ОЦЕНКА НА РАЗЛИКАТА МЕЖДУ РАЗПРЕДЕЛЕНИЕ С РАСТЯЩА ФУНКЦИЯ НА ИНТЕНЗИВНОСТ И ЕКСПОНЕНЦИАЛНОТО

Апостол Обретенов

1. Функциите на разпределение $F(x)$, $x \geq 0$, за които отношението

$$r(t, x) = [F(t+x) - F(t)] / [1-F(t)] \tag{1}$$

е ненамаляваща функция относно t при фиксирано x, се наричат разпределения с растяща функция на интензивност (РФИ-разпределения). $r(t, x)$ е условната вероятност една случайна величина ξ с функция на разпределение $F(x)$ да не превишава x, ако е надхвърлила t. РФИ-разпределенията играят важна роля при много въпроси, разглеждани се в теорията на надеждността. Специален случай на едно РФИ-разпределение е експоненциалното, за което $r(t, x)$ не зависи от t.

В настоящата работа се намира (теорема 1) една оценка на разликата между едно произволно РФИ-разпределение $F(x)$ и експоненциалното със средна стойност, равна на тази за $F(x)$. Като приложение на намерената оценка е теорема 2.

2. Известно е [1], че едно РФИ-разпределение притежава крайни моменти от произволен ред. Нека μ_n е n-тият момент на функцията на разпределение $F(x)$, която предполагаме е РФИ. Тогава

$$\mu_n = \int_0^\infty x^n \, dF(x) < +\infty, \quad n = 1, 2, \ldots$$

Моментите μ_n удовлетворяват [2] неравенствата

$$\frac{\mu_{n+1}}{(n+1)!} \frac{\mu_{n-1}}{(n-1)!} \leq \left(\frac{\mu_n}{n!}\right)^2, \quad n \geq 1, \tag{2}$$

които са в известен смисъл обратни на известните неравенства на Ляпунов за моментите. Да означим с α_n отношението

$$\alpha_n = \frac{\mu_{n+1}}{(n+1)\mu_n}, \quad \alpha_0 = \mu_1. \tag{3}$$

От неравенствата (2) следва, че $\alpha_n \geq \alpha_{n-1}$ и тъй като $\alpha_n \geq 0$, то границата $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n = \alpha$ винаги съществува. Ние ще разглеждаме РФИ-разпределения, за които числото $\alpha \neq 0$. Ще докажем следната

Теорема 1. Нека $F(x)$, $x \geq 0$, е функция на разпределение с растяща функция на интензивност, за която границата

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\mu_{n+1}}{(n+1)\mu_n} = \alpha \neq 0.$$

Тогава

$$\sup_{x\geq 0} |F(x) - \exp\left(-\frac{x}{\mu_1}\right)| \leq 1 - \frac{\alpha}{\mu_1}, \quad \bar{F} = 1 - F. \tag{4}$$

Доказателство. За да докажем (4), първо ще оценим разликата между $F(x)$ и функцията

$$F_1(x) = \mu_1^{-1} \int_0^x \bar{F}(t)\,dt. \tag{5}$$

Да положим

$$\Delta_1(x) = F_1(x) - F(x).$$

Лесно се показва, че $F_1(x)$ е също РФИ-разпределение и следователно функцията $r_1(t, x)$, определена от (1) за $F_1(x)$, ще е ненамаляваща по t, така че

$$\lim_{x\to 0} x^{-1} r_1(t, x) = \lim_{x\to 0} x^{-1} r_1(o, x).$$

Горното неравенство ни води до $F_1(x) = F(x)$ или $\Delta_1(x) = 0$.

Нека $H(t)$ е функцията на възстановяване, определена от $F(x)$, т. е. от уравнението

$$H(t) = F(t) + H(t) * F(t). \tag{6}$$

С непосредствена проверка, като се използува видът (5) на функцията $F_1(x)$, се вижда верността на тъждеството

$$\frac{t}{\mu_1} - F_1(t) = F(t) * \frac{t}{\mu_1}. \tag{7}$$

Ако от съответните страни на (7) извадим тези на (6), получаваме, че разликата $\Delta_1(t)$ удовлетворява уравнението

$$\frac{t}{\mu_1} - H(t) = \Delta_1(t) + F(t) * \left[\frac{t}{\mu_1} - H(t)\right]$$

и понеже $\frac{t}{\mu_1} - H(t) \geq 0$, то от горното равенство следва

$$\sup_{t \geq 0} \Delta_1(t) = \sup_{t \geq 0} \left| \frac{t}{\mu_1} - H(t) \right|. \tag{8}$$

Да оценим сега разликата

$$\Delta(t) = E(t) - F(t), \text{ където } E(t) = 1 - \exp\left(-\frac{t}{\mu_1}\right).$$

Тъй като $E(t) + E(t) = \frac{t}{\mu_1}$, $F_1(t) + F(t) = \frac{t}{\mu_1}$, понеже и двете суми дават $\frac{t}{\mu_1}$, то $\Delta(t)$ удовлетворява уравнението

$$\Delta(t) + \mu_1^{-1} \int_0^t \Delta(x)\, dx = F_1(t) - F(t). \tag{9}$$

Знаем, че за всяко РФИ-разпределение функцията $\lg F(t)$ е изпъкнала [1]. Затова $\Delta(t)$ ще пресича абсцисата само един път и то от горе на долу. Нека t_0 е точката на пресичане. Тогава при $t \geq t_0$ имаме $\Delta(t) \leq 0$ и от (9) получаваме

$$\Delta(t) \leq F_1(t) - F(t) \leq \Delta_1(t). \tag{10}$$

Неравенството (10), като използуваме (8), ни дава

$$\sup_{0 \leq t \leq t_0} \Delta(t) \leq \sup_{t \geq 0} \Delta_1(t) = \sup_{t \geq 0} \left| \frac{t}{\mu_1} - H(t) \right|. \tag{11}$$

Да разгледаме сега стойностите на t, по-големи от t_0. Тъй като след t_0 функцията $\Delta(t)$ е отрицателна, то

$$0 \leq \int_0^t \Delta(x)\, dx \leq \int_0^{t_0} \Delta(x)\, dx, \quad t_0 \leq t. \tag{12}$$

Стойността на интеграла от $\Delta(x)$ е винаги неотрицателна, защото $\int_0^\infty \Delta(x)\, dx = 0$ и отначало $\Delta(x)$ взема положителни стойности, а след това отрицателни. От уравнението (9), понеже $F_1 - F \geq 0$, следва неравенството

$$-\Delta(t) \leq \mu_1^{-1} \int_0^t \Delta(x)\, dx$$

за всяко t или като използуваме неравенство (12),

$$\Delta(t) \leq \mu_1^{-1} \int_0^t \Delta(x)\,dx \leq \int_0^{t_0} \Delta(x)\,dx \text{ за } t \geq t_0. \tag{13}$$

Но за стойности на x от интервала $(0, t_0)$ според (10) имаме $\Delta(x) \leq \Delta_1(x)$. Да заместим $\Delta(x)$ с $\Delta_1(x)$ в подинтеграла отдясно на неравенството (13). Тогава

$$\Delta(t) \leq \int_0^{t_0} \Delta_1(x)dx \leq \mu_1^{-1} \int_0^{\infty} \Delta_1(x)dx = 1 - \frac{\mu_2}{2\mu_1^2}. \tag{14}$$

От добре известното гранично съотношение

$$\lim_{t \to \infty} \left| \frac{t}{\mu_1} - H(t) \right| = 1 - \frac{\mu_2}{2\mu_1^2}$$

и от (14) следва

$$\Delta(t) \leq \sup_{t \geq 0} \left| \frac{t}{\mu_1} - H(t) \right|. \tag{15}$$

Неравенствата (11) и (15) ни дават

$$\sup_{t \geq 0} \Delta(t) = \sup_{t \geq 0} \left| \frac{t}{\mu_1} - H(t) \right|. \tag{16}$$

Дясната страна на неравенство (16) не превишава $1 - \alpha\mu_1^{-1}$ според една теорема, доказана в [3]. С това верността на (4) е показана.

Ако $F(x)$ е експоненциално разпределение с параметър λ, то $\mu_n = n!\lambda^{-n}$ и $\alpha_n = \lambda^{-1} = \alpha$. В този случай неравенството (4) е равенство. Нека F е композиция от две експоненциални разпределения с параметри λ_1 и λ_2. Ще покажем, че в този случай $\alpha_n \to \max(\lambda_1^{-1}, \lambda_2^{-1})$. По-точно вярно е следното:

Ако $F = F_1 * F_2$, където F_1 и F_2 са експоненциални разпределения съответно с параметри λ_1 и λ_2, то границата (1) е

$$\lim_{n \to \infty} \alpha_n = \lim_{n \to \infty} \frac{\mu_{n+1}}{(n+1)\mu_n} = \max(\lambda_1^{-1}, \lambda_2^{-1}). \tag{17}$$

Наистина да предположим $\lambda_1 < \lambda_2$. С непосредствени пресмятания намираме

$$\alpha_n = \frac{\lambda_1^{-(n+2)} - \lambda_2^{-(n+2)}}{\lambda_1^{-(n+1)} - \lambda_2^{-(n+1)}}$$

и при $n \to \infty$ следва $\alpha_n \to \lambda_1^{-1} = \max(\lambda_1^{-1}, \lambda_2^{-1})$. При $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$ за α_n получаваме $\alpha_n \to \lambda^{-1}$ и (17) е пак вярно. Аналогично може да се покаже, че (17) е вярно и при композиране на повече от две разпределения. Така, ако

$$F = F_1 * F_2 * \ldots * F_m,$$

където F_k е експоненциално разпределение с параметър λ_k, $k = 1, 2, \ldots, m$, то

$$\lim_{n \to \infty} \alpha_n = \max(\lambda_1^{-1}, \lambda_2^{-1}, \ldots, \lambda_m^{-1}). \tag{18}$$

Ще направим едно приложение на доказаната теорема. Нека S е една крайна стохастична система с m състояния $1, 2, \ldots, m$ и вероятностите на преход да са:

λ_k P (за преминаване от състояние $k (\neq m)$ в $k+1$),

μ_k P (за преминаване от състояние $k (\neq 1)$ в $k-1$).

Теорема 2. Нека τ_m е времето до първо попадане на S в състояние m. Тогава, ако вероятностите λ_{m-1} се менят така, че $\lambda_{m-1} \to 0$, то

$$\lim_{\lambda_{m-1} \to 0} \mathrm{P}(\tau_m / E\tau_m < x) = 1 - e^{-x}. \tag{19}$$

Доказателство. Добре известно е (вж. напр. [4]), че разпределението $\mathrm{P}_m(t)$ на τ_m е

$$\mathrm{P}_m(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_C e^{st} \frac{\beta_1 \beta_2 \ldots \beta_m}{s(s+\beta_1)(s+\beta_2)\ldots(s+\beta_m)} ds, \tag{20}$$

където полиномите $Q_m(s) = (s+\beta_1)(s+\beta_2)\ldots(s+\beta_m)$ удовлетворяват рекурентното равенство

$$Q_m(s) = (s+\lambda_{m-1}+\mu_{m-1}) Q_{m-1} - \mu_{m-1}\lambda_{m-2} Q_{m-2},$$

$$Q_0(s) = 1, \quad Q_1(s) = s+\lambda_0,$$

а C е контур, обхващащ началото и нулите на $Q_m(s) = 0$. Ще покажем, че когато $\lambda_{m-1} \to 0$, то единият от корените β_k на $Q_m(s)$ клони към нула, а останалите към различни от нула стойности. Наистина от $Q_m(0) = \lambda_0 \lambda_1 \lambda_2 \ldots \lambda_{m-1}$ следва, че при $\lambda_{m-1} \to 0$ граничният полином $\tilde{Q}_m(s)$ ще има един корен нула, а произведението на останалите ще е $\lambda_0 \lambda_1 \ldots \lambda_{m-2} \neq 0$. Тъй като разпределението (20) е това на сума от m независими и експоненциално разпределени случайни величини с параметри β_k, то $\mathrm{P}_m(t)$ е РФИ-разпределение и може да използуваме неравенството (4) от теорема 1. Ще имаме

$$\sup_{t \geq 0} \left| \mathrm{P}_m(t) - e^{-t/E\tau_m} \right| \leq 1 - \max_k \beta_k^{-1} \Big/ \sum_{k=1}^{m} \beta_k^{-1}. \tag{21}$$

Използували сме, че в случая $\alpha = \max_k \beta_k^{-1}$ според намерената граница (18).

Неравенството (21) остава вярно и като вместо t пишем $t E \tau_m$. Тогава, ако $\beta_0 = \min_k \beta_k$ е най-малкият корен на $Q_m(s)$, то при $\lambda_{m-1} \to 0$ ще имаме $\beta_0 \to 0$ и от

$$\sup_{t \geq 0} \left| P_m(t E \tau_m) - e^{-t} \right| \leq 1 - \frac{1}{\beta_0 \sum_{k=1}^{n} \beta_k^{-1}}$$

следва $\lim_{\beta_0 \to 0} \sup_{t \geq 0} \left| P_m(t E \tau_m) - e^{-t} \right| = 0$, т. е. (19).

Според доказаната теорема 2 разпределението на времето τ_m за достигане на състояние m, ако вероятността λ_{m-1} за преминаване за единица време от състояние $m-1$ в m клони към нула, е експоненциално с параметър $(E \tau_m)^{-1}$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Барлоу, Р., Ф. Прошан: Математическая теория надежности. М., 1969.
2. Barlow, R. E., A. W. Marshall and F. Proschan: Properties of probability distributions with monotone hazard rate. Ann. Math. Stat., 34 (1963), 375–389.
3. Obretenov, A.: An Estimation for the Renewal Function of an IFR-Distribution. Proc. of European meeting of Statisticians, Budapest, 1972 (to appear).
4. Гнеденко, Б. В., Ю. К. Беляев, А. Д. Соловьев: Математические методы в теории надежности. М., 1965.

Постъпила на 31. X. 1972 г.

AN ESTIMATE FOR THE DIFFERENCE BETWEEN AN IFR-DISTRIBUTION AND AN EXPONENTIAL ONE

A. Obretenov

(SUMMARY)

The distribution functions $F(x)$, $x \geq 0$, for which the failure rate (1) is an increasing function of t for fixed x are called IFR-distributions.

The paper deals with estimates for the difference between an IFR-distribution and the exponential one. It is proved that for every IFR function $F(x)$ there is an estimation (4).

The Theorem 2 is an application of the above estimation. It is shown that the time τ_m of the first entry of a finite stochastic system with m states into the state m is asymptotically exponential.