphi(t)$ е ограничена и интегрируема функция, тъй като $f(z)$ очевидно удовлетворява условията на тази теорема.

Сега ще се убедим, че последната част на теорема 4 остава в сила и за функции с „по-малко" нули по реалната и имагинерна ос. За тази цел ще изучим интеграла

$$J_n=\frac{1}{2\pi i}\int_{z=n+\frac{1}{2}}\frac{f(\zeta)\prod_1^s(\zeta-k_r)\sin\pi\delta\zeta}{(\zeta-z)\sin\pi\zeta\sin\pi i\zeta}\,d\zeta,$$

където $k_r$ $(r=1,2,\ldots,s)$ са цели числа, а $\delta$ е рационално число от вида $\delta=\frac{1}{q}$, за което $\alpha+\pi\delta-\pi<0$.

Най-напред ще оценим функцията

$$\varphi(\zeta)=\frac{f(\zeta)\sin\pi\delta\zeta}{\sin\pi\zeta\sin\pi i\zeta}\qquad(\alpha+\pi\delta-\pi<0).$$

$$\varphi(\zeta)=\frac{Le^{(\alpha+\pi\delta)y}}{\sin\pi\zeta}\cdot\frac{e^{\alpha x}}{\sin\pi i\zeta}(1+e^{-2\pi\delta y})=A.B.C,$$

тъй като и трите множителя са ограничени в равнината, от която са извадени достатъчно малки кръгчета около точките $z=k$ и $z=ik$. Като използуваме това, за $J_n$ получаваме оценките

$$J_n=\frac{1}{2\pi}\frac{\prod_1^s(r_n+k_r)}{r_n-z}r_n\int_0^{2\pi}\varphi(\zeta)\,d\theta=A_n\cdot\int_0^{2\pi}\varphi(\zeta)\,d\theta$$

$$\leqq A_n\left\{\int_0^{\frac{\pi}{2}-\varepsilon}\varphi(\zeta)\,d\theta+\int_{\frac{\pi}{2}-\varepsilon}^{\pi-\varepsilon}\varphi(\zeta)\,d\theta+\int_{\pi-\varepsilon}^{\frac{3\pi}{2}-\varepsilon}\varphi(\zeta)\,d\theta+\int_{\frac{3}{2}-\varepsilon}^{2\pi-\varepsilon}\varphi(\zeta)\,d\theta\right.$$

$$\left.+\int_{2\pi-\varepsilon}^{2\pi}\varphi(\zeta)\,d\theta\right\}\quad\left(A_n=\frac{1}{2\pi}\frac{\prod_1^s(r_n+k_r)}{r_n-z}r_n\right).$$

От своя страна

$$A_n \int_0^{\frac{\pi}{2}-\varepsilon} \varphi(\zeta)\, d\theta = A.C.\, A_n \int_0^{\frac{\pi}{2}-\varepsilon} \frac{e^{(\alpha-\pi) r_n \cos\theta}}{1-e^{-2\pi r_n \cos\theta}}\, d\theta$$

$$= A.C.\left(\frac{\pi}{2}-\varepsilon\right) A_n \cdot \frac{e^{(\alpha-\pi)\cos\left(\frac{\pi}{2}-\varepsilon\right) r_n}}{1-e^{-2\pi\cos\left(\frac{\pi}{2}-\varepsilon\right) r_n}} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

$$A_n \int_{\frac{\pi}{2}-\varepsilon}^{\pi-\varepsilon} \varphi(\zeta)\, d\theta = B.C.\, A_n \int_{\frac{\pi}{2}-\varepsilon}^{\pi-\varepsilon} \frac{L e^{(\alpha+\pi\delta-\pi) r_n \sin\theta}}{1-e^{-2\pi r_n \sin\theta}}\, d\theta \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Третия и петия интеграл, фигуриращи по-горе, оценяваме точно както първия, а четвъртия — като втория. В крайна сметка получаваме

$$J_n \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Оттук, като пресметнем съответните резидууми, получаваме

$$(14) \qquad f(z) = \frac{\sin\pi z \sin\pi i z}{\prod_{r=1}^{s}(z-k_r)\sin\pi\delta z} \left[ \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^k f(k) \prod_1^s (k-k_r)\sin\pi\delta k}{\pi(z-k)\sin\pi i k} - \right.$$

$$\left. + \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^k f(ik) \prod_1^s (ik-k_r)\sin\pi\delta ik}{i\pi(z-ik)\sin\pi i k} + \frac{i\delta(-1)^{s+1}}{\pi z} f(0) \prod_{r=1}^{s} k_r \right].$$

С това доказахме

**Теорема** 6. Нека $f(z)$ е цяла функция и нека $f(z) \leqq L.e^{\alpha(x+y)}$ $(\alpha<\pi)$. Тогава $f(z)$ притежава развитието (14) $\left(\delta = \frac{1}{q}\right.$ е описаното по-горе число, за което $\alpha+\pi\delta-\pi<0$). Ако при това $f(k)=0$ $(k=0, \pm 1, \ldots)$, но $k \neq k_1, k_2, \ldots, k_s$, $k \neq q.m$ $(m=0, \pm 1, \ldots)$ и $f(ik)=0$ $(k=0, \pm 1, \ldots)$, то $f(z)\equiv 0$.

Очевидно втората част на теоремата ще бъде в сила и като махнем краен брой нули на $f(z)$, произволно избрани по имагинерната ос, и още безбройно много от специален вид, пак по имагинерната ос.

Теореми, аналогични на теоремите 4, 4', 5 и 6, са валидни и за функции, нулите на които са разположени по произволно избрани краен

брой прави през началото, като, разбира се, функциите са подчинени на съответни ограничения.

Накрая да отбележим, че с помощта на метода, използван при доказателствата на горните теореми, могат да се получат развития и да се докажат теореми за единственост и за мероморфни функции, подчинени на условията (1), (7), (10) и (13), както и функции от ред, по-висок от първи.

## ЛИТЕРАТУРА

Boas, R. P., Jr.: Entire Functions. New York, 1954.

Постъпила на 16. XI. 1971 г.

# INTERPOLATION FORMULAS FOR SOME CLASSES OF ENTIRE FUNCTIONS. UNIQUENESS THEOREMS

T. Argirova

(SUMMARY)

This paper contains some theorems, which establish connection between the growth and the zeros of some classes of entire functions. They are based on expansions of these functions in series of partial fractions.

Theorem 1. If $f(z)$ is an entire function, for which the condition (1) holds, then $f(z)$ has the expansion (6).

Theorem 1'. Let $f(z)$ be a function, that satisfies the assumptions of Th. 1. Moreover, $f(k)=0$ $(k=0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$, $k \neq qs$ $(s=0, \pm 1, \ldots)$, $\alpha+\frac{\pi}{q}-\pi<0$. Then $f(z)\equiv 0$.

Theorem 2. If $f(z)$ is an entire function, subjected to the condition (7), then $f(z)$ can be written in the form (9). Moreover, if $f(k)=0$ $(k=0, \pm 1, \ldots)$, $f'(0)\neq 0$, then $f(z)=C\sin\pi z$ ($C=$ sonst). If we suppose in addition that $f'(0)=0$, then $f(z)\equiv 0$.

Theorem 5. The only entire functions, satisfying the condition (13), for which $f(k)=0$, $f(ik)=0$ $(k=0, \pm 1, \ldots)$, are $f(z)=C\sin\pi z \sin\pi i z$ ($C=$ const).

Theorem 6. Let $f(z)$ be an entire function and $|f(z)|\leq Le^{\alpha(|x|+|y|)}$ $(\alpha<\pi)$. Then $f(z)$ can be expanded in a series of the kind (14) $\left(\delta=\frac{1}{q}\right.$ is the number described before for which $\alpha+\pi\delta-\pi<0$). If $f(k)=0$ $(k=0, \pm 1, \ldots)$, but $k\neq k_1, k_2, \ldots, k_s$, $k\neq q.m$ $(m=0, \pm 1, \ldots)$ and $f(ik)=0$ $(k=0, \pm 1, \ldots)$ else, then $f(z)\equiv 0$.

It is necessary to mention that theorems analogical to the proved can be established for meromorphic functions.