ФОРМУЛИ НА КРОФТОН ЗА ХИПЕРКОМПЛЕКСИ ОТ ТАНГЕНТИ И ДВУМЕРНИ ДОПИРАТЕЛНИ РАВНИНИ КЪМ ХИПЕРПОВЪРХНИНА В E_4

Адриян В. Борисов

Настоящата работа е обобщение на [3], където в тримерното евклидово пространство E_3 е намерена една формула на Крофтон за повърхнина и комплекс от тангенти към нея. Ние разглеждаме аналогични въпроси за хиперкомплекси от тангенти и двумерни допирателни равнини към хиперповърхнина в E_4. Използваме метода на външните диференциални форми на Картан, който, както е добре известно, е особено подходящ за целите на интегралната геометрия.

§ 1.

Нека в четиримерното евклидово пространство E_4 е дадена хиперповърхнина S_3. С всяка нейна точка F свързваме ортонормален репер $F f_1 f_2 f_3 f_4$. Деривационните и структурните уравнения са съответно

$$dF = \psi^i f_i, \quad df_i = \psi_i^k f_k, \tag{1}$$

$$D\psi^i = \psi^j \wedge \psi_j^i, \quad D\psi_i^j = \psi_i^k \wedge \psi_k^j, \tag{2}$$

като

$$\psi_i^k = -\psi_k^i.$$

В горните формули и почти навсякъде по-долу имаме сумиране по Айнщайн. Индексите i, j, k вземат значенията от 1 до 4; α, β, γ — от 1 до 3; s, t — 1, 2; u, v — 2, 3. Когато имаме отклонение от тази уговорка, ще употребяваме знак за сумиране.

Допирателната хиперравнина τ_3 в точката F от S_3 определяме с векторите f_1, f_2 и f_3. Тогава

$$\psi^4 = 0. \tag{3}$$

Приемаме диференциалните форми ψ^α за базисни и при произволно избран каноничен репер на хиперповърхнината можем да изразим всички останали форми ψ_i^k чрез тях

$$\psi_i^k = \lambda_{ij}^k \psi^j. \tag{4}$$

Уравнението (3) определя хиперповърхнината S_3, за която хиперравнината τ_3 е допирателна в точката F тогава и само тогава, когато е напълно интегрируемо. За това е необходимо и достатъчно да бъде изпълнено равенството

$$\lambda^4_{\alpha\beta} = \lambda^4_{\beta\alpha}, \quad \alpha \neq \beta. \tag{5}$$

Специализираме репера на повърхнината, като избираме векторите f_1, f_2 и f_3 по главните ѝ направления [1]. Това води до

$$\lambda^4_{\alpha\beta} + \lambda^4_{\beta\alpha} = 0, \quad \alpha \neq \beta,$$

което заедно с (5) ни дава

$$\lambda^4_{\alpha\beta} = 0, \quad \alpha \neq \beta. \tag{6}$$

Главните кривини на хиперповърхнината са:

$$\nu_\alpha = -\lambda^4_{\alpha\alpha}. \tag{7}$$

Образуваме външната диференциална форма от трети ред

$$dS_3 = \bigwedge_\alpha \psi^\alpha. \tag{8}$$

Непосредствено се проверява, че е изпълнено

$$D(dS_3) = 0$$

и съгласно [2] можем да твърдим, че хиперповърхнините в E_4 са измерими съвкупности и инвариантните им плътности се дават с (8).

§ 2.

В допирателната хиперравнина $\tau_3 = [F;\ f_1,\ f_2,\ f_3]$ разглеждаме хиперкомплекс K^1_5 от тангенти в точката F от S_3. С произволна тангента τ_1 свързваме ортонормален репер $A\,e_1\,e_2\,e_3\,e_4$, като

$$\text{а}_1)\quad \tau_1 = [A;\ e_1],$$

$$\text{б}_1)\quad A = F, \quad e_4 = f_4.$$

За него имаме аналогично

$$dA = \omega^i e_i, \quad de_i = \omega^k_i e_k, \tag{9}$$

$$D\omega^i = \omega^j \wedge \omega^i_j, \quad D\omega^j_i = \omega^k_i \wedge \omega^j_k, \tag{10}$$

като

$$\omega^j_i = -\omega^i_j.$$

От б_1) следва

$$\omega^4 = 0. \tag{11}$$

Лесно се проверява, че за външната диференциална форма от пети ред

(12) $$dK_5^1 = \omega^3 \wedge \omega^2 \wedge \omega_1^2 \wedge \omega_1^3 \wedge \omega_1^4$$

външният ѝ диференциал е нула:

$$D(dK_5^1) = 0.$$

Следователно

Теорема 1. Хиперкомплекс K_5^1 от тангенти τ_1 в допирателните хиперравнини τ_3 към хиперповърхнината S_3 е измерима съвкупност и инвариантната ѝ плътност се дава с (12).

Ние ще намерим друго представяне за (12), като използваме получената формула (8). В τ_3 имаме два ортонормални репера $F f_1 f_2 f_3$ и $A e_1 e_2 e_3$ с общо начало $A = F$. Нека

(13) $$e_\alpha = a_\alpha^\beta f_\beta,$$

като (a_α^β) е ортогонална матрица. Ако диференцираме равенствата

(14) $$A = F, \quad e_1 = a_1^\alpha f_\alpha,$$

използваме (13) и сравним коефициентите пред f_α, получаваме

(15) $$a_\gamma^\alpha \omega^\gamma = \psi^\alpha,$$

(16) $$a_u^\alpha \omega_1^u = d a_1^\alpha + a_1^\beta \psi_\beta^\alpha, \quad \beta \neq \alpha,$$

(17) $$\omega_1^4 = a_1^\alpha \psi_\alpha^4.$$

От получените системи (15), (16) и (17) намираме:

$$\omega^u = \sum_\alpha a_u^\alpha \psi^\alpha,$$

(18) $$\omega_1^v = \sum_\alpha (d a_1^\alpha + a_1^\beta \psi_\beta^\alpha) a_v^\alpha, \quad \beta \neq \alpha,$$

$$\omega_1^4 = a_1^\alpha \psi_\alpha^4.$$

Тогава от (4), (7), (12) и (18) получаваме

$$dK_5^1 = \det\left(a_u^s - a_u^3 \frac{a_1^s}{a_1^3} \right) (a_1^\alpha)^2 \nu_\alpha \wedge_s d a_1^s \wedge \bigwedge_\alpha \psi^\alpha.$$

Но

$$\det\left(a_u^s - a_u^3 \frac{a_1^s}{a_1^3} \right) = \frac{1}{a_1^3}$$

и следователно

$$dK_5^1 = \frac{1}{a_1^3}(a_1^\alpha)^2 \nu_\alpha \underset{s}{\wedge} da_1^s \wedge \underset{\alpha}{\wedge} \psi^\alpha . \tag{12'}$$

Означаваме с θ_1 ъгъла между векторите e_1 и f_1. Очевидно

$$a_1^1 = \cos\theta_1 . \tag{19}$$

Ако e_1' е ортогоналната проекция на e_1 върху равнината $[F; f_2, f_3]$ и $\sphericalangle(e_1', f_2) = \theta_2$, то

$$\begin{aligned} a_1^2 &= \sin\theta_1 \cos\theta_2 , \\ a_1^3 &= \sin\theta_1 \sin\theta_2 \end{aligned} \tag{20}$$

при така избраните ъгли θ_1 и θ_2 се вижда, че произволно въртене на τ_1 се осъществява при

$$0 \leqq \theta_1 < \pi , \quad 0 < \theta_2 < \pi . \tag{21}$$

Заместваме (19) и (20) в (12) и получаваме търсеното ново представяне за (12)

$$\begin{aligned} dK_5^1 = (&\sin\theta_1 \cos^2\theta_1 . \nu_1 + \sin^3\theta_1 \cos^2\theta_1 . \nu_2 \\ &+ \sin^3\theta_1 \sin^2\theta_2 . \nu_3) \underset{s}{\wedge} d\theta_s \wedge dS_3 . \end{aligned} \tag{22}$$

Интегрираме двете страни на (22) в граници (21) в случая, когато дясната страна на (22) не се анулира. След елементарни пресмятания достигаме до следната формула от Крофтонов тип:

$$\int\limits_{(L_1)} N(\tau_1) dK_5^1 = \frac{2\pi}{3} \int\limits_{(S_3)} \nu_1 + \nu_2 + \nu_3 \; dS_3 . \tag{23}$$

В лявата страна интегрирането е извършено върху L_1 — множеството на всички прави в E_4. $N(\tau_1)$ е броят на допирните точки на τ_1 с S_3. Вдясно интегрирането е върху S_3.

§ 3.

Посредством начина, показан в § 2, ще намерим формула от Крофтонов тип за хиперкомплекс K_5^2 от двумерни равнини, разположени в τ_3.

С произволна двумерна равнина τ_2 свързваме ортонормален репер $B g_1 g_2 g_3 g_4$, като

$$\text{а}_2)\ \tau_2 = [B;\ g_1, g_2] ,$$

$$\text{б}_2)\ B = F, \quad g_4 = f_4 .$$

Нека

$$dB = \varphi^i g_i , \quad dg_i = \varphi_i^k g_k , \tag{24}$$

(25) $$D\varphi^i = \varphi^j \wedge \varphi^i_j, \quad D\varphi^j_i = \varphi^k_i \wedge \varphi^j_k,$$

като

$$\varphi^j_i = -\varphi^i_j.$$

От б$_2$) следва

(26) $$\varphi^4 = 0.$$

Образуваме външната диференциална форма от пети ред

(27) $$dK^2_5 = \varphi^3 \wedge \varphi^3_1 \wedge \varphi^3_2 \wedge \varphi^4_1 \wedge \varphi^4_2.$$

За нея е изпълнено

$$D(dK^2_5) = 0$$

и следователно е вярна следната

Теорема 2. Хиперкомплекс K^2_5 от двумерни равнини τ_2 в допирателните хиперравнини τ_3 към хиперповърхнината S_3 е измерима съвкупност и инвариантната ѝ плътност се дава с (27).

Нека

(28) $$g_\alpha = \lambda^\beta_\alpha f_\beta,$$

като (λ^β_α) е ортогонална матрица. Диференцираме равенствата

(29) $$B = F, \quad g_s = \lambda^\alpha_s f_\alpha$$

и като сравним коефициентите пред f_α, получаваме системите уравнения

(30) $$\lambda^\alpha_\gamma \varphi^\gamma = \psi^\alpha,$$

(31) $$\lambda^\alpha_u \varphi^u_1 = d\lambda^\alpha_1 + \lambda^\beta_1 \psi^\alpha_\beta, \quad \beta \neq \alpha,$$

$$\varphi^4_t = \lambda^\alpha_t \psi^4_\alpha,$$

(32) $$\lambda^\alpha_w \varphi^w_2 = d\lambda^\alpha_2 + \lambda^\beta_2 \psi^\alpha_\beta, \quad w = 1, 3; \quad \beta \neq \alpha.$$

От тях лесно намираме

$$\varphi^3 = \sum_\alpha \lambda^\alpha_3 \psi^\alpha,$$

(33) $$\varphi^3_s = \sum_\alpha (d\lambda^\alpha_s + \lambda^\beta_s \psi^\alpha_\beta)\lambda^\alpha_3, \quad \beta \neq \alpha,$$

$$\varphi^4_t = \lambda^\alpha_t \psi^4_\alpha.$$

Диференцираме равенствата

$$\sum \lambda^\alpha_2 \lambda^\alpha_3 = 0, \qquad \sum_\alpha (\lambda^\alpha_3)^2 = 1$$

и получаваме

(34) $$\sum_{\alpha} \lambda_3^{\alpha} d\lambda_2^{\alpha} = -\sum_{\alpha} \lambda_2^{\alpha} d\lambda_3^{\alpha},$$

(34') $$\sum_{\alpha} \lambda_3^{\alpha} d\lambda_3^{\alpha} = 0.$$

Очевидно

(35) $$d\lambda_3^3 = -\sum_{s} \frac{\lambda_3^s}{\lambda_3^3} d\alpha_3^s.$$

В (27) заместваме (33) и като използваме (4), (7), (34) и (35), намираме

$$dK_5^2 = \left| \det\left(\lambda_s^t - \frac{\lambda_3^t}{\lambda_3^3}\lambda_s^3\right) \sum_{\alpha} \left[(\lambda_3^{\alpha})^2 \prod_{\beta \neq \alpha} \nu_\beta \right] \bigwedge_s d\lambda_3^s \wedge \bigwedge_{\alpha} \psi^{\alpha}.$$

Но

$$\det\left(\lambda_s^t - \frac{\lambda_3^t}{\lambda_3^3}\lambda_s^3\right) = \frac{1}{\lambda_3^3}$$

и следователно

(36) $$dK_5^2 = \left| \frac{1}{\lambda_3^3} \sum_{\alpha} \left[(\lambda_3^{\alpha})^2 \prod_{\beta \neq \alpha} \nu_\beta \right] \bigwedge_s d\lambda_3^s \wedge \bigwedge_{\alpha} \psi^{\alpha}.\right.$$

По начина от § 2. определяме директорните косинуси на вектора g_3 — нормален на τ_2. Имаме

(37) $$\begin{aligned} \lambda_3^1 &= \cos\theta_1, \\ \lambda_3^2 &= \sin\theta_1 \cos\theta_2, \\ \lambda_3^3 &= \sin\theta_1 \sin\theta_2, \end{aligned}$$

където

$$0 \leqq \theta_1 < \pi, \qquad 0 \leqq \theta_2 < \pi.$$

От (36) и (37) получаваме

(38) $$\begin{aligned} dK_5^2 = \Big| & (\sin\theta_1 \cos^2\theta_1 . \nu_2 \nu_3 + \sin^3\theta_1 \cos^2\theta_2 . \nu_3 \nu_1 \\ & + \sin^3\theta_1 \sin^2\theta_2 . \nu_1 \nu_2 \Big| \bigwedge_s d\theta_s \wedge dS_3. \end{aligned}$$

Интегрираме двете страни на (38). Получаваме формулата от Крофтонов тип:

$$\int\limits_{(L_2)} N(\tau_2)\, m(K_5^2) = \frac{2\pi}{3} \int\limits_{(S_3)} \nu_2 \nu_3 + \nu_3 \nu_1 + \nu_1 \nu_2 \, dS_3 .$$

Вдясно интегрирането се извършва върху цялата хиперповърхнина S_3. Вляво интегрирането е върху L_2 — множеството на всички двумерни равнини в E_4. $N(\tau_2)$ е броят на допирните точки на τ_2 с S_3.

Изразявам искрена благодарност на Грозьо Станилов за предложената ми тема и за ценните съвети при разработването ѝ.

ЛИТЕРАТУРА

1. Роговой, М. Р.: К метрической теории неголономной гиперповерхности в n-мерном пространстве. Укр. геом. сб., в 5—6, 126—138.
2. Сантало, Л. А.: Введение в интегралную геометрию. Москва, 1956.
3. Stanilow, G.: Zur Integralgeometrie im euklidischen Raum E_3. Math. Nachr., 43 (1970), 181—183.

Постъпила на 15. XI. 1972 г.

CROFTONSCHE FORMELN FÜR HYPERKOMPLEXE VON TANGENTEN UND ZWEIDIMENSIONALEN BERÜHRUNGSEBENEN EINER HYPERFLÄCHE IN E_4

A. Borisov

(ZUSAMMENFASSUNG)

S_3 sei eine Hyperfläche im vierdimensionalen euklidischen Raum E_4 ν_1, ν_2, ν_3 — die Hauptkrümmungen von S_3. K_5^1, K_5^2 seien die Hyperkomplexe von Geraden und zweidimensionalen Ebenen in den Tangentialräumen der Hyperfläche S_3 und dK_5^1, Kd_5^2 — die entsprechenden invarianten Dichten. Wir haben die folgenden Croftonschen Integralformeln

$$\int\limits_{(L_1)} N(\tau_1) dK_5^1 = \frac{2\pi}{3} \int\limits_{(S_3)} \nu_1 + \nu_2 + \nu_3 \, dS_3 ;$$

$$\int\limits_{(L_2)} N(\tau_2) dK_5^2 = \frac{2\pi}{3} \int\limits_{(S_3)} \nu_1 \nu_2 + \nu_2 \nu_3 + \nu_3 \nu_1 \, dS_3$$

gefunden.