О ПРОИЗВОДНОЙ ЛИ В БАНАХОВЫХ МНОГООБРАЗИЯХ И О НЕКОТОРЫХ ЗАМЕЧАТЕЛЬНЫХ ДВИЖЕНИЯХ В СПЛОШНЫХ СРЕДАХ*

Георги Георгиев

За последнее время в дифференциальной геометрии и ее приложениях сильно возрос интерес к исследованиям бесконечномерных пространств и многообразий и усиленно разрабатывается, наряду с специфической проблематикой, распространение классической проблематики на этот случай. Это объясняется первым долгом закономерным движением современной математики в целом, которое индуцирует соответственный прогресс в дифференциальной геометрии и в смежных областях. Так например всесторонне исследуются различные свойства и аспекты линейного анализа в гильбертовых, банаховых и более общих ТВП (топологических векторных пространствах), а также нелинейного анализа — в дифференцируемых или аналитических многообразиях, у которых модели суть вышеупомянутые ТВП. Все это можно объяснить и тем, что для более глубокого исследования конечномерных пространств и многообразий нередко необходимо делать экскурс и прибегать к бесконечномерному случаю. Достаточно напомнить например то, что совокупность векторных полей на поверхности или, более общо, в римановых пространствах будет ВП (ВП — векторное пространство) и даже алгеброй Ли бесконечного числа измерений. Также множество диффеоморфизмов на тех-же многообразиях, оставляющие инвариантной площадь или объем, образует группу бесконечного порядка, называемую группой Ли-Банаха преобразований. В связи с этим поучительно заглянуть в последний, 4-тый том, трактата „Элементы Анализа" Ж. Дьедонне, в котором автор, продолжая изложение дифференциальной геометрии конечномерных многообразий, нередко прибегает к бесконечномерным образам.

Начала в этом направлении можно найти еще в работах Фреше и Вольтерры, а что касается групп Ли-Банаха, то они находятся уже в монографиях Гильберта, Фредгольма и Дельсарта. В связи с задачами дифференциальной геометрии — исследования многообразий и непрерывных групп с бесконечным числом измерений, то они имеют свой источник в работах Гр. Моисила тридцатых годов под видом фунциональных многообразий в пространстве функ-

* Доклад, представленный на 3. конгрессе болгарских математиков, Варна, 1972.

ций с суммируемым квадратом; но эти работы долгое время остались незамеченными. Разработка в этом направлении, называемом за последнее время глобальным анализом, как независимая дисциплина датирует всего 10—15 лет; но она быстро успела установить связь с почти всеми отраслями современной математики, физики и других наук. В связи с этим достаточно сослаться на обзорные доклады последних лет С. Смейла и Ж. Эллса младшего. В I-ой части доклада рассмотрим вопрос распространения на БМ (БМ — Банаховое многообразие), производной Ли, введенной В. Слебодзиньским в 1931 г. и её применения к линейным геометрическим объектам, единственные, по моему, для которых этот оператор оказался эффективным. Производная Ли как и метод подвижного репера показывают насколько животворны некоторые операторы и алгорифмы из недавнего прошлого.

Вторая часть доклада посвящена различным приложениям оператора Ли в механике сплошных сред, моделью для которых служат многообразия с метрической структурой и в частности ГМ (гильбертовы многообразия). Будет идти речь об обобщении некоторых замечательных потоках из классической гидромеханики как бернуллиевые, винтовые, квази-твердые и другие движения. Установим для каждого из них геометрические и кинематические свойства, вообще, аналогичные со свойствами при соответствующем классическим случаем. В частности исследуется существование и широта регулярных решений этих движений в релятивистской гидродинамике и магнитогидродинамике.

Вместо двух возможных крайностей — обстоятельного изложения всех необходимых понятий и используемых свойств, или, ссылки где их можно найти, предпочту прибегать к кратким наброскам, замечаниям и отступлениям.

I. О производной Ли в БМ

1. Начнем с замечания о тензорном произведении ВП и связанных с ним понятиями. Мы не сможем использовать определение, которое дается обычно в тензорной алгебре по Бурбаки, то-есть посредством категории билинейных отображений начального (исходного) элемента и принципа универсальности и вот почему: тензорное произведение двух БП (БП — банаховое пространство) вообще говоря не имеет нормы, а потому не является БП. Для бесконечномерного случая используем следующее определение, которое сводится к известному определению, когда сомножители конечномерны.

Пусть $E, F, \ldots$ ВП над K (R или C) со счетными базисами, E^*, $F^*, \ldots$ сопряженные к ним ВП, то-есть совокупности линейных отображений $\theta: E \to K$, а также $L_2(E^*, F^*; K)$ ВП билинейных отображений $\varphi: E^* \times F^* \to K$. Для каждой пары элементов $(e, f) \in E \times F$, определим билинейную форму, которую называем тензорным произведением $(e^*, f^*) \to e \otimes f = \langle e, e^* \rangle \langle f, f^* \rangle$, где $\langle e, e^* \rangle = e^*(e)$ есть значение линейной формы e^* для e. Совокупность $\{e \otimes f\}_{\substack{e \in E \\ f \in F}}$ таких билинейных

форм $E\otimes F\subset L_2(E^*, F^*; K)$ будет очевидно ВподП; оно будет собственным подпространством при всех возможностях кроме случая, когда оба множителя конечномерны и тогда это определение совпадает с хорошо известным. Если $(e_i)_{i\in I}\in E$ и $\{f_\alpha\}_{\alpha\in A}\in F$ суть счетные базисы, то в $E\otimes F$ соответствующим базисом является $\{e_i\otimes f_\alpha\}_{\substack{i\in I\\ \alpha\in A}}$, что сводится к проверке, что эти последние дают свободное семейство образующих в тензорном произведении. Аналогично можно ввести эти понятия и для A-модулей над коммутативным кольцом A. Итак для нас впредь тензорное произведение будет известным частным случаем билинейных отображений, а тензорная алгебра над E будет

$$T(E)=\sum_{p=0}^{\infty}{}' (\overset{p}{\otimes}E),$$

то-есть прямая сумма тензорных степеней ВП E. Более того, аффинно-тензорная алгебра над E будет дана прямой суммой: $T(E+E^*)=K\oplus E\oplus E^*\oplus\ldots$

Внешняя алгебра над E есть фактор-алгебра $\Lambda(E)$ тензорной алгебры над E по двухстороннему идеалу H с образующими $\{e\otimes e\}_{e\in E}$, то-есть

$$\Lambda(E)=T(E)/H=\sum_{p=0}^{\infty}{}' \Lambda^p(E),\ \text{где}\ \Lambda^0(E)=K,\ \Lambda^1(E)=E,\ \Lambda^2(E)=E\wedge E,\ldots$$

Теперь ясно, что если $E, F,\ldots$ будут БП, то-есть полное нормированное ТВП, то и $E^*, F^*,\ldots$, а также $L(E^*, F^*; K)$ будут тоже БП. Так как $E\otimes F$ есть замкнутое ВподП последнего, то индуцируя норму из $L(E^*, F^*; K)$ в $E\otimes F$ оснащаем таким образом наше подпространство структурой БП. В связи с этим напомню, что если e норма элемента $e\in E$, то на сопряженном БП E^*, норма $e^*\in E^*$ будет $e^*=\{\inf M\,(M\in R_+)$ так, чтобы $<e, e^*>\leq M\,\|e\|\}$.

Аналогично, норма формы $\varphi\in L(E^*, F^*; K)$ будет $\|\varphi\|=\{\inf M\,(M\in R_+)$ так, чтобы $|\varphi(e^*, f^*)|\leq M\,\|e^*\|\,\|f^*\|\}$. Напомню, что линейная алгебра L будет БА (БА банаховая алгебра), если L есть БП, в котором норма произведения удовлетворяет неравенству $\|u\cdot v\|\leq\|u\|\cdot\|v\|$. В частности, если E БП, то тогда внешняя алгебра $\Lambda(E)$ будет БА, так как имеем

$$\|u\wedge v\|\leq\|u\|\cdot\|v\|.$$

Так-же пусть G есть алгебра Ли, то-есть ВП, оснащенное скобкой, удовлетворяющей тождествам $[x, x]=0$, и $[[x_{(1}, x_2], x_{3)}]=0$ (Якоби). Если G есть БП и скобка выполняет условие $\|[x_1, x_2]\|\leq 2\,\|x_1\|\cdot\|x_2\|$, то G будет алгеброй Ли-Банаха, и т. д.

2. ВП с метрической структурой. В связи с ВП сделаем еще одно отступление, необходимое для второй части доклада. Если ВП E

над K (R или C) оснащено данной билинейной формой $g: E \times E \to K$, то есть удовлетворяет условиям

1) $g(\lambda^a x_a, y) = \lambda^a g(x_a, y)$,

2) $g(x, \mu^b g_b) = \mu^b g(x, y_b)$, которая при $K = C$ может быть

2′) $g(x, \mu^b y_b) = \mu^b g(x, y_b)$ (эрмитовой), то мы говорим, что дано скалярное произведение или метрика g на E.

Если g подчинено еще условию:

3) $g(x, x) \neq 0$ для $x \neq 0$, то метрика положительно определена; или, более слабому условию 3′) если $g(x, y) = 0$ для x, то $y = 0$, мы говорим, что метрика регулярна.

Билинейный тензор часто бывает еще подчинен и условию

4) $g(x, y) = \varepsilon g(y, x)$ $\left(\varepsilon = \begin{cases} 1 \\ -1 \end{cases}\right)$ или 4′) $g(x, y) = \varepsilon g(y, x)$ (при $K = C$);

тогда метрика $\begin{cases} \text{симметрична} \\ \text{симплектична} \end{cases}$.

ВП, оснащенное тензором g, удовлетворяющим аксиомам 1, 2, 3 или 3′, называется обобщенным евклидовым пространством; если-же удовлетворяет 1, 2, 3 (3′), 4_1, то имеем евклидово (псевдоевклидово) пространство; здесь включены и ГП (гильбертовы пространства). При $K = C$, если имеем 1, 2′, 3, $4_1'$, то получаем унитарные пространства, где включены и комплексные ГП. Наконец, если имеем 1, 2, 3, 4_2 или $4_2'$, то получаем симплектические пространства.

При выборе счетного базиса на E можно пользоваться матричной записью $g(x, y) = {}^tXGY$, где G — обобщенная матрица Грама, а X и Y — одноколонные координатные матрицы. Так как G неособенная матрица, то она имеет обратную G^*, а соответствующий контравариантный тензор g^* дает метрику на E^*. Во всех упомянутых случаях тензор g (матрица G) определяет канонический изоморфизм $E \to E^*$ между векторами и линейными формами, который позволяет их отождествлять; он выражается через $x \to \omega_x = C(X \otimes G)$, то-есть через тензорное произведение и свертывание. В индексной записи имеем равенство $\omega_i = x^j g_{ji}$. Обратный изоморфизм $E^* \to E$ будет дан $\omega \to x_\omega = C(\omega \otimes G^*)$ или в индексной записи через $x^i = g^{ij} \omega_j$.

В связи с операцией свертывания в ГП и в БП есть интересная статья Х. Хаахти (H. Haavti) в Ann. Acad. Fennicae, 1971, №466, озаглавленная Über Tensorverjungung in unendlichdimensionaler Geometrie, в которой разносторонне рассматривается этот вопрос. Мы везде предполагаем, что условия возможности свертывания удовлетворены; это у нас сводится к тому, что соответствующие числовые ряды сходятся.

Впредь, когда будем говорить о ТВП с метрической структурой, то будем подразумевать БП, оснащенные с метрическим тензором, проверяющий одну из ранее упомянутых серий аксиом, куда в част-

ности входят ГП. Это мы распространим позже на многообразия с метрической структурой

Замечание. В последнем выпуске (№ 3, 1972 г.) Изв. высш. уч. зав. аннонсирована одна интересная в нашем контексте теорема В. А. Хацкевича. Пусть E БП с индефинитной метрикой g, которая индуцирует в E^* метрику g^*. Обозначим через E^+ и E^- ВподП E_1, в которых метрика определена положительно и соответственно отрицательно. Если E рефлексивно (то-есть $(E^*)^* = E$), а E^* содержит регулярную сферу и имеем $E^+ \cap E^- = \varnothing$, то тогда $E = E^+ \oplus E^-$. Таким образом, в условиях теоремы можно говорить о БП и БМ с недефинитной метрикой.

3. Следующее замечание касается **дифференцирований на градуированных алгебрах.** Градуированная алгебра L над K образована из счетного семейства подП L^p $(p \in Z)$, выполняющих условия:

1) $L = \sum_{-\infty}^{\infty} L^p$, 2) $L^p . L^q \subset L^{p+q}$ и 3) $K \subset L^0$ — подП подалгебры L^0.

Если $u_p . v_q = (-1)^{pq} v_q . u_p$ $(u_p \in L^p,\ v_q \in L^q)$, то L антикоммутативная градуированная (= град.) алгебра, а если-же L одновременно и асоциативна, то имеем внешнюю алгебру, для которой умножение $\wedge$ называется внешним. Важным примером для нас будет внешняя алгебра $\Lambda(E)$ над ВП E, для которой все $\Lambda^p(E) = 0$ для $p < 0$.

Предполагаем, что внешняя алгебра L обладает линейной системой образующих, то-есть принадлежащих L^0 и L^1. Так например, если $(e_i)_{i \in I} \in E$ — счетный базис, то $1 \in E^0 = K$ и e_i будет линейной системой образующих для $\Lambda(E)$.

Определение. Линейный эндоморфизм град. алгебры $D \in \mathrm{End}(L)$ называется дифференцированием (дифф-вание) степени $p \in Z$ если выполняются условия:

а) $DL^n \subset L^{n+p}$ и б) $D(u_m . v_n) = Du_m . v_n + (-1)^{pm} u_m Dv_n$. Следствие:, $D\lambda = 0$ $(-\lambda \in K)$. Если L — внешняя алгебра и D, D' дифференцирования степени p и p', то скобка $[D, D'] = DD' - (-1)^{pp'} D'D$ будет также дифференцированием степени $p + p'$ и она выполняет:

$$[D, D'] = (-1)^{pp'+1} [D', D] \text{ и } [[D, D'], D''] = [D, [D', D'']] - (-1)^{pp'} [D', [D, D'']].$$

Когда степень p нечетна (четна), то говорим, что D есть антидифф-вание (собственное дифф-вание). Из вышесказанного следуют свойства:

а) если D — антидифф-вание, то D^2 будет дифф-ванием степени $2p$ (или нулем);

б) если D, D' суть антидифф-вания (дифф-вания), то $DD' + D'D$ $(DD' - D'D)$ будет дифф-ванием (в обоих случаях);

в) если D — дифф-вание, а D' — антидифф-вание, то их скобка будет антидифф-ванием.

Примеры. 1) Пусть $\Lambda(E^*)$ внешняя алгебра над E^*, тогда адъюнктный (сопряженный) оператор внешнего произведения в $\Lambda(E)$, определенный соотношением

$$<X_2\wedge\ldots\wedge X_p\ i_X\omega> = <X\wedge X_2\wedge\ldots\wedge X_p\ \omega>(X,\ X_2,\ \ldots\in E,$$

$$\omega\in\Lambda^p(E^*)) \text{ где } <u\,\omega> = p!\ <u;\ \omega> \quad (u\in\Lambda^p(E)),$$

называется внутренним произведением по X. Из определения следует, что i_X является антидифф-ванием степени $p=-1$ и что $i_X^2=0$.

2) Пусть $\mathbf{G}$ алгебра Ли; $\mathbf{G}$ можно считать град. алгеброй с $\mathbf{G}^0=K$, $\mathbf{G}^1=\mathbf{G}$, $\mathbf{G}^p=0$ $p\neq 0,1$. $\mathbf{G}$ антикоммутативна, но не ассоциативна, а потому она не будет внешней алгеброй. В этом случае эндоморфизм

$$\mathrm{ad}_X:\ \mathbf{G}\to\mathbf{G}\ \begin{cases}\mathrm{ad}_X(\lambda)=0,\ \lambda\in K\\ \mathrm{ad}_X(y)=[x,\ y],\ y\in\mathbf{G}\end{cases}$$ будет дифф-ванием степени $p=0$,

что следует из тождества Якоби.

Определение. Внешняя алгебра L называетя дифференциальной, если она оснащена антидифф-ванием степени $p=1$, то-есть $d\,L^p\subset L^{p+1}$, $d(u_p\wedge v_q)=du_p\wedge v_q+(-1)^p u_p\wedge dv_q$ и выполняет еще условие $d^2=0$. Оператор d называется тогда внешним дифф-ванием. Если L имеет линейная система образующих, то достаточно определить d на L^0 и L^1.

Важный частный случай. Если внешний дифф-л (=дифференциал) d определен на $\Lambda(E^*)$, так как на $\Lambda(E^*)$ имеем еще и оператор i_X внутреннего умножения, то в силу свойства (в) получаем замечательную формулу

$$\text{(EC)}\qquad L_X=di_X+i_Xd,$$

которая определяет дифф-вание степени $p=0$ на $\Lambda(E^*)$, называемое производной Ли по X, присоединённое оператору d.

Замечание. Из формулы (EC) следует между прочим возможность определить внешний дифф-л на $\Lambda(E^*)$, если там дана производная Ли.

4. Дифференциал Фреше и внешнее дифф-вание на БП. Пусть $f:U\subset E\to F$ будет локальным отображением двух БП и $x\in U$. Говорим, что f дифференцируемо в смысле Фреше в точке x, если существует линейное непрерывное отображение $f'(x)\in L(E,F)$ такое, что для каждого $h\in E$, для которого $x+h\in U$, имеет место

$$f(x+h)=f(x)+f'(x)h+\|h\|\,\varepsilon(x,h),\ \text{где}\ \varepsilon(x,h)\to 0\ \text{когда}\ h\to 0.$$

Тогда $f'(x)h$ будет дифференциалом и $f'(x)$ производной Фреше. Если это имеет место в каждой точке $x\in U$ и $f'(x)$ зависит непрерывно от x, то говорим, что отображение f класса C^1. Так напр. какое либо ЛНО (линейное непрерывное отображение) $A:E\to F$ есть класса C^1 и $A'(x)=A$.

Если, в свою очередь, $f': U \to L(E, F)$ будет класса C^1, то f — класса C^2 и для каждого $x \in U$ существует $f''(x) \in L(E, L(E, F))$ — вторая производная Фреше и т. д. В теории билинейных НО БП доказывается, что БП $L(E, L(E, F))$ изометрически изоморфно БП $L_2(E, F)$ биЛНО $E \times E \to F$, а потому $f''(x) \in L_2(E, F)$. Более того, нетрудно установить, что $f''(x) \in L_2^s(E, F)$, то-есть принадлежит подП билинейных симметрических отображений. Это справедливо и для производных Фреше высшего порядка.

Пример. Если $E = R^n$, $F = R^m$ и $f: U \subset R^n \to R^m$ отображение класса C^2, то при индексной записи $f'(x)$ (где $x \in R^n$) выражается через матрицу типа $[m, n]$, а $f''(x)$ — через матрицу типа $[m, n^2]$ и т. д., а в общем случае через бесконечные числовые матрицы.

Установим сейчас связь между производной Фреше и внешним дифф-лом в БП. Снова, пусть $U \subset E$ открытое подмножество БП E, $\Lambda^p(U, R)$ БП внешних дифф-льных p-форм, определенных над U и имеющих значения в R. Тогда $\Lambda(E^*) = \sum_{p=0}^{\infty} \Lambda^p(U, R)$. Напр. форма Пфаффа ω дана отображением класса не менее C^2 $\omega: U \subset E \to E^*$, где $x \to \omega(x) = \omega_x$. Ее значение для $X \in E$ обозначим через $\langle X, \omega_x \rangle = \omega(x, X)$. Используя первую производную Фреше ω_x', внешний дифф-л $d\omega_x$ определяется посредством альтернирования через

$$(d\omega_x)(X_0, X_1) = (\omega_x' . X_0) X_1 - (\omega_x' . X_1) X_0 \quad (x \in U, X_0, X_1 \in E). \bullet$$

Аналогично для p-форм будем иметь

$$(d\Omega_x)(X_0, \ldots, X_p) = \sum_{i=0}^{p} (-1)^i (\Omega_x' . X_i)(X_0, \ldots, X_i, \ldots, X_p).$$

Из определения и после несложных выкладок констатируем, что d есть оператор антидифф-вания степени $p = 1$ на $\Lambda(E^*)$ и $dd = 0$; это соотношение справедливо, так как вторая производная Фреше симметрична и потому ее альтернирование приводит к нулю. Это оправдывает данное название для d. Итак $\Lambda(E^*)$ есть внешняя дифференциальная алгебра над БП E. А потому, используя формулу (ЕС), мы получаем производную Ли по X, которая в данном случае сводится к производной Фреше по направлению X отображения $\omega: U \to E^*$. Проверим это:

для $p = 0, 1$ имеем очевидно $(df)(x)(X) = f'(x)X$, $(d\omega_x)(X_0, X_1)$

$$= (\omega_x' . X_0) X_1 - (\omega_x' . X_1) X_0.$$

Так как $i_X f = 0$, $i_X \omega = \langle X, \omega \rangle$ и в частности $i_X df(x) = \langle X, df(x) \rangle = Xf_X$, используя формулу (ЕС), получаем

$$(L_X f)(x) = f'(x) \cdot X = Xf_x, \quad L_X \omega_x = \omega' X_x$$

и вообще имеем

$$L_X \Omega_{fx} = \Omega' X_{fx}.$$

5. Перейдем к следующему весьма **важному примеру**. Пусть B метрическое пространство, а $K = R$ или C. Как известно из элементов функционального анализа множество $C_k(B)$ действительных или комплексных функций на B, то-есть совокупность непрерывных ограниченных отображений $f: B \to K$ есть БП; более того $C(B)$ образует БА, так как $f \cdot \varphi \leq f \cdot \varphi$. Нас будет интересовать случай, когда B локально или глобально гомеоморфно БП E. Известно также, что подмножество $F(B) \subset C(B)$ всех C^∞ дифференцируемых действительных функций на B образует кольцо.

Возьмем F — модуль $\mathbf{M}$, то-есть двусторонний модуль над кольцом $F(B)$, и построим над $\mathbf{M}$ тензорную $T(\mathbf{M})$, аффинно-тензорную $T(\mathbf{M} + \mathbf{M}^*)$ и внешнюю $\Lambda(\mathbf{M})$ град. алгебру с линейной системой образующих, где

$$T^0(\mathbf{M}) = \Lambda^0(\mathbf{M}) = F(B), \quad T^1(\mathbf{M}) = \Lambda^1(\mathbf{M}) = \mathbf{M}. \quad \text{и т. д.}$$

Если F — модуль $\mathbf{M}$ оснащен скобкой $[X, Y] \in \mathbf{M}$ $(\forall X, Y \in \mathbf{M})$, то $\mathbf{M}$ есть алгебра Ли и мы сейчас можем предположить, что на ней определена производная Ли по $X \in \mathbf{M}$ через соотношения $L_X f = Xf$, $L_X Y = [X, Y]$.

Отсюда следует первым долгом, что оператор Ли обладает свойствами:

1) $L_{X+Y} Z = L_X Z + L_Y Z$, $L_{\lambda X} Z = \lambda L_X Z$ $(\lambda \in K)$;

2) $L_X(Y + Z) = L_X Y + L_X Z$, $L_X(\varphi Y) = X\varphi \cdot Y + \varphi L_X Y$ $(\varphi \in F(B))$;

3) L_X является локальным оператором, то-есть для открытия $U \subset \mathbf{M}$ имеем $L_{X|U} Y_{|U} = L_X Y_{|U}$. Сейчас можем вычислить $L_{fX}(\varphi Y) = f\varphi L_X Y + f(X\varphi)Y = \varphi(Yf)X$, а это показывает, что $L_{fX} = fL_X$. Используя 1, 2, 3 и полагая, что сохраняется основное свойство L_X быть дифф-ванием степени $p = 0$, оператор распространяется на $T(\mathbf{M})$ по формуле $L_X(Y \otimes Z) = L_X Y \otimes Z + Y \otimes L_X Z$ и т. д., а на $\Lambda(\mathbf{M}^*)$ посредством формулы $(L_X \omega)(Y) = X(\omega(Y)) - \omega(L_X Y)$, которая получается, применяя оператор Ли функции $\omega(Y) = \langle Y, \omega \rangle$, откуда следует $L_X(\omega(Y)) = \omega(L_X Y) + (L_X \omega)(Y)$.

Имея производную Ли пфаффовых форм, выводится аналогично формула для какой-либо p-формы:

$$(L_X U_p)(X_1, \ldots, X_p) = X(U_p(X_1, \ldots, X_p)) - \sum_{i=1}^{p} U_p(X_1, \ldots, L_X X_i, \ldots, X_p).$$

Применение оператора Ли к какому-либо тензору T, напр. типа $[1, 1]$, следует из вышесказанного, именно:

$$(L_X T)(\omega, Y) = X(T(\omega, Y)) - T(L_X \omega, Y) - T(\omega, L_X Y),$$

где $L_X Y = [X, Y]$, $(L_X \omega)(Z) = X(\omega(Z)) - \omega([X, Z])$.

Используя наконец формулу (EC), в которой известны локальные операторы L_X и L_X, получаем определение внешнего дифф-ла d на $\Lambda(M^*)$ и также инвариантные формулы. Применяя последовательно эти операторы, выводятся формулы

$$(df)(X) = Xf, \ (d\omega)(X, Y) = X(\omega(Y)) - Y(\omega(X)) - \omega([X, Y]) \text{ и т. д.}$$

Распространение на БМ (БМ=Банаховое многообразие) этих операторов производится стандартным образом, а все выведенные выше формулы не изменяются, получая лишь более широкое содержание.

6. Производная Ли на банаховых многообразиях. БМ класса C^∞ определяется обычным образом через (полные) атласы $A = \{(U_i, \varphi_i)\}_{i \in I}$ то-есть семейство локальных карт, каждая из которых содержит открытие $U_i \subset B$ топологического пространства Хаусдорфа и гомеоморфизм $\varphi_i : U_i \to \varphi_i(U_i) \subset E$ (БП модель). Имеем: $\bigcup_{i \in I} U_i = B$ и для каждой пары индексов $i, j \in I$ отображения $g_{ij} = \varphi_j \circ \varphi_i^{-1} : \varphi_i(U_{ij}) \to \varphi_j(U_{ij})$ $(U_{ij} = U_i \cap U_j \neq \varnothing)$ суть диффеоморфизмы C^∞ на E и их совокупность $\Gamma = \{g \in \mathrm{Diff}(E) : g_{ij} = \varphi_j \circ \varphi_i^{-1}$ для всех пар $i, j \in I\}$ являетя дифф-льной псевдогруппой группы дифф-змов ($=$ диффеоморфизми) C^∞ модели E. Предположим, что модель E есть действительное рефлексивное БП, которое допускает топологические счетные базисы и что справедлива теорема о замкнутом графике, что дает возможность выбирать подходящие базисы так, чтобы дополняющие подП были оснащены дополнительными подбазисами. Для ГП E теорема всегда имеет место и тогда B будет ГМ (ГМ = гильбертовое многообразие).

Посредством дифф-змов g_{ij} строится эквивалентность векторов $u_i, u_j \in E$ на E по формуле $u_j = g'_{ji}(\varphi_i(x))\, u_i$, где g'_{ji} производная Фреше. Тогда триплеты (U_i, φ_i, u_i), (U_j, φ_j, u_j) $(U_{ij} \neq \varnothing)$ будут эквивалентны и соответствующий класс X по определению будет касательным вектором в точке $x \in B$. Совокупность этих векторов в $x \in B$ дает касательное пространство $T_x(B)$, изоморфное с E. Совокупность дифф-льных линейных форм $T_x^*(B)$ образует кокасательное пространство в $x \in B$, изоморфное с E^*.

7. Банаховы расслоения над B. Пусть (M, π, B) локально тривиальное расслоение со слоем F, структурной группой G и атласом расслоения $A = \{(U_i, \psi_i)\}_{i \in I}$, где $\psi_i : U_i \times F \to \pi^{-1}(U_i)$ гомеоморфизмы карт расслоения, а $g_{ij}(x) = \psi_{i,x} \circ \psi_{j,x}^{-1} : U_{ij} \to G$ ПО.

Если $F = G$ и группа действует левыми сдвигами, то имеем ГРП (главное расслоенное пространство) со структурной группой G и базисом B.

Если же типовой слой F есть БП и действие структурной группы G на F будет ЛН, то получаем БР (банахово расслоение). Если базис B есть БМ с моделью E $(\neq F)$ и изменения карт расслоения $g_{ij} : U_{ij} \to G \subset G(F)$ суть дифф-мые отображения C^∞, то A векторный атлас БР.

Сечения в БР, то-есть отображения C^∞ $\sigma: B \to M$ ($s: U \to M$) такие, что $\pi \circ \sigma = \mathrm{id}_B$ ($\pi \circ s = \mathrm{id}_U$), дают линейные геометрические объекты базиса B. Совокупность $\Sigma(U)$ всех локальных сечений БР (БР — Банаховое расслоение) M над U оснащается естественно структурой F-модуля над кольцом действительных C^∞ функций, определенных на U. Существование сечений над $U \subset B$ устанавливается, используя векторные карты и их продолжения на U.

Замечание. Если в определении РП, данного выше, берем типовым слоем $A(E)$ — аффинное пространство, присоединенное БП E, и структурной группой подгруппу соответствующей аффинной группы, то получим аффинное расслоение над B, сечение в котором дает общий линейный объект БМ B. Аналогично определяются проективные расслоения над B и его проективные объекты. Одним из важнейших примеров БР является касательное расслоение $T(B) = \bigcup_{x \in B} T_x(B)$, а также его сопряженное кокасательное расслоение. Сечение C^∞ в $T(B)$ или в $T^*(B)$ будет X или ω и называется векторным полем или пфаффовой формой на БМ B; для каждой точки $x \in B$ значение $\langle X_x, \omega_x \rangle = \omega(X)_{/x}$ зависит дифф-руемо от x и принадлежит $F(B)$, а совокупность векторных полей $\mathbf{X}(B)$ образует F — модуль, точнее, алгебру Ли, построенную на этом модуле, так как скобка двух векторных полей есть также ВП.

Если $\pi: M \to B$ и $\pi': N \to B$ — два БР над B, то их локальные слои над $x \in B$ будут M_x и N_x, которые изоморфны с типовыми слоями через отображения $t_x: F \to M_x$ и $t_x': F' \to N_x$; тогда и отображение $\left|\begin{smallmatrix} t_x & 0 \\ 0 & t_x' \end{smallmatrix}\right|: F \times F' \to M_x \times N_x$ будет изоморфизмом, а потому на $M \oplus N = \bigcup_{x \in B} M_x \times N_x$ имеем также структуру БР, так как M_x, N_x, $M_x \times N_x$ суть БП и тогда $M \oplus N$ будет их прямая сумма. Имеет также смысл брать БП $L(M_x, N_x)$ ЛНО и тогда можно доказать, что $L(M, N) = \bigcup_{x \in B} L(M_x, Y_x)$ имеет структуру БР над B. В частности, для тривиального БР $N = B \times R$ получаем $L(M, N) = M^*$, то-есть сопряженное к БР M. Продолжая различные вариации на эту тему, получим прямые суммы БР, БР полилинейных НО и в частности тензорные БР, а также БР полилинейных альтернированных отображений и т. д. Все эти БР играют важнейшую роль в геометрии БМ.

8. Локальные операторы на БМ. Начнем с определения оператора i_X внутреннего умножения по векторному полю X на B дифф-льной p-формы Ω на B посредством инвариантной формулы $(i_X \Omega)(X_2, \ldots, X_p) = \Omega(X, X_2, \ldots, X_p)$ ($X, X_2, \ldots \in \mathbf{X}(B)$), откуда непосредственно следует, что i_X — локальный оператор на B, имеющий свойства, упомянутые ранее.

Аналогично на БР $\Lambda(B)$ алгебры внешних дифф-льных форм на B, производная Ли будет дана инвариантной формулой

$$(L_X\Omega)(X_1,\ldots,X_p)=X(\Omega(X_1,\ldots,X_p))-\sum_{i=1}^{p}\Omega(X_1,\ldots,L_XX_i,\ldots,X_p).$$

Наконец по формуле (EC) выводим непосредственно выражение внешнего дифф-ла определенного на $\Lambda(B)$

$$(d\Omega)(X_0,\ldots,X_p)=\sum_{i=0}^{p}(-1)^iX_i(\Omega(X_0,\ldots,\hat{X}_i,\ldots,X_p)),$$

$$+\sum_{i<j=0}^{p}(-1)^{i+j}\Omega([X_i,X_j],X_0,\ldots,\hat{X}_i,\ldots,\hat{X}_j,\ldots,X_p).$$

Все эти локальные операторы имеют свойства, установленные ранее, и в частности следует, что производная Ли является естественным обобщением на БМ производной Фреше.

Сейчас легко выводится инвариантная формула производной Ли тензора типа $[p, q]$, то-есть сечения C^∞ в соответствующем $(p+q)$-линейном БР и именно

$$(L_XT)(\omega^1,\ldots,\omega^p,X_1,\ldots,X_q)=X(T(\omega^1,\ldots,X_q))$$

$$-\sum_{i=1}^{p}T(\omega^1,\ldots,L_X\omega^i,\ldots,X_q)-\sum_{j=1}^{q}T(\omega^1,\ldots,L_XX_j,\ldots,X_q),$$

где $(L_X\omega)(Y)=X(\omega(Y))-\omega([X,Y])$, $L_XY=[X,Y]$;

она обобщает один результат И. Вайсмана из Comment. math. helv № 4, 1966—1967.

Замечание. Производная Ли какого-либо линейного объекта, то-есть сечения C^∞ в БР $\pi:M\to B$, можно определить непосредственно, как это делает С. Лэнг в своей известной монографии. Векторное поле X на базисе B определяет в окрестности U точки $x\in B$ однопараметрическую локальную группу дифф-змов α_t. Для всех t дифф-зм $\alpha_t:U\to\alpha_t(U)=U_t$ дает возможность перемещать структуру открытия U на U_t. Он индуцирует также и локальное преобразование $\alpha_t:\pi^{-1}(U)\to\pi^{-1}(U_t)$ на M, которое совместимо с расслоенной структурой; так напр. сечению σ над U соответствует сечение $\sigma_t=\alpha_t(\sigma)$ над U_t.

Определение. Назовем производной Ли объекта σ (в $x\in B$) по X выражение, данное соотношением $L_X\sigma_X=\lim\limits_{t\to0}\frac{1}{t}\{\alpha_t(\sigma)-\sigma_x\}$.

Если $\sigma=\Omega$, то тогда $\alpha_t\sigma=\alpha_t^*\Omega$, а если $\sigma=Y$, то $\alpha_t\sigma=\alpha_{t*}Y$ и т. д. Отсюда следует, что $L_X\sigma$ будет новым сечением в том же БР M, а потому есть объект того же типа.

Если $L_X\sigma=0$ (нулевое сечение), говорим, что наш объект σ остается инвариантным по отношению к дифф-змам группы α_t, присоединенной векторному полю X.

9. Связь между производной Ли и линейной связностью. Пусть B — БМ, $F(B)$ — кольцо C^∞ функций на B, $\pi: M \to B$ БР и $\Sigma(U)$ F-модуль его сечений C^∞ над открытием U.

Определение. Назовем D законом дифф-вания в $\Sigma(U)$ отображение $D: \mathbf{X}(U) \times \Sigma(U) \to \Sigma(U)$ $(X, \sigma) \to D_X\sigma$, которое удовлетворяет:

1) $D_{X+Y}\sigma = D_X\sigma + D_Y\sigma$, $D_{fX}\sigma = fD_X\sigma$;

2) $D_X(\sigma + \tau) = D_X\sigma + D_X\tau$, $D_X(f\sigma) = fD_X\sigma + df(X)\sigma$;

3) D — локальный оператор.

Замечания. 1. Оператор Ли не есть закон дифф-вания, так как не проверяет второе из соотношений 1), несмотря на то, что удовлетворяет все остальные аксиомы.

2. Разница между двумя законами дифф-вания на том же БР будет сечением в БР $L(T(B), M; M)$; иначе говоря, все законы дифф-вания в $\Sigma(U)$ образуют аффинный модуль, присоединенный F-модулю сечений в $L(T(B), M; M)$.

3. Если БР $M = B \times R$ тривиально, то $\Sigma = F(B)$ и тогда закон дифф-вания дан $D_X f = Xf$ и совпадает с производной Ли на этом БР. Вообще разница $L_X - D_X = A_X$ будет новым законом дифф-вания, действие которого на $F(B)$ приводит к нулю.

4. Законы дифф-вания легко распространяются на тензоры, формы и т. д., построенные над данным модулем сечений. Так напр. для пфаффовых форм имеем

$$D_X\omega(\sigma) = X(\omega(\sigma)) - \omega(D_X\sigma).$$

Определение. Оператор $R(X, Y) = [D_X, D_Y] - D_{[X, Y]}$ $(X, Y \in \mathbf{X}(B)$ $D_X \in L(M, M))$ называется кривизной данного закона дифф-вания D.

Если $M = B \times F$, то $R(X, Y) = 0$.

Мы можем сделать еще одно расширение действий наших операторов i_X, L_X, d, а именно на формы, определенные на B, но со значениями в F-модуле $\Sigma(U)$ сечений в БР M, совокупность которых образует F-алгебру $\mathbf{A}$. Формально все выведенные выше инвариантные формулы остаются в силе, имея более широкое содержание. Так напр. кривизна R закона D есть дифференциальная 2-форма с значениями в $L(M, M)$; легко установить, что ее внешний дифференциал равен нулю. Последовательное применение наших операторов к таким формам приводит к следующим интересным формулам:

$$[L_X, L_Y] = L_{[X, Y]} + R(X, Y), \quad [L_X, d]\omega = i_X R \wedge \omega, \quad d^2\omega = R \wedge \omega.$$

10. Локальное выражение закона дифференцирования и операторов. Для каждой точки $x \in B$ имеем локальную карту (U, φ) в ее окрестности, с координатами x^i $(i \in I)$ и векторную карту (U, ψ, F) БР $\pi: M \to B$, определяющая изоморфизм $t_x: F \to M_x$. В каждой точке $y \in U$ имеем естественный репер $\partial\left(\dfrac{\partial}{\partial x^i}\right)$ на B и соответствующий коре-

пер $d(dx^i)$; во всех точках слоя M_y будут одни и те же базисы $t(t_\alpha)$ и кобазисы $\theta(\theta^\alpha)_{\alpha\in A}$ в этом слое. Тогда векторное поле X на B локально выразится через $X = X\partial = X^i\partial_i$, а сечение $\sigma \in \Sigma(U)$ в точке $x \in B$ будет $\sigma(x) = \sigma t = \sigma^\alpha t_\alpha$. Если D закон дифф-вания в $\Sigma(U)$, то его локальная запись будет $D_X\sigma = D_{X\partial}(\sigma t) = D_{X^i\partial_i}(\sigma^\alpha t_\alpha)$. Отсюда следует, что мы будем знать закон D, если будем знать все разложения $D_{\partial_i} t_\alpha = \Gamma^\beta_{i\alpha} t_\beta$, где $\Gamma^\beta_{i\alpha} \in F(M)$, то-есть даны коэффициенты закона дифф-вания на БР. Тогда имеем $D_X\sigma = X^i(\partial_i\sigma^\alpha + \Gamma^\alpha_{i\beta}\sigma^\beta)t_\alpha$.

Интересно заметить, что при замене локальных и соответствующих векторных карт, коэффициенты Γ подвергаются следующему закону изменения (в координатной записи): $\Gamma^\delta_{i\alpha} = \frac{\partial x^j}{\partial x^i}(a^\beta_\gamma \Gamma^\gamma_{j\beta} + \partial_j a^\gamma_\alpha)\tilde{a}^\delta_\gamma$, где $a^\gamma_\beta \tilde{a}^\beta_\gamma = \delta^\gamma_\gamma$ и где $[a^\beta_\gamma]$ регулярная (вообще бесконечная) матрица, а $\left[\frac{\partial x^j}{\partial x^i}\right]$ матрица Якоби замены координат на B.

Кривизна данного закона дифф-вания выразится локально через $R(X, Y)\sigma = R\partial . \partial . t$, откуда следует, что она дана через коэффициенты разложения

$$R(\partial_i, \partial_j)t_\alpha = R^\beta_{\alpha ij} t_\beta, \text{ где } R^\beta_{\alpha ij} = \partial_i \Gamma^\beta_{j\alpha} - \partial_j \Gamma^\beta_{i\alpha} + \Gamma^\beta_{i\gamma}\Gamma^\gamma_{j\alpha} - \Gamma^\beta_{j\gamma}\Gamma^\gamma_{i\alpha}, \text{ так как}$$

$$[\partial_i, \partial_j] = 0.$$

Используя формулу $(L_X\omega)(Y) = D_X(\omega(Y)) - \omega([X, Y])$, получаем в индексной записи

$$(L_X\omega)(Y) = (X^j\partial_j\omega^\gamma_i + \omega^\gamma_j\partial_i X^j + \underline{X^j\Gamma^\alpha_{j\beta}\omega_i^\beta})Y^i t_\alpha, \text{ где } \omega = \omega^\gamma_i dx^i t_\alpha,$$

а ее внешний дифф-л в координатной записи будет

$$d\omega = \frac{1}{2}(\partial_j\omega^\gamma_i + \Gamma^\gamma_{j\beta}\omega^\beta_i)dx^j \wedge dx^i,$$

откуда следует, что подчеркнутые члены добавляются к обычным локальным выражениям скалярных форм.

11. Линейная связность на $T(B)$ и производная ЛИ. Если $M = T(B)$ — касательное расслоение и дан закон дифф-вания в $\mathbf{X}(B)$, то-есть $\nabla : \mathbf{X} \times \mathbf{X} \to \mathbf{X}$, то как было указано ∇ можно распространить на тензорную и внешнюю F-алгебры над B. В этом случае ∇ называется линейной связностью на B, а ∇_X ковариантной производной по X. Для ∇, кроме кривизны $R(X, Y) = [\nabla_X, \nabla_Y] - \nabla_{[X, Y]}$, вводится еще и кручение $T(X, Y) = \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X, Y]$, которое определяет ее тензор кручения. Имея оператор Ли L_X и связность ∇_Y при последовательном их применении целесообразно ввести и следующий оператор высшего порядка:

$$(L_X \nabla)_Y = [L_X, \nabla_Y] - \nabla_{[X, Y]},$$

который назовем производной Ли данной связности ∇ по X. Напомню, что сама связность как закон дифф-вания является общим линейным объектом и потому ее производная Ли будет также геометрическим объектом.

Частный случай. Найдем условия, при которых производная Ли является оператором линейной связности, то-есть $\nabla_X = L_X$. Тогда $A_X = 0$ или $T(X, Y) = -\nabla_Y X$. Это допущение возможно, так как мы установили, что $R(X, Y) = [L_X, L_Y] - L_{[X, Y]}$. Но, с другой стороны, применяя этот оператор к дифф-льным формам со скалярными значениями, мы видели в параграфе 9, что вторая часть соотношения равна нулю. Итак необходимое условие, чтобы оператор Ли был бы связностью на БМ, есть $R = 0$. По аналогии такие БМ назовем параллелизуемыми. Это напр. многообразия групп Ли-Банаха (см. Gh. Gheorghiev, Revue Roum. de Math., 1970), когда кручение этой связности постоянно. На конечномерных многообразиях такая связность была исследована И. Каттанео-Гаспарини (I. Cattaneo Gasparini, Atti dei Lincei, T. 45, 1969).

Аффинные коллинеации. Напомню, что векторное поле X на B определяет локальную группу дифф-змов α_t на B и что если производная Ли какого-либо объекта σ $L_X \sigma$ равна нулю, то мы говорим, что он будет инвариантным по отношению к группе α_t. Сейчас, если $(L_X \nabla)_Y = 0$, то связность ∇ инвариантна и тогда имеем $\alpha_{t*}(L_X Y) = L_{\alpha_{t*}X} \alpha_{t*} Y$. В этом случае векторное поле X назовем аффинной коллинеацией по отношению к связности ∇. Легко установить, что совокупность аффинных коллинеаций есть подалгебра Ли алгебры Ли (над R) векторных полей на B, так как эта совокупность есть Вподll в алгебре Ли $\mathbf{X}(B)$ и скобка двух аффинных коллинеаций будет также аффинной коллинеацией.

Используя сейчас оператор $A_X = L_X - \nabla_X$, кривизна выразится через

$$R(X, Y) = [L_X - A_X, \nabla_Y] - \nabla_{[X, Y]},$$

откуда получаем $R(X, Y) = (L_X \nabla)_Y - [A_X, \nabla_Y]$. Итак имеем следующую

Теорему. Векторное поле X на B будет тогда и только тогда аффинной коллинеацией относительно ∇, когда кривизна связности удовлетворяет

$$R(X, Y) = -\nabla_Y (A_X).$$

В частности, если $\nabla_X = L_X$, то следует, что для какого-либо поля X имеем $(L_X \nabla)_Y = 0$; это значит, что все векторные поля на B будут аффинными коллинеациями; иначе говоря, на параллелизуемом многообразии подалгебра Ли аффинных коллинеаций по связности L_X совпадает с алгеброй Ли всех векторных полей на B.

12. Производная Ли и связности на ГРП и БР. Начнем с определения инфинитезимальной связности на ГРП (P, π, B) с базисом БМ B, $\pi: P \to B$ канонической проекцией и структурной группой G — группа

Ли-Банаха; пусть $T(B)$ и $T(P)$ их касательные расслоения со слоями $T_x(B)$ и $T_x(P)$, где $x = \pi(p)$.

Определение. Инфинитезимальная связность на P будет отображение $\sigma: T(B) \to T(P)$, которое в каждой точке $p \in P$ с $\pi(p) = x$ проверяет условия:

1) $\sigma_p: T_x(B) \to T_p(P)$ есть ЛНО, зависящее дифференцируемо от точки p;

2) $\pi_* \circ \sigma_p = id_{T_x(B)}$;

3) при сдвиге $R_g p = p_g = p' (g \in G)$ имеем $\sigma_{p'} = R_{g*} \circ \sigma_p$ или, что то же, следующая диаграмма коммутативна

$$\begin{tikzcd} T_x \arrow[r, dashed, "\sigma_p"] \arrow[dr, "\sigma_{p'}"'] & T_p \arrow[d, "R_{g*}"] \\ & T_{p'} \end{tikzcd}$$

Это определение можно еще выразить на языке БР следующим образом. БП $T_p(P)$ содержит V_p — касательное к слою ВподП, называемое вертикальным, и ВподП $H_p = \sigma_p(T_x(B))$, называемое горизонтальным, и имеем в каждой точке $p \in P$

$$T_p(P) = V_p \oplus H_p, \text{ так как } \pi_*(V_p) = 0.$$

Тогда свойство 3) выражается через соотношение 3') $H_{R_g p} = R_{g*} H_p$. Совокупности $\bigcup\limits_{p \in P} V_p = V(P)$ и $\bigcup\limits_{p \in P} H_p = H(P)$ дают БР, прямая сумма которых есть $V(P) + H(P) = T(P)$. Иначе говоря, инфинитезимальная связность на ГРП будет дана горизонтальным БР, слои которого удовлетворяют соотношению 3').

Пусть Z векторное поле на P; в каждой точке $p \in P$ имеем единственное разложение $Z = Z_h + Z_v$ и также будем обозначать вертикальные векторные поля через Z_v, а горизонтальные через Z_h. Равенство 3') еще можно выразить через: $(R_{g*} Z)_h = R_{g*}(Z_h)$. Теперь, используя определение производной Ли, оно будет выражаться эквивалентно через

$$(!) \quad L_{Z_v}(Z_h) = [Z_v, Z_h] \in H(P) \text{ или } L_{Z_v}(H(P)) \subset H(P) \text{ для всех } Z_v \in V(P)$$

Для локальной записи выберем в $\pi^{-1}(U)$ подходящий базис с дополняемыми под базисами: $(Z_i)_{i \in I} \in H(P)$, $(Z_\alpha)_{\alpha \in A} \in V(P)$. Тогда уравнения структуры для данной инфинитезимальной связности имеют следующую форму через скобки Ли:

$$(!') \quad [Z_i, Z_j] = A_{ij}^k Z_k + R_{ij}^\alpha Z_\alpha, \; [Z_i, Z_\alpha] = B_{i\alpha}^k Z_k, \; [Z_\alpha, Z_\beta] = C_{\alpha\beta}^\gamma Z_\gamma,$$

где коэффициенты A, R, $B \in F(\pi^{-1}(U))$, а $C \in R$ дает структурный тензор данной группы Ли-Банаха.

Замечание. Так как свойство (!) характерно, то инфинитезимальная связность на ГРП можно определить посредством горизонтального БР (дополнительного к вертикальному БР), которое сохраняется оператором Ли по какому-либо вертикальному векторному полю.

Теперь, если G будет подгруппой линейной группы $GL(F)$ БП F, то известным образом строится БР (M, π_M, B), где $M = P \times_G F$, то-есть M есть факторизация тривиального БР $P \times F$ по классам эквивалентности $g \to (pg, g^{-1}f)$, где $g \in G$, $p \in P$, $f \in F$. Так как имеем равенство $\pi_M \circ \tau(p, f) = \pi(p)$, где $\tau: P \times F \to P$, то π_M есть сюрэктивное дифф-руемое отображение и следовательно $\pi_M: M \to B$ будет БР.

Справедливо и обратное: каждому БР $\pi: M \to B$ с типовым слоем F присоединяется ГРП с структурной группой $GL(F)$ или ее подгруппой, называемое ГР линейных реперов данного БР. Пусть $N = B \times F$ тривиальное БР, тогда $L(N, M) = L(F, M)$ будет БР ЛНО $F \to M_x$ с типовым слоем $L(F, F) = \mathrm{End}\, F$ и обозначим каноническую проекцию $\rho: L(F, M) \to B$. Возьмем сейчас подмножество $P \subset L(F, M)$, состоящее только из автоморфизмов $GL(F) \subset \mathrm{End}\, F$. Я говорю, что $(P, \rho P, B)$ будет ГРП с структурной группой $GL(F)$. Это следует первым долгом из того, что P есть подмногообразие БМ $L(F, M)$ и также: если $z \in P$ и $\rho(z) = x$, то $z(f) \in M_x$ $(f \in F)$ и $(R_g z)(f) = z(gf)$.

Вернемся снова к ГРП (P, π, B) со структурной группой $G \subset GL(F)$ и оснащенному инфинитезимальной связностью через горизонтальное БР $H(P)$, удовлетворяющее (!). Присоединяем ему БР (M, π_M, B), со слоем F. Из очевидной коммутативной диаграммы

$$\begin{array}{ccc} P & \xrightarrow{\Phi_f} & M \\ \pi \downarrow & & \downarrow \pi_M \\ B & \xrightarrow{\mathrm{Id}} & B \end{array}$$

следует, что $d \cdot \Phi_f = \cdot \Phi_{f*}$ дифференциал отображения в каждой точке $m = \Phi_f(p)$ переводит H_p в $H_m = \Phi_{f*}(H_p)$ и имеем $T_m(M) = H_m \oplus V_m$, где V_m будет слоем, проходящим через m. Иначе говоря, БР M расщепляется на две дополняемых БР $T(M) = V(M) \oplus H(M)$. Так как производная Ли сохраняется при дифференцируемом отображении Φ_f, следует, что условие сохраняемости (!) выразится на БР через

$$(!!) \qquad L_{\xi_v}(H(M)) \subset H(M), \quad \text{где} \quad \xi_v \in V(M).$$

Итак и в данном случае линейная связность на БР может быть определена горизонтальным БподР $H(M)$, которое проверяет (!!).

Наконец, можно показать, что каждому горизонтальному БР на M соответствует закон дифф-вания D_X на M и именно, для $X \in \mathbf{X}(B)$ и сечения $\sigma: B \to M$ находим его образ $D_X\sigma$ следующим образом: $\sigma_*(X)$ будет векторным полем на M, вертикальная компонента которого и определяет $D_X\sigma$. Справедливо и обратное, то есть: данному закону соответствует горизонтальное БР $H(M)$ (см. Gh. Gheorguiev,

V. Oproiu, Geometrie diferentiala II, Jaşi, 1971). Таким образом мы получаем необходимое и достаточное геометрическое условие, при котором данный закон дифф-вания D определяет линейную связность на БР $\pi: M \to B$; на языке горизонтального БР оно выражено соотношением (!!).

II. О некоторых замечательных движениях в ГМ и в релятивистской механике

Во второй части доклада приведем несколько приложении производной Ли и внешнего дифф-вания в БМ оснащенных метрической структурой, то-есть паракомпактное ДМ (дифференцируемое многообразие) B класса C^∞ с моделью H - ТВП, оснащенное метрической структурой и в частности ГП. Закончим изысканиями существования таких движений в релятивистской механике.

1. Связность Леви-Чивита и изометрии на B. Пусть $T(B)$ и $T^*(B)$ - касательные расслоения над B, слои которых над $x \in B$: $T_x(B)$ и $T_x^*(B)$ изометрически изоморфны с H, оснащенное метрическим тензором g, который переносится на касательные ВП в g_x и g_x^*, дифф-руемо зависящих от x. При выборе счетного базиса (репера), используя координатную запись, им соответствуют бесконечные матрицы G_x и G_x^*. Напомним также, что метрический тензор определяет канонический изоморфизм $\omega: T_x(B) \to T_x^*(B)$ через $\langle Y, \omega_X \rangle = \omega_X(Y) = g_x(X, Y)$ $\begin{pmatrix} X, Y \in T_x(B) \\ \omega_X \in T_x^*(B) \end{pmatrix}$. В координатной записи, используя в окрестности $U \subset B$ естественные реперы $\partial \begin{pmatrix} \partial \\ \partial x^\alpha \end{pmatrix}$ и $d\,(dx^\alpha)$, имеем $X = X^\alpha \partial_\alpha$, $Y = Y^\beta \partial_\beta$ $(\alpha, \beta \in I)$, $g(X, Y) = g_{\alpha\beta} X^\alpha Y^\beta$, где $g_{\alpha\beta} = g(\partial_\alpha, \partial_\beta)$, а $g^{\alpha\beta} = g^*(dx^\alpha, dx^\beta)$. Тогда изоморфизм выразится через $\omega_{\partial_\alpha} = g_{\alpha\beta} dx^\beta$, $\omega^{-1}_{dx^\alpha} = g^{\alpha\beta} \partial_\beta$, откуда $g_{\alpha\beta} g^{\beta\gamma} = \delta_\alpha^\gamma$. Следует непосредственно, что

$$\omega_X = g_{\alpha\beta} X^\alpha dx^\beta.$$

Предположение паракомпактности ГМ B необходимо чтобы, используя C^∞ разбиение единицы, доказать существование на нем римановой структуры (С. Лэнг). Напомним также, что в этом случае на B можно определить единственную связность Леви-Чивита (ЛЧ), которая сохраняет g и будет без кручения; в инвариантной записи это можно выразить через

$$\text{(ЛЧ)} \qquad \nabla_X g(Y, Z) = Xg(Y, Z) - g(\nabla_X Y, Z) - g(Y, \nabla_X Z) = 0,$$

$$T(X, Y) = \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X, Y] = 0.$$

Из этих двух равенств через обычные выкладки получаем обобщенные символы Христоффеля в инвариантной записи

$$(X)\qquad 2g(\nabla_X Y, Z) = Xg(Y, Z) + Yg(Z, X) - Zg(X, Y) + g([X, Y], Z) - g([Y, Z], X) + g([Z, X], Y).$$

Используя канонический изоморфизм $\omega_X(Y) = g(X, Y)$, эта формула выразится через пфаффовы формы так:

$$(X')\qquad 2\omega_{\nabla_X Y}(Z) = X(\omega_Y(Z)) + Y(\omega_X(Z)) - Zg(X, Y) + \omega_{[X, Y]}(Z) + g([Z, X], Y) - g([Y, Z], X).$$

Наконец, через обратный канонический изоморфизм ω^{-1} получаем отсюда, что ковариантная производная $\nabla_X Y$ определена единственным образом. Итак, на ГМ с римановой структурой существует единственная связность (ЛЧ) ∇_X.

В координатной записи для какого-либо репера $(e_\alpha)_x \in T_x(B)$ на $U \subset B$ связность (ЛЧ) дана коэффициентами $\nabla_{e_\alpha} e_\beta = \Gamma^\gamma_{\alpha\beta} e_\gamma$, значение которых вычисляется из формулы (X) и имеем

$$(X'')\qquad \Gamma^\gamma_{\beta\gamma} = \left\{ {\gamma \atop \beta\gamma} \right\} = \frac{1}{2}\{g^{\alpha\lambda} g_{\mu\beta} C^\mu_{\gamma\lambda} + g^{\alpha\lambda} g_{\gamma\mu} C^\mu_{\beta\lambda} - C^\gamma_{\beta\gamma}\};$$

здесь C входят в $[e_\alpha, e_\beta] = C^\gamma_{\alpha\beta} e_\gamma$

и $\left\{ {\gamma \atop \beta\gamma} \right\}$ обыкновенные символы Христоффеля второго рода, которые и являются коэффициентами связности (ЛЧ) при естественном репере.

Параллельный перенос вдоль кривой $\tau = x(t)$ на B векторного поля X выражается соотношением $\nabla_{\dot{x}} X = 0$, а $\nabla_{\dot{x}} \dot{x} = 0$ суть уравнения геодезической линии связности ∇ на B.

Если α_t есть однопараметрическая группа диффеоморфизмов, соответствующая векторному полю X и она сохраняет метрический тензор g, имеем инфинитезимальную изометрию, что выражается через $L_X g = 0$; посредством оператора $A_X = L_X - \nabla_X$ и (ЛЧ) оно приводит к уравнению Киллинга

$$(K)\qquad (L_X g)(Y, Z) = g(A_X Y, Z) + g(Y, A_X Z) = 0,$$

а X называется вектором Киллинга на B.

Совокупность изометрий для ∇ на B образует алгебру Ли, так как имеем $L_{[X, Y]} g = [L_X, L_Y] g = 0$.

Пусть $v \in \mathfrak{X}$ сечение в $T(B)$, то-есть векторное поле на B, которое интерпретируем как поле скоростей „движения" на B. Иначе говоря, дана одномерная дистрибуция (распределение). В окрестности каждой точки $x \in B$ определена конгруенция ее интегральных кривых — линий тока. В точке $x \in B$ можем определить величину скорости, то-есть норму $|v|$ и тогда $v = |v|\, u$, где u поле версоров. Это следует из теоремы Петера (L. Peter, Math. J. Indiana Univ, **20**, 1971): Если B паракомпактное БМ, ξ — векторное поле на B, тогда можно найти

положительную функцию $f \in F(B)$ такую, что траектории векторного поля $X = f\xi$ определены для всех $t \in [-\infty, \infty]$. В нашем случае, будучи дано ξ и единичное поле, можем определить положительную функцию v (величину скорости) такую, что линии тока поля скоростей $v = |v|\,\xi$ определены для всех $t \in [-\infty, \infty]$.

2. Одна замечательная формула. Так как $[X, Y] = L_X Y$, то L_X есть линейный оператор, действующий на $\mathbf{X}(B)$ — алгебре Ли векторных полей и потому сможем ввести сопряженный с ним оператор L_X^* по формуле $g(L_X Y, Z) = g(Y, L_X^* Z)$ или на языке форм $\omega_Z(L_X Y) = \omega_{L_X^* Z}(Y)$.

Но так как при изоморфизме производная Ли остается неизменной, то $\omega_Z(L_X Y) = L_X \omega_Z(Y) = \omega_{L_X^* Z}(Y)$, откуда следует замечательная формула

$$L_X \omega_Z = \omega_{L_X^* Z}. \tag{C}$$

С другой стороны, применяя формулу (EC), получим

$$L_X \omega_Z = i_X d\omega_Z + d(i_X \omega_Z). \tag{C'}$$

Но так как $\omega_Z = i_Z g$, имеем $i_X \omega_Z = g(X, Z)$ и наконец выводим

$$\omega_{L_X^* Z} = i_X d\omega_Z + dg(X, Z), \tag{C''}$$

что и дает геометрическое истолкование L_X^*, сопряженному с производной Ли; в частности для $X = Z = v$ получаем

$$L_v \omega_v = \omega_{L_v^* v} = i_v d\omega_v + dg(v, v). \tag{Л}$$

Используя сейчас формулу (X), получаем

$$\operatorname{grad} \frac{v^2}{2} = L_v^* v + \nabla_v v. \tag{Л}$$

Это соотношение обобщает в ГМ известное векторное тождество $(\nabla, \nabla) v + v \times \operatorname{rot} v = \nabla \frac{v^2}{2}$, а потому L_v^* можно назвать оператором Лэмба.

3. Дистрибуции на метрическом БМ. Пусть на БМ B, оснащенном метрическим тензором g, дана регулярная дистрибуция (D) конечной размерности p, то-есть дано в каждой точке $x \in B$ ВподП $D_x \subset T_x(B)$, которое зависит дифф руемо от x. Посредством метрики g определяем дополнительную дистрибуцию ($D^\perp$) коразмерности p. Очевидно эти дистрибуции определяют БР над B $D(B)$ и $D^\perp(B)$ с базисом B и слоями D_x и $D_x^\perp$ над $x \in B$ так, что имеем $T_x(B) = D_x \oplus D_x^\perp$.

Если $X, Y, \ldots$ $\mathbf{N}, \mathbf{M}, \ldots$ — векторные поля на B, принадлежащие $D(B)$ и $D^\perp(B)$ соответственно, и применяем им оператор ∇_X ковари-

антной производной, то получим следующие разложения, которые обобщают формулы Гаусса-Вейнгартена из теории поверхностей

$$\text{(ГВ)} \qquad \nabla_X Y = \nabla_X Y + \alpha(X, Y), \quad \nabla_X \mathbf{N} = -A_{\mathbf{N}}(X) + D_X \mathbf{N}.$$

Аналогично запишутся формулы (ГВ) для дополнительной дистрибуции $(D^{\perp})$.

$$\nabla_{\mathbf{N}} \mathbf{M} = \nabla_{\mathbf{N}} \mathbf{M} + \beta(\mathbf{N}, \mathbf{M}), \quad \nabla_{\mathbf{N}} X = -A_X(\mathbf{N}) + D_{\mathbf{N}} X.$$

Доказывается как и для случая подмногообразий классического риманова пространства (см. напр. известный курс Ж. Фавара), что $\nabla_X Y$ выражает линейную связность, индуцированную оператором ∇_X на БР $D(B)$, а D_X выражает закон дифф-вания на БР $D^{\perp}(B)$, который в частности может быть и линейной связностью на нем. Отображение $\alpha: D(B) \times D(B) \to D^{\perp}(B)$ является билинейным над $F(B)$ и в случае инволютивной дистрибуции оно будет и симметрическим, то-есть $\alpha(X, Y) = \alpha(Y, X)$. Наконец, отображение $A: D(B) \times D^{\perp}(B) \to D(B)$ также билинейно над $F(B)$ и связано с формой α соотношением

$$g(A_{\mathbf{N}}(X), Y) = g(\alpha(X, Y), \mathbf{N}) \quad (\text{для всех } \mathbf{N} \in D^{\perp}(B));$$

это есть следствие условий (ЛЧ).

Замечания. 1. Сейчас нетрудно обобщить дистрибуции Миллера, введенные мною для структурных дистрибуций, которые обобщают на ГМ как конфигурации Миллера, введенные проф. Р. Мироном, так и известные исследования Ж. Фавара. Пусть дана поддистрибуция $D_1 \subset D$ размерности $q < p$ и пусть дополнительная к ней в D будет $D_1^{\perp} \subset D$. Далее выпишем для этих дистрибуций формулы Гаусса—Вейнгартена и т. д. В частности для $q = 1$ получим обобщенные формулы Мирона на бесконечномерных многообразиях. Аналогично можем рассматривать поддистрибуцию $D_2 \subset D^{\perp}$ и ее дополнение и т. д.

2. Если данная дистрибуция (D) размерности p будет инволютивной, она допускает интегральные многообразия максимальной размерности (p) $V \subset B$. Тогда, используя формулы (ГВ), можем установить связь между тензором кривизны R на B и соответствующим тензором кривизны R на V, то-есть найдем следующие формулы Гаусса

$$\text{(Г)} \qquad R(W, Z, X, Y) = R(W, Z, X, Y) + g(\alpha(X, Y), \alpha(Y, W))$$
$$- g(\alpha(Y, Z), \alpha(X, W)) \quad (W, X, Y, Z \in D(B)),$$

где $R(W, Z, X, Y) = g(R(X, Y)Z, W)$, а $R(X, Y)Z = ([\nabla_X, \nabla_Y] - \nabla_{[X, Y]})Z$. Вычисляя нормальную компоненту этого последнего, используя для этого смешанную ковариантную производную, данную соотношением $(\tilde{\nabla}_X \alpha)(Y, Z) = D_X(\alpha(Y, Z)) - \alpha(\nabla_X Y, Z) - \alpha(Y, \nabla_X Z)$ и обозначая через $\mathbf{N}_\lambda$ подбазис в нормальной дистрибуции $(D^{\perp})$, то найдем следующую формулу Кодацци:

$$(\mathrm{K}) \qquad (\tilde{\nabla}_X \alpha)(Y, Z) - (\tilde{\nabla}_Y \alpha)(X, Z) = \sum_{\lambda=p+1}^{\infty} \{(\nabla_X b^\lambda)(Y, Z) - (\nabla_Y b^\lambda)(X, Z)\} \mathbf{N}_\lambda + \sum_{\lambda=p+1}^{\infty} \{b^\lambda(Y, Z) D_X \mathbf{N}_\lambda - b^\lambda(X, Z) D_Y \mathbf{N}_\lambda\},$$

где $b^\lambda(X, Y) = g(\alpha(X, Y), \mathbf{N}_\lambda)$.

В частности, для гиперповерхности в ГП $V \subset B$ имеем $\alpha(X, Y) = b(X, Y)\,\mathbf{N}$ и тогда (Г) и (К) будут даны скалярными соотношениями

$$(\Gamma') \qquad R(W, Z, X, Y) = b(Y, Z)\, b(X, W) - b(X, Z)\, b(Y, W),$$

$$(\mathrm{K}') \qquad (\nabla_X b)(Y, Z) = (\nabla_Y b)(X, Z),$$

форма которых воспроизводит классические формулы Гаусса—Кодацци из теории поверхностей трехмерного евклидова пространства.

Если $p = 2$ и подбазис данной дистрибуции (D) будет v_1, v_2, то гауссова кривизна по площадке D_x в каждой точке $x \in B$ определена формулой

$$(\mathrm{ГК}) \qquad R(D_x) = R(v_1, v_2, v_1, v_2) : \{g(v_1, v_1)\, g(v_2, v_2) - (g(v_1, v_2))^2\}.$$

Если же $p > 2$, то можно использовать обобщенную формулу для гауссовой кривизны по площадке D_x, введенную Гр. Станиловым (Arch. Math. B. 21, 1970) для подмногообразий конечномерных римановых пространств:

$$(\mathrm{C}) \qquad R(D_x) = \sum_{a, b=1}^{p} R(v_a, v_b),$$ где $\{v_a\}_{a=1,\ldots,p}$ есть подбазис в дистрибуции (D).

4. О геометрии векторных полей. Нас будет интересовать случай $p = 1$ одномерной дистрибуции, данной векторным полем $v \in \mathbf{X}(B)$ или его версором u на B, а также случай двухмерной дистрибуции содержащую $v \in \mathbf{X}(B)$, которая связана внутренним образом с полем v. Так как нормальная дистрибуция к данному полю состоит из гиперплоскостей, перпендикулярных к v в соответственной точке, то их совокупность образует гиперповерхность (вообще неголономную) B_n, нормальную к линиям тока (τ). Через каждую точку $x \in B$ проходит линия тока τ_x данной скорости v, у которой $e_0 = u = \dfrac{dx}{ds_0}$ будет касательным версором, где ds_0 элемент дуги τ. Выбирая версоры e_i $(i = 1, 2, \ldots)$ ортогональные к e_0 и между собою, так чтобы $(i+1)$-ая плоскость, определенная набором $(e_0, e_1, \ldots, e_i)$ была бы соприкасающейся плоскостью для τ, получаем последовательно подреперы Френе. Используя

ковариантную производную $\nabla_{e_0} e_\alpha$ ($\alpha = 0, 1, 2, \ldots$) по направлению e_0, разлагаемую по формуле (ГВ), находим формулы Френе до необходимого нам порядка:

$$(\Phi) \qquad \frac{\nabla e_\alpha}{ds_0} = -\varkappa_\alpha e_{\alpha-1} + \varkappa_{\alpha+1} e_{\alpha+1} \quad (\alpha = 0, 1, \ldots; \ \varkappa_0 = 0),$$

где e_i, $\varkappa_i$ суть соответственно нормаль и скалярная кривизна порядка i линии тока τ. В частности для $\alpha = 0$ имеем $\frac{\nabla u}{ds_0} = \varkappa_1 e_1 = k_1$, что дает векторное поле первой кривизны, для $\alpha = 1$ имеем $\frac{\nabla e_1}{ds_0} = -\varkappa_1 u + \varkappa_2 e_2$, где $\varkappa_2 e_2 = k_2$ дает векторное поле 2-ой кривизны и т. д. Если $\varkappa_1 = 0$, то линии τ будут геодезическими на B; если $\varkappa_1 = \text{const}$, $\varkappa_2 = 0$, то получим окружности на B; если же $\varkappa_1 = \text{const}$, $\varkappa_2 = \text{const}$, $\varkappa_3 = 0$, то имеем 1-ую винтовую линию на B и т. д.

5. О некоторых замечательных движениях на B. Формулы (Л) дают возможность обобщить естественным образом некоторые замечательные движения из классической механики сплошных сред, а формулы (Ф) — возможность их исследования. Ниже даны их определения на ГМ и некоторые их свойства:

1) Движение, определяемое полем скорости v, называется м е д л е н н ы м, если удовлетворяет соотношению $\nabla_v v = 0$, откуда следует немедленно: $\nabla_v \|v\| = 0$, $\nabla_u u = 0$. И так, в этом случае линии тока будут одновременно геодезическими и изотахейными; очевидно справедливо и обратное; следствие: $L_v^* v = \nabla g(v, v)$.

2) Движение, определяемое скоростью v, будет в и н т о в ы м, если имеет место уравнение $L_v^* v = 0$ (то-есть вектор Лэмба аннулируется; в трехмерном движении это выражено соотношением $\text{rot}\, v \times v = 0$). На языке пфаффовых форм оно запишется через $i_v d\omega_v + dg(v, v) = 0$ или $d\omega_v(v, X) + X(X g(v, v) = 0, X \in \mathfrak{X}(B)$, что дает геометрическое истолкование. При винтовом потоке имеем

$$\nabla_v v = \nabla \frac{\|v\|^2}{2},$$

а это показывает, что $k_1 = \text{Grad} \lg \|v\|$, то-есть что векторное поле первой кривизны будет нормальной компонентой градиента логарифма величины скорости.

3) Движение, определяемое полем v, будет б е р н у л л и е в ы м, если вектор Лэмба будет градиентом, то-есть имеем

$$L_v^* v = \nabla \varphi \ (\varphi \in F(B))$$

или на языке форм: $\omega_{L_v^* v} = d\varphi$. В этом случае из (Л) получаем $i_v d\omega_v = d(\varphi - g(v, v))$ или $\nabla_v v = \nabla(\varphi - g(v, v))$, а также $d(i_v d\omega_v) = 0$.

И при данном движении можно использовать для истолкования вектор первой кривизны, как и в классической механике.

6. О геометрии векторного поля (продолжение). Напомню, что каждое векторное поле $X, Y, \ldots$ на B разлагается единственным образом по u и по B_u, то-есть: $X = X^0 + \xi$, $Y = Y^0 + \eta$, где $\xi, \eta \in \mathbf{X}(B_u)$. Используя формулы (ГВ), имеем

$$\text{(ГВ')} \qquad \nabla_\xi \eta = \nabla_\xi \eta + \alpha(\xi, \eta), \quad \nabla_\xi v = -A_v(\xi) + D_\xi v,$$

где $\nabla_\xi \eta$, $A_v(\xi) \in \mathbf{X}(B_u)$, а $\alpha(\xi, \eta) = \varphi(\xi, \eta)$, определяет на B_u ее вторую фундаментальную форму. Напомним, что $g(\alpha(\xi, \eta), v) = g(A_v(\xi), \eta)$, и при $v = u$ получим $\varphi(\xi, \eta) = g(A_u(\xi), \eta)$, так как $g(u, u) = 1$. Если B_u будет голономной гиперповерхностью, то форма $\varphi(\xi, \eta)$ будет симметричной.

Пусть $\gamma \subset B_u$ есть кривая на B_u с касательной $\xi = \frac{dx}{ds} = \dot{x}(s)$, где ds — элемент дуги γ. В частности, если $\xi = k_1 = \varkappa_1 e_1$, то γ будет интегральной кривой первой нормали линий тока и т. д. Для кривой γ на B_u определяем геодезическую кривизну по формуле

$$\text{(г)} \qquad \varkappa_g(\gamma) = \nabla_{\dot{x}} \dot{x} \quad ;$$

если $\varkappa_g = 0$, то кривая γ будет геодезической на B_u. Для γ можем определить и ее нормальную кривизну по формуле

$$\text{(н)} \qquad \varkappa_n(\gamma) = \varphi(\dot{x}, \dot{x});$$

если $\varkappa_n = 0$, то линия γ будет асимптотической на B_u. Из (н) видно, что $\varkappa_n$ зависит только от направления и таким образом приходим к классической формуле

$$\varkappa_n = \frac{\varphi(\xi, \xi)}{g(\xi, \xi)}.$$

В координатной записи она выражается так

$$\varkappa_n = \frac{\Gamma^0_{(ij)} \xi^i \xi^j}{g_{ij} \xi^i \xi^j},$$

где Γ^0_{ij} — коэффициенты связности (ЛЧ).

Можно и в данном случае поставить вопрос найти направления касательные к B_u, для которых нормальная кривизна будет экстремумом. Используя (н), переписанная под формой

$$(\varkappa_n g_{ij} - \Gamma^0_{(ij)}) \xi^i \xi^j = 0,$$

получим, как и в классическом случае систему уравнений

$$(\varkappa_n g_{ij} - \Gamma^0_{(ij)}) \xi^j = 0, \quad i = 1, 2, \ldots,$$

но в данном случае имеем бесконечное число уравнений. Каждое решение этой системы дает главное направление, а соответствующее значение $\varkappa_u$ по (и) будет главной кривизной. Из формы полученной системы следует, что главные направления ортогональны и потому их совокупность даст канонический репер Дарбу (D_2); этот репер ортонормирован. Кривые, огибаемые ребрами этого репера, будут линиями кривизны 2-го рода на B_u. Репер (D_2) на B_u вместе с версором скорости u образуют канонический ортонормальный репер поля скорости. Посредством формул (ГВ'), где $\xi = \dot{x}$, $v = u$, мы сможем обобщить другое свойство линий кривизны на поверхности. Предположим, что вдоль кривой на B ее нормаль u описывает развертывающуюся двухмерную поверхность. Тогда удовлетворено уравнение $(\nabla_{\dot{x}} u, \dot{x}, u) = 0$, откуда следует соотношение $A_u \dot{x} = \lambda \dot{x}$ или $A_u \xi = \lambda \xi$. Это равенство приводит к бесконечной системе уравнений, которая в координатной записи будет

$$(\Gamma^0_{ji} - \delta_i^j \lambda)\xi^i = 0, \quad j = 1, 2, \ldots$$

Ее решения дают направления, огибающие линии кривизны 1-го рода на B. Множество различных направлений, являющиеся решениями этой системы, заодно с версором скорости u образуют другой канонический репер поля скорости (D_1), который вообще не ортонормальный. Когда гиперповерхность B_u голономна, то-есть уравнение $\omega_v = 0$ вполне интегрируемо, и тогда $d\omega_v \wedge \omega_v = 0$; реперы (D_1) и (D_2) совпадают.

З а м е ч а н и е. Хотелось бы упомянуть, что на I-м КБМ я выступил с докладом „О геометрии векторных полей и ее приложениях", исследуя тогда эти образы в E^3, а проф. А. М а т е е в их исследовал в 3-хмерном псевдоевклидовом пространстве и что многие из свойств, найденные им, обобщаются непосредствено на бесконечномерные БМ с метрической структурой. Это показывает еще раз, что правильное обобщение содержит в ядре большинство из свойств исходного образа.

7. О жестких движениях на (B, g). На БМ (B, g) с метрической структурой выберем счетный репер $(e_0, e_1, e_2, \ldots)$, такой что версор u скорости был бы $u = e_0$ и начнем с определений.

Векторное поле v будет полем скорости ж е с т к о г о (квази-твердого) движения К (Киллинга) или Р (Розена), если оно удовлетворяет уравнению

(К) $$L_v g(X, Y) = 0 \quad \text{для всех } X, Y \in F(B),$$

или уравнению

(Р) $$L_u g(\xi, \eta) = 0 \quad \text{для всех } \xi, \eta \in F(B_u).$$

В координатной записи они выражаются через

(К) $\nabla_{(\alpha} v_{\beta)} = 0, \quad \alpha, \beta = 0, 1, 2, \ldots$ (Р) $\nabla_{(i} u_{j)} = 0, \quad i, j = 1, 2, \ldots$

Мы будем говорить, что векторное поле v с версором u будет скоростью **конформно жестких** движений (K_c) или (P_c), если оно удовлетворяет уравнению

$$(K_c) \qquad L_v g(X, Y) = \lambda g(X, Y) \text{ для всех } \lambda \in F(B),\ X, Y \in \mathbf{X}(B),$$

или уравнению

$$(P_c) \qquad L_u g(\xi, \eta) = \lambda g(\xi, \eta) \text{ для всех } \lambda \in F(B_u),\ \xi, \eta \in \mathbf{X}(B_u).$$

В координатной записи компоненты скорости или ее версора проверяют бесконечную систему уравнений:

$$(K_c) \qquad \nabla_{(\alpha} v_{\beta)} = \lambda g_{\alpha\beta}, \qquad (P_c) \qquad \nabla_{(i} u_{j)} = \lambda g_{ij}\ (g_{ij} = g_{ij}|_{B_u}).$$

Наконец, поле v будет скоростью **обобщенных жестких** движений (K_g) если для каждого $X \in \mathbf{X}(B)$ имеем

$$(K_g) \qquad L_v g(X, X) = \lambda_X g(X, X),$$

где функция λ_X меняется заодно с полем X. В индексной форме оно запишется так:

$$\nabla_{(\alpha} v_{\beta)} = 0\ (\alpha \neq \beta), \quad \nabla_\alpha v_\alpha = \lambda_X (K_g).$$

Отсюда следует, что в этом случае имеем осевые расширения.

Из этих определений легко заметить, что имеем следующие включения

$$K \subset K_c \subset K_g,$$

$$\hat{R} \subset \hat{R}_c.$$

Замечание. На БМ (B, g) с метрической структурой можно распространить и другие движения, введенные мною на римановых многообразиях. Идет речь о:

1) аффинных коллинеациях, когда скорость удовлетворяет:

$$(L_v \nabla)_Y Z = 0,$$

2) аффинных коллинеациях, когда скорость удовлетворяет:

$$(L_v \nabla)_Y Z = \lambda \Delta_Y Z,$$

3) расширенных аффинных движениях, когда версор скорости удовлетворяет:

$$(L_u \nabla)_\xi \eta = 0,$$

4) конформных аффинных движениях, когда версор скорости удовлетворяет:

$$(L_u \nabla)_\xi \eta = \lambda \nabla_\xi \eta.$$

Нетрудно получить и координатную запись этих уравнений. Этими движениями в этом докладе мы не будем больше заниматься.

Далее используем локальный оператор $A_v = L_v - \nabla_v$, где ∇ есть связность (ЛЧ), а потому имеем $A_v X = \nabla_X v$. Так как для движений (К) $A_v g(X, Y) = 0$, то это уравнение можно еще записать и так:

$$\text{(К)} \qquad g(\nabla_X v, Y) + g(X, \nabla_v Y) = 0.$$

Аналогично запишется и уравнение (Р), именно

$$\text{(Р)} \qquad g(\nabla_\xi u, \eta) + g(\xi, \nabla_\eta u) = 0$$

или

$$\text{(Р)} \qquad \varphi(\xi, \eta) + \varphi(\eta, \xi) = 0.$$

Для $\xi = \eta$ получаем $\varphi(\xi, \xi) = 0$, откуда следует, что на B асимптотические направления (линии) неопределены и обратно; следовательно:

Теорема I. Движения (Р) на B характеризуются тем, что на гиперповерхности B_u, нормальной к линиям тока, асимптотические линии неопределены; иначе говоря, B_u будет локально плоскостной гиперповерхностью.

Следствие: $\operatorname{div} u = 0$.

Для изучения движений (К) на B, имея ввиду, что $L_v X = [v, X] = |v| [u, X] - X(|v|) u$, получаем

$$L_v g(X, Y) = |v| L_u g(X, Y) + X(|v|) g(u, Y) + Y(|v|) g(X, u).$$

Далее, так как $X = X^0 + \xi$, $Y = Y^0 + \eta$, после небольших выкладок следует эквивалентность

$$L_v g(X, Y) = 0 \quad \sim \quad L_u g(\xi, \eta) = 0, \qquad \nabla \lg |v| = -k_1,$$

а потому справедливо и обратное и имеем:

Теорема II. Движения (К) на B суть только те движения (Р), для которых норма скорости дана соотношением $\nabla \lg |v| = -k_1$, где k_1 поле 1-ой кривизны линий тока.

Следствия. $\operatorname{div} v = 0$ и $\nabla_v v = -\nabla \frac{|v|^2}{2}$, что проверяется посредством координатной записи.

Аналогично доказывается, что формула (P_c) эквивалентна соотношению $\varphi(\xi, \eta) + \varphi(\eta, \xi) = \lambda g(\xi, \eta)$, а потому имеем:

Теорема III. Движения (P_c) на B характеризуются пропорциональностью фундаментальных форм на гиперповерхности B_u, ортогональной к линиям тока. Иначе говоря, B_u будет локальная неголономная гиперсфера.

Теперь легко выводятся еще 2 теоремы, истолковывая уравнения (K_c) и (K_g).

Теорема IV. Движения (K_c) на B суть только те движения (P_c), для которых норма скорости проверяет уравнение

$$\nabla \lg |v| = -k_1 - \varphi u, \qquad \text{где } \varphi = -\operatorname{div} v / 2 |v|^2.$$

Теорема V. Движения (K_g) на B удовлетворяют следующим условиям:

1) первая нормаль линий тока будет одновременно и главным направлением на B_n;

2) нормальная комп. логарифма величины скорости равна (до знака) вектору 1-ой кривизны линий тока, то-есть: $\operatorname{Grad} \lg v = k_1$. Эти 2 свойства характерны для обобщенного жесткого движения на B.

8. О некоторых замечательных движениях в релятивистской механике. Известно, что геометрический образ для общей теории относительности является ДМ 4-х измерений B, оснащенное гиперболической нормальной метрикой g, для которой при общем ортонормальном репере ее квадраты имеют знаки $(+ - - -)$. Совершенная жидкость в какой-то области $U \subset B$ представлена через бивалентный тензор энергии-импульса T и соотношением $\rho = f(p)$ между плотностью и давлением. Если u поле версоров временной скорости, то-есть: $g(u, u) = 1$, то в релятивистской Г (гидродинамике) $T_Г$ выражается в инвариантной записи через $T_Г = (\rho + p)\, U \otimes U - pg$, а в координатной будет $T^{\alpha\beta} = (\rho + p)\, U^\alpha U^\beta - p\, g^{\alpha\beta}$. Если в жидкости имеют место и электромагнитные феномены, то в МГ (магнитной гидродинамике) тензор энергии-импульса получает коррекцию τ и будет $T_{МГ} = T_Г + \tau$, где $\tau = \mu \{ h \otimes h + \gamma\, h \}$, где $\gamma = g_{вн}$, а h есть пространственное векторное поле магнитного напряжения, а потому имеем $g(h, h) < 0$ и $g(u, h) = 0$. В индексной записи коррекция выражается так:

$$\tau^{\alpha\beta} = \mu \{ h^\alpha h^\beta + \gamma^{\alpha\beta}\, h \} \qquad (\mu = \text{const}).$$

В обеих динамических жидкостях тензор энергии-импульса удовлетворяет условию консервации, которое выражено соотношением

$$(\Phi) \qquad \operatorname{div} T = 0$$

или через координаты:

$$(\Phi) \qquad \nabla_\alpha T^{\alpha\beta} = 0.$$

Оно содержит одно скалярное уравнение непрерывности и 3 уравнения движения.

В случае МГ к уравнению $\operatorname{div} T_{МГ} = 0$ еще добавляют так называемое локальное уравнение Максвелля, которое в нашей записи будет

$$[u, h] + \operatorname{div} u.\ h - \operatorname{div} h.\ u = 0$$

$$\operatorname{div} (u \wedge h) = 0,$$

а в координатной записи имеем $\nabla_\alpha (h^\alpha u^\beta - u^\alpha h^\beta) = 0$.

Из этого уравнения, если линии тока не геодезические, имеем:

Теорема VI. В релятивистской МГ, если поле скорости не геодезическое, а магнитное поле соленоидально $(\operatorname{div} h = 0)$, то поле h ортогонально к соприкасающейся двухплоскости линий тока; справедливо и обратное свойство.

Сейчас, если предположим, что течение жидкости в Г или МГ подчинено одному из замечательных движений, о которых шла речь, то первым долгом для них справедливы установленные нами свойства и кроме того фундаментальные уравнения, вообще, сильно упрощаются. Ставится тогда вопрос исследовать условия совместности совокупности уравнений, выражающих все свойства.

Возьмем простейшие примеры:

1) В релятивистской Г при медленном движении (Ф) сводится к $\frac{dp}{p_0}\ \omega_n$, где $p_0 \cdot \nabla p \cdot n$. Итак имеем: при медленном движении Г жидкости линии тока будут геодезическими изотахейными, а нормальная к ним B_n сводится к однопараметрическому семейству гиперповерхностей, на каждой из которых плотность постоянна.

2) В Г для движений (К) и (Р) и в МГ для (К) имеем одно и тоже (Ф) $\nabla p = \lambda k_1$, где для случаев 2), 1) имеем $\frac{1}{\lambda} = p + f(p)$, а для 3) $-\lambda = \mu\ h^2 - p = f(p)$.

Отсюда следует, что во всех трех случаях векторное поле первой кривизны линий тока будет голономным и на каждой из ортогональных к нему гиперповерхностей как давление, так и величина скорости остаются постоянными.

Проблема существования кинематических движений в пространстве относительности сводится к исследованию на инволютивность следующей системы пфаффовых уравнений:

$$(Ж) \qquad \omega^\lambda_\beta = \Gamma^\alpha_{\beta\lambda}\,\omega^\lambda \quad (\lambda, \alpha, \beta = 0, 1, 2, 3),$$

где $\Gamma^\alpha_{\beta\lambda}$ — коэффициенты связности (ЛЧ).

Если желаем исследовать существование движений (P_e) и (Р), то к (Ж) добавим скалярные соотношения, выражающие условия (P_e) и (Р), именно:

$$(Р) \qquad \Gamma^0_{ij} = 0 \ (i \neq j = 1, 2, 3),\ \Gamma^0_{11} = \Gamma^0_{22} = \Gamma^0_{33} = \lambda\ (= 0 \text{ при } R) \text{ и}$$

$$\Gamma^0_{20} = \Gamma^0_{30} = \Gamma^1_{31} = 0 \quad (\text{выбор репера Френе}).$$

Далее, применяя известный метод Картана, устанавливаем непротиворечивость системы (Ж, Р) и что ее регулярные решения зависят от 3-х функций 4-х аргументов, так как имеем $s_0 = 6$ уравнений с $n = 4$ независимыми переменными, содержащие $N = 16$ неизвестных функций, а вычисленные характеры системы будут: $s_1 = 6$, $s_2 = 4$, $s_3 = s_4 = 3$.

Если же рассматриваем движение (K_g), то к системе (Ж) присоединяется пфаффовое уравнение $d\lg v = \partial_0 \lg v\ \omega^0 + \Gamma^0_{10}\omega^1$, а так же $\Gamma^0_{ij} = 0$ $(i \neq j = 1, 2, 3)$.

В этом случае имеем $s_0 = 7$, $n = 4$ и $N = 21$, а характеры будут: $s_1 = 7$, $s_2 = s_3 = 5$, $s_4 = 4$.

Аналогично исследуется существование движений (K_c) и (К), регулярные решения которых зависят соответственно от двух и одной функции четырех аргументов.

Замечание. Сейчас легко установить во всех трех случаях жестких движений Г. и МГ. жидкости их существование и широту регулярных решений, добавляя к (Ж) и условиям, выражающих соответствующую жесткость, еще и фундаментальные уравнения жидкости. Находим, что во всех трех случаях решения зависят от одной функции четырех аргументов.

* * *

Все рассмотренные движения, связанные с окрестностью 2-го порядка, находят себе применение в классической механике, а некоторые и в технике. Главное их преимущество, что при допущении таких движений в определенной среде основные уравнения механики весьма упрощаются. Мне кажется, что следовало бы изучить еще более конкретные движения, объединяющие некоторые из них. Недавно я занялся случаем жестких движений (K_c), которые являются и бернуллиевыми (Б), и констатировал, что они существуют и их линии тока могут быть или ортогональны однопараметрическому семейству сфер (случай а), или иметь постоянную кривизну. Далее, при стационарном режиме вязкой жидкости выявляются и другие кинематические свойства как напр. соотношения $\mathrm{rot}^2 v + v = 0$, $\mathrm{rot}^2 v + \mathrm{rot}\, v = 0$, а дальше я не продолжил выкладки. При нестационарном режиме идеальной жидкости в случае а оказалось, что движения имеют место в плоскостях, зависящих от одного параметра. В обоих случаях такие движения существуют и решения зависят от одной функции трех аргументов. Исследование этого комбинированного движения (K_c)+(Б) в ГМ и в пространстве общей теории относительности повидимому приведет к весьма интересным результатам.

Наконец, предлагаю вашему вниманию одну неисследованную задачу того же характера. Известно, что в классической механике движение, выражаемое уравнением

$$\mathrm{rot}\, v = \lambda v, \tag{Н}$$

называется винтовым, а по инициативе Трюсделля еще и Громека—Бельтрами. Если же движение не винтовое, то плоскость поля скорости и вихря называют плотностью Лэмба. Случай движений (Б) сводится к тому, что плоскости Лэмба огибают однопараметрическое семейство поверхностей. Каждое из этих движений было исследовано в многочисленных работах по естествознанию и технике. Теперь, если имеем винтовой поток, то исключая случай Громеки, второй вихрь уж не коллинеарен со скоростью. Ставится вопрос выявить движения (Н)+(Б) в смысле, что плоскость (v, $\mathrm{rot}^2 v$) огибала бы, однопараметрическое семейство поверхностей, а также, далее, обобщить

его на ГМ и в пространство относительности. Повидимому необходимо начать с исследования его существования.

* * *

Из нашего изложения следует, по-моему, сделать вывод, что необходимо систематическое изучение геометрии векторных полей в БМ, обладающих метрической структурой, привлекая к этому и такие модели как конгруэнции их интегральных кривых и ортогональные к ним дистрибуции, а также геометрию двух и вообще конечномерных флаговых дистрибуций, в особенности когда они внутренне связаны с векторным полем, привлекая к этому гауссову кривизну площадок в смысле обобщения Гр. Станилова.

Вторая часть доклада повидимому есть дань общего настроения у математиков за последнее время вернуться к более конкретным задачам и так же того, что в бесконечномерной дифференциальной геометрии это также назрело.

SUR LA DÉRIVATION DE LIE DANS LES VARIÉTÉS DE BANACH ET SUR QUELQUES MOUVEMENTS REMARQUABLES DANS LES MILIEUX CONTINUS

G. Guéorguiev

(RÉSUMÉ)

Dans la première partie on étend la dérivation de Lie, due à W. Ślebodziński (1931), à des variétés de Banach, concernant ses objets géométriques linéaires. On pose en évidence, au commencement, la structure algébrique de cet opérateur, et puis, en étapes, on ajoute des conditions nouvelles nécessaires pour l'étendre aux tenseurs d'un espace de Banach et alors d'un $F(B)$ module qui est une algèbre de Lie, où B est localement ou globalement un espace de Banach, tandis que $F(B)$ est l'anneau de ses fonctions différentiables. L'appareil analytique — les formules invariantes déduites dans ce cas — reste formellement le même quand B est une variété différentiable avec le modèle un espace de Banach. Puis on établit la liaison entre la dérivée de Lie et les lois des dérivations définies sur un fibré vectoriel (de Banach) et, en particulier, avec la connexion linéaire de B. On étudie la collinéation affine sur B et on établit la condition pour que la dérivation de Lie soit la connexion linéaire sur B.

Dans la deuxième partie du travail on fait diverses applications de l'opérateur de Lie à la mécanique ayant comme modèle (B, g) où g est le tenseur métrique défini sur la variété de Banach B, et en particulier si

(B, g) est une variété hilbertienne. On construit d'abord une géométrie d'un champ des vecteurs v défini sur (B, g) en utilisant la congruence de ses lignes intégrales et la distribution (hypersurface non holonome) orthogonale de celle-ci. Cette géométrie de champ vectoriel on utilise à l'étude de beaucoup des mouvements remarquables comme les mouvements lents, hélicoïdaux, bernoulliens et cinq types de mouvements quasi-rigides. On établit les propriétés caractéristiques — géométriques et cinématiques — la plupart d'elles étant analogues à celles connues de l'hydrodynamique classique. En particulier on recherche ces mouvements remarquables dans le cas de l'hydrodynamique et magnétohydrodynamique relativiste.