КРАЙНИ ГРУПИ, В КОИТО ДВЕ СИЛОВИ ПОДГРУПИ СА МАКСИМАЛНИ

Керопе Чакърян

От естествен интерес за теорията на крайните групи е изучаването на групи, в които някои от максималните подгрупи притежават фиксирано свойство, в частност крайните групи, в които някои от силовите подгрупи са максимални. За крайни групи, в които една силова подгрупа е максимална (и от нечетен ред), лесно следва разрешимост и дори бипримарност, но пълното описание на такива групи изглежда трудно. В настоящата работа се разглежда единственият следващ възможен случай на крайни групи, в които две силови подгрупи (съответствуващи на два различни прости делителя на реда на групата) са максимални. Класът на получените групи се включва в по-широкия клас неабелеви групи, в които всяка подгрупа е абелева, описан от Милер и Морено [3], и много от резултатите ни са аналогични на тези в [3].

Нека G е крайна група, в която силова p-подгрупа P и силова q-подгрупа Q са максимални подгрупи; тогава очевидно всички силови p-подгрупи и q-подгрупи на G са също максимални. Нека редът на G е $p^n q^m s$. Тъй като поне едно от числата p и q, например p, е нечетно, G притежава максимална подгрупа P, която е нилпотентна и от нечетен ред. Тогава по една теорема на Томпсън [4] G е разрешима. Ако допуснем, че $s>1$, от обобщените силови теореми за разрешими групи на Ф. Хол (теорема 9.3.1 от [2]) ще следва съществуването на собствена подгрупа на G от ред, примерно $p^n s$, която строго би съдържала P. Следователно $s=1$ и G е бипримарна група т. е. от ред $p^n q^m$.

Преди всичко G не може да притежава инвариантни несилови p-подгрупи и q-подгрупи, различни от единичната подгрупа 1. Наистина, ако например Q_0 беше инвариантна несилова q-подгрупа на G, то PQ_0 би била собствена подгрупа на G, което противоречи на максималността на P. Сега ще покажем обаче, че поне една от силовите подгрупи е инвариантна в G. Да допуснем противното. Като разрешима група G притежава нетривиален абелев нормален делител A — например последната нетривиална група от производния ред (реда от комутантите) на G. Нека Q_A е силова q-подгрупа на A; поради направеното допускане и максималността на силовите q-подгрупи в G е ясно, че Q_A е нетривиална несилова q-подгрупа на G. Но Q_A, бидейки

характеристична подгрупа на A, би била инвариантна в G, което е невъзможно.

Така нека P е инвариантна в G. Поради максималността ѝ факторгрупата G/P не може да съдържа никакви собствени подгрупи, следователно е циклична група от ред q, а G е от ред $p^n q$.

Ако и Q е инвариантна в G, по същия начин ще следва $n=1$ и G просто е цикличната група от ред pq.

Нека сега $n>1$; тогава получаваме, че

(I) силовата q-подгрупа Q е неинвариантна в G.

Оттук поради максималността ѝ ще следва, че Q съвпада с нормализатора си в G, $N_G(Q)=Q$. Освен това, понеже G/P е абелева, P ще съдържа комутанта G' на G. Тъй като P не може да съдържа собствени подгрупи, инвариантни в G, получаваме $G'=P$ $(G'\neq 1)$; също така комутантът P' и подгрупата на Фратини $\Phi(P)$ на P трябва да съвпадат с 1 и, както е известно, P е елементарна абелева p-група.

Броят на силовите q-подгрупи в G е равен на индекса $[G:N_G(Q)]=[G:Q]=p^n$, а, от друга страна, този брой е сравним с 1 по модул q, т. е. $p^n\equiv 1(\mathrm{mod}\, q)$. Ще докажем, че n е най-малкото естествено число с това свойство, или

(II) n е показателят на p по модул q.

Първо ще установим, че $n<q$. Да допуснем противното и нека $x_1\neq 1$ е елемент от P, а $y\neq 1$ — от Q. Тъй като P е максимална и абелева, нормализаторът на коя да е собствена подгрупа на P съвпада с P. Лесно се вижда тогава, че елементите $x_1, x_2=y^{-1}x_1 y,\ldots,x_q=y^{-(q-1)}x_1 y^{q-1}$ пораждат различни циклични подгрупи на P. Понеже броят им е $q\leqq n$ и P е елементарна абелева, тези елементи се включват в базис на P, т. е. са независими. Но за елемента $x=x_1 x_2\ldots x_q$ имаме $y^{-1}xy=x$ и $x=1$, което е невъзможно. Да предположим сега, че естественото число $r<n$ е показателят на p по модул q. Тогава r трябва да дели n, $n=rk$, $k>1$. От обстоятелството, че вън от P в G не съществуват елементи, нормализиращи коя да е собствена подгрупа на P, следва, че Q действува върху множеството от всички подгрупи на P от ред p^r, като го разлага на непресичащи се класове, всеки от които съдържа по q подгрупи. Следователно q дели броя на подгрупите от ред p^r в P. Но за елементарна абелева група от ред p^n този брой е [1]

$$N_r=\frac{(p^n-1)(p^{n-1}-1)\ldots(p^{n-r+1}-1)}{(p^r-1)(p^{r-1}-1)\ldots(p-1)}.$$

От допускането за r нито един от множителите в знаменателя, с изключение на първия, не се дели на q, откъдето лесно се вижда, че същото е валидно за съответните множители в числителя. А за въпросните първи множители имаме

$$\frac{p^n-1}{p^r-1}=\frac{p^{kr}-1}{p^r-1}=p^{(k-1)r}+\ldots+1\equiv k\not\equiv 0 \pmod q,$$

понеже $k<n<q$, така че $N_r\not\equiv 0 \pmod q$, което е противоречие.

Изведените условия (I) и (II), които очевидно са независими, са и достатъчни в следния смисъл: нека G е група от ред p^nq и са изпълнени (I) и (II). Тогава силовите подгрупи P и Q са максимални подгрупи в G.

Твърдението за P е очевидно. Броят на силовите q-подгрупи в G от (I) е $[G:N_G(Q)]\not\equiv 1$, дели p^n и е $\equiv 1 \pmod q$, така че от (II) е точно $p^n=[G:Q]$, откъдето $N_G(Q)=Q$. Ако съществуваше подгрупа H, за която $Q\subset H\subset G$, и p^iq, $0<i<n$, е редът ѝ, за броя на силовите q-подгрупи в H бихме получили противоречието $[H:N_H(Q)]=[H:Q]=p^i\equiv 1 \pmod q$.

Така получихме: в една крайна група G силовите подгрупи P и Q са максимални тогава и само тогава, когато редът на G е от вида p^nq и са изпълнени условията (I) и (II).

Структурата на една група от разглеждания клас се описва напълно. G е или цикличната група от ред pq, или редът ѝ е от вида p^nq, където n е точно показателят на p по модул q. По теоремата на Ферма $p^{q-1}\equiv 1 \pmod q$ и като следствие получаваме, че n дели $q-1$. Силовата p-подгрупа P е инвариантна (единствена) и елементарна абелева група от ред p^n. Силовите q-подгрупи са самонормализиращи се циклични групи от ред q и броят им е p^n. Поради максималността на силовите q-подгрупи е ясно, че кои да е два нетривиални елемента от различни силови q-подгрупи, както и произволен нетривиален елемент от P и произволен нетривиален елемент от коя да е силова q-подгрупа пораждат G. В G не съществуват подгрупи от смесени редове p^iq, $0<i<n$, така че P и подгрупите ѝ и силовите q-подгрупи изчерпват всички подгрупи на G. Тогава всеки елемент в групата е p-елемент или q-елемент и G е група от експонента pq. Комутантът G' съвпада с P и всеки $\neq 1$ комутатор е от ред p. Подгрупата на Фратини и центърът на G са тривиални. Производният ред на G има дължина 2.

Накрая ще покажем, че винаги съществуват, при това единствени, групи с разглежданото свойство за максималност на две силови подгрупи. По-точно ще покажем, че ако p, q и n са естествени числа (p и q различни прости), свързани с (II), съществува единствена група от ред p^nq, за която е изпълнено и (I).

Ако G е група от разглеждания клас, тя очевидно е неабелева група, всички подгрупи на която са абелеви. Понеже центърът ѝ е тривиален, G е изоморфна с групата от вътрешните си автоморфизми. Ако разгледаме тогава G като група от субституции на множеството от p^n елемента, условието (I) е равносилно [3] с примитивност на G. Но в [3] е доказано, че ако p, q и n удовлетворяват (II) и $n>1$ (а

при $n=1$ нашето твърдение е очевидно), винаги съществува примитивна група от субституции от ред $p^n q$ и степен p^n. Твърдението за единственост е очевидно.

ЛИТЕРАТУРА

1. Burnside, W.: Theory of groups of finite order. 2nd ed., Cambridge, 1911.
2. Hall, M.: The theory of groups. New York, 1959.
3. Miller, G. and H. Moreno: Non-abelian groups in which every subgroup is abelian. Trans. of the Amer. Math. Soc., 4 (1903), 398—404.
4. Thompson, J.: Finite groups with fixed point free automorphisms of prime order. Proc. of Nat. Acad. of Sc., 45 (1959), 578—581.

Постъпила на 2. XII. 1972 г.

FINITE GROUPS IN WHICH TWO SYLOW SUBGROUPS ARE MAXIMAL

K. Tchakerian

(SUMMARY)

In this paper we consider finite groups, in which two Sylow subgroups (for two distinct prime divisors p and q of the group order) are maximal subgroups. We find the necessary and sufficient condition for a finite group G to have this property. Namely, G must be either the cyclic group of order pq or a group of order $p^n q$ with the following conditions:

(I) The q-Sylow subgroup Q is not invariant in G,

(II) n is the smallest positive integer with $p^n \equiv 1 \pmod q$.

The structure of every finite group with this property is fully described. One can verify, using [3], that for all given p, q and n with (II) there exists one and only one group of order $p^n q$, which satisfies (I).