ОЦЕНКА НА БРОЯ НА ПОДФУНКЦИИТЕ ЗА ПОЧТИ ВСИЧКИ ДВОИЧНИ ФУНКЦИИ

Йордан Денев

Нека $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ е двоична функция на n променливи. Когато заместваме k променливи на f с константи, получаваме двоични функции от $n-k$ променливи. Получените функции се наричат подфункции на функцията f. В предлаганата работа се прави асимптотическа оценка на броя на подфункциите, които се получават при заменяне на произволно множество k променливи в почти всички двоични функции.

Първи резултати в това направление са получени от В. Н. Кузнецов [2], като при него са наложени ограничения върху големината на k. В настоящата работа са получени оценки за всяко k от целочисления интервал $[0, n]$.

Да обозначим с $v_{n,k}$ множеството от k различни променливи

$$v_{n,k}=\{x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_k}\},$$

като $i_j \leqq n$ при $j=1, 2, \ldots, k$. С $\xi_{v_{n,k}}(f)$ ще обозначим броя на всички различни подфункции, които се получават при заместването на променливите от $v_{n,k}$ във функцията $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ с константи.

Да положим

$$S_k(f(x_1, x_2, \ldots, x_n))=\max_{v_{n,k}} \xi_{v_{n,k}}(f(x_1, x_2, \ldots, x_n))$$

и

$$s_k(f(x_1, x_2, \ldots, x_n))=\min_{v_{n,k}} \xi_{v_{n,k}}(f(x_1, x_2, \ldots, x_n),$$

където минимум и максимум се взема върху всички (на брой $\binom{n}{k}$) множества $v_{n,k}$.

Основните резултати на работата са получени в теорема 1. и теорема 2., където се прави асимптотическа оценка на функционалите $S_k(f)$ и $s_k(f)$ за почти всички двоични функции.

Да разгледаме функционала $\xi_{v_{n,k}}(f(x_1, x_2, \ldots, x_n))$ като случайна величина, определена на пространството от елементарни събития, състоящо се от всички двоични функции на n променливи. С $M(\xi_{v_{n,k}})$ ще обозначим математическото очакване на величината $\xi_{v_{n,k}}$, а с $D(\xi_{v_{n,k}})$ — дисперсията на $\xi_{v_{n,k}}$.

В [1] са доказани следните леми:

Лема 1.

$$M(\xi_{v_{n,k}}) = 2^{2^{n-k}}\left(1-\left(1-\frac{1}{2^{2^{n-k}}}\right)^{2^k}\right).$$

Лема 2.

$$D(\xi_{v_{n,k}}) \leqq 2^{2^{n-k}}\left(\left(1-\frac{1}{2^{2^{n-k}}}\right)^{2^k}-\left(1-\frac{1}{2^{2^{n-k}}}\right)^{2^{k+1}}\right).$$

Да положим $c_k = \frac{2^k}{2^{2^{n-k}}}$. Използвайки лемите 1. и 2., ще покажем:

Лема 3. Ако k е такова, че

$$\frac{2^k}{2^{2^{n-k+1}}} \leqq \frac{1}{\sqrt[3]{n}},$$

то

$$\frac{2^k}{c_k}\left(1-e^{-c_k}-\frac{1}{\sqrt[3]{n}}\right)\right) \leqq M(\xi_{v_{n,k}}) \leqq \frac{2^k}{c_k}\left(1-e^{-c_k}+\frac{1}{\sqrt[3]{n}}\right)$$

и

$$D(\xi_{v_{n,k}}) \leqq M(\xi_{v_{n,k}})\, e^{-c_k}\left(1+\frac{1}{\sqrt[3]{n}}\right).$$

Доказателство. От развитието на $\log\left(1-\frac{1}{2^{2^{n-k}}}\right)$ в степенен ред получаваме

$$2^k \log\left(1-\frac{1}{2^{2^{n-k}}}\right) = -\frac{2^k}{2^{2^{n-k}}}+\frac{2^k}{2\,.\,2^{2^{n-k+1}}}-\frac{2^k}{3\,.\,2^{3\,.\,2^{n-k}}}+\dots$$

Тъй като това е алтернативен ред, то

$$-\frac{2^k}{2^{2^{n-k}}}-\frac{2^{k-1}}{2^{2^{n-k+1}}} \leqq 2^k \log\left(1-\frac{1}{2^{2^{n-k}}}\right) \leqq -\frac{2^k}{2^{2^{n-k}}}+\frac{2^{k-1}}{2^{2^{n-k+1}}},$$

или

$$\exp\left(-\frac{2^k}{2^{2^{n-k}}}-\frac{2^{k-1}}{2^{2^{n-k+1}}}\right) \leqq \left(1-\frac{1}{2^{2^{n-k}}}\right)^{2^k} \leqq \exp\left(-\frac{2^k}{2^{2^{n-k}}}+\frac{2^{k-1}}{2^{2^{n-k+1}}}\right).$$

Тъй като $\frac{2^k}{2^{2^{n-k+1}}} \leqq \frac{1}{\sqrt[3]{n}}$, то

$$\exp\left(-c_k-\frac{1}{\sqrt[3]{n}}\right)\leqq\left(1-\frac{1}{2^{2^{n-k}}}\right)^{2^k}\leqq\exp\left(-c_k+\frac{1}{2\,.\sqrt[3]{n}}\right).$$

Освен това

$$\exp\left(-\frac{1}{\sqrt[3]{n}}\right)=1-\frac{1}{\sqrt[3]{n}}+\frac{1}{2\,!\sqrt[3]{n^2}}-\ldots\geqq1-\frac{1}{\sqrt[3]{n}},$$

$$\exp\left(\frac{1}{2\sqrt[3]{n}}\right)=1+\frac{1}{2\,.\sqrt[3]{n}}+\frac{1}{2\,!\,4\,.\sqrt[3]{n^2}}+\ldots\geqq1+\frac{1}{\sqrt[3]{n}}.$$

Получихме

$$e^{-c_k}\left(1-\frac{1}{\sqrt[3]{n}}\right)\leqq\left(1-\frac{1}{2^{2^{n-k}}}\right)^{2^k}\leqq e^{-c_k}\left(1+\frac{1}{\sqrt[3]{n}}\right).$$

От последните неравенства следва непосредствено първото твърдение на лемата.

От лема 2. следва

$$D(\xi_{v_{n,k}})\leqq2^{2^{n-k}}\left(1-\frac{1}{2^{2^{n-k}}}\right)^{2^k}\left(1-\left(1-\frac{1}{2^{2^{n-k}}}\right)^{2^k}\right)$$

и

$$D(\xi_{v_{n,k}})\leqq M(\xi_{v_{n,k}})\left(1-\frac{1}{2^{2^{n-k}}}\right)^{2^k}.$$

От получената оценка за $\left(1-\frac{1}{2^{2^{n-k}}}\right)^{2^k}$ следва

$$D(\xi_{v_{n,k}})\leqq M(\xi_{v_{n,k}})\,e^{-c_k}\left(1+\frac{1}{\sqrt[3]{n}}\right).$$

Лемата е доказана.

Лема 4. Ако

$$\frac{2^k}{2^{2^{n-k+1}}}>\frac{1}{\sqrt[3]{n}},$$

то

$$2^{2^{n-k}}\left(1-\exp\left(-2^{\frac{n}{4}}\right)\right)\leqq M(\xi_{v_{n,k}})\leqq2^{2^{n-k}}$$

и

$$D(\xi_{v_{n,k}}) \leqq M(\xi_{v_{n,k}}) \exp(-2^{\frac{n}{4}}).$$

Доказателство. Ще покажем, че ако k изпълнява условието на лемата, то $k > n -]\log\left(n - \frac{1}{3}\log n\right)[+ 1$*. Да предположим обратното, че $k \leqq n -]\log\left(n - \frac{1}{3} n \log\right)[+ 1$. Тогава

$$\frac{2^k}{2^{2^{n-k+1}}} \leqq \frac{1}{\sqrt[3]{n}},$$

което противоречи на условието на лемата.

Лесно се вижда, че ако $k > k_1$, то

$$\left(1 - \frac{1}{2^{2^{n-k}}}\right)^{2^k} \leqq \left(1 - \frac{1}{2^{2^{n-k_1}}}\right)^{2^{k_1}}.$$

Като положим $k_1 = n -]\log\left(n - \frac{1}{3}\log n\right)[+ 1$, получаваме, че за всички k, за които е изпълнено условието на лемата, е вярно и

$$\left(1 - \frac{1}{2^{2^{n-k}}}\right)^{2^k} \leqq \left(1 - \frac{1}{2^{2^{n-k_1}}}\right)^{2^{k_1}}.$$

Да оценим $\left(1 - \frac{1}{2^{2^{n-k_1}}}\right)^{2^{k_1}}$. По същия начин, както в лема 3., можем да покажем, че

$$\left(1 - \frac{1}{2^{2^{n-k_1}}}\right)^{2^{k_1}} \leqq e^{-\frac{2^{k_1}}{2^{2^{n-k_1}}} + \frac{2^{k_1}}{2^{2^{n-k_1+1}}}}.$$

При дадения избор на k_1 получаваме за всички достатъчно големи n:

$$\frac{2^{k_1}}{2^{2^{n-k_1}}} \geqq 2^{\frac{n}{3}}.$$

Освен това показахме, че $2^k / 2^{2^{n-k+1}} \leqq \frac{1}{\sqrt[3]{n}}$. Следователно при всички достатъчно големи n е вярно и

* С $]x[$ обозначаме най-малкото цяло число, по-голямо или равно на x. В работата всички логаритми са двоични.

$$\left(1-\frac{1}{2^{2^{n-k}}}\right)\leqq \exp(-2^{\frac{n}{4}}).$$

С това е доказано първото твърдение на лемата.

От лема 2. следва

$$D(\xi_{v_{n,k}})\leqq 2^{2^{n-k}}\left(1-\frac{1}{2^{2^{n-k}}}\right)^{2^k}\left(1-\left(1-\frac{1}{2^{2^{n-k}}}\right)^{2^k}\right)$$

и

$$D(\xi_{v_{n,k}})\leqq M(\xi_{v_{n,k}})\left(-1\frac{1}{2^{2^{n-k}}}\right)^{2^k}.$$

Вземайки пред вид оценката на $\left(1-\frac{1}{2^{2^{n-k}}}\right)^{2^k}$, получаваме

$$D(\xi_{v_{n,k}})\leqq M(\xi_{v_{n,k}})\exp(-2^{\frac{n}{4}}).$$

Лемата е доказана.

Да дадем точно определение на понятието „почти всички двоични функции". Нека R е множество двоични функции. С $P^R(n)$ да обозначим броя на функциите от множеството R, които зависят от n променливи. Ще казваме, че R съдържа почти всички двоични функции, ако

$$\lim_{n\to\infty}\frac{P^R(n)}{2^{2^n}}=1.$$

Теорема 1. Ако

$$\frac{2^k}{2^{2^{n-k+1}}}\leqq\frac{1}{\sqrt[3]{n}},$$

то за почти всички двоични функции се изпълнява

$$\frac{2^k}{c_k}\left(1-e^{-c_k}-\frac{8}{\sqrt[3]{n}}\right)\leqq s_k(f(x_1,x_2,\ldots,x_n))$$

$$\leqq S_k(f(x_1,x_2,\ldots,x_n))\leqq\frac{2^k}{c_k}\left(1-e^{-c_k}+\frac{8}{\sqrt[3]{n}}\right).$$

Доказателство. Да фиксираме множеството различни променливи $v_{n,k}$ и освен това нека $k\geqq n-2\log n$. От неравенството на Чебишев следва, че броят на функциите на n променливи $f(x_1,x_2,\ldots,x_n)$, за които се изпълнява

$$|M(\xi_{v_{n,k}})-\xi_{v_{n,k}}(f(x_1, x_2, \ldots x_n))|>t,$$

не превъзхожда $\frac{D(\xi_{v_{n,k}})}{t^2} 2^{2^n}$. Да положим $t=\frac{M(\xi_{v_{n,k}})}{\sqrt[3]{n}}$. Тогава

$$\frac{D(\xi_{v_{n,k}})}{t^2} \leqq \frac{\sqrt[3]{n^2}\, e^{-c_k}\left(1+\frac{1}{\sqrt[3]{n}}\right)}{M(\xi_{v_{n,k}})}.$$

Да предположим $c_k \geqq n$. Тогава поради $M \geqq 1$ се изпълнява

$$\frac{D(\xi_{v_{n,k}})}{t^2} \leqq n\, e^{-n}.$$

Нека $c_k \leqq n$. Като вземем пред вид $k \geqq n-2\log n$, получвваме

$$D(\xi_{v_{n,k}}) \leqq n(M(\xi_{v_{n,k}}))^{-1} \leqq n\left(\frac{2^k}{c_k}(1-e^{-c_k})\right)^{-1} \leqq 2^{-\frac{n}{2}}.$$

И в двата случая $\frac{D(\xi_{v_{n,k}})}{t^2} \leqq 2^{-\frac{n}{2}}$.

Множеството $v_{n,k}$ можем да изберем по $\binom{n}{k}$ начина. Като вземем пред вид очевидното неравенство

$$\binom{n}{k} \leqq n^{2\log n},$$

получаваме, че броят на функциите на n променливи $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ за които се изпълнява поне едно от неравенствата

$$s_k(f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \leqq \frac{2^k}{c_k}\left(1-e^{-c_k}-\frac{3}{\sqrt[3]{n}}\right),$$

$$S_k(f(x_1, x_2, \ldots, x_n)) \geqq \frac{2^k}{c_k}\left(1-e^{-c_k}+\frac{3}{\sqrt[3]{n}}\right),$$

не е по-голям от $2^{-\frac{n}{2}} n^{2\log n} 2^{2^n} = o(2^{2^k})$. С това е доказана теоремата за $k \geqq n-2\log n$.

Нека $k_1 = n-]2\log n[+1$. Ние ще покажем, че ако

$$s_{k_1}(f(x_1, x_2, \ldots, x_n)) \geqq \frac{2^{k_1}}{c_{k_2}}\left(1-e^{-c_{k_1}}+\frac{3}{\sqrt[3]{n}}\right),$$

то

$$s_k(f(x_1, x_2, \ldots, x_n)) \geqq \frac{2^k}{c_k}\left(1-e^{-c_k}-\frac{8}{\sqrt[3]{n}}\right)$$

и

$$S_k(f(x_1, x_2, \ldots, x_n)) \leqq \frac{2^k}{c_k}\left(1-e^{-c_k}+\frac{8}{\sqrt[3]{n}}\right)$$

$(k<k_1)$.

Да оценим $\frac{2^k}{c_k}(1-e^{-c_k})$ при $k \leqq n-]2\log n[+1$. Очевидно, че

$$\frac{2^k}{2^{2^{n-k}}} \leqq \frac{1}{2^n}$$

при всички достатъчно големи n. От друга страна, при $c_k<1$ се изпълнява

$$1-\frac{\left(1-c_k+\frac{c_k^2}{2}\right)}{c_k} \leqq \frac{1-e^{-c_k}}{c_k} \leqq 1-\frac{\left(1-c_k+\frac{c_k^2}{2}\right)}{c_k}$$

или

$$1-\frac{1}{2^n} \leqq 1-\frac{c_k}{2} \leqq \frac{1-e^{-c_k}}{c_k} \leqq 1+\frac{c_k}{2} \leqq 1+\frac{1}{2^n}.$$

Получихме

$$2^k\left(1-\frac{1}{2^n}\right) \leqq \frac{2^k}{c_k}(1-e^{-c_k}) \leqq 2^k\left(1+\frac{1}{2^n}\right)$$

или

$$\frac{2^k}{c_k}\left(1-e^{-c_k}-\frac{c_k}{2^n}\right) \leqq 2^k \leqq \frac{2^k}{c_k}\left(1-e^{-c_k}+\frac{c_k}{2^n}\right).$$

От очевидното неравенство

$$S_k(f(x_1, x_2, \ldots, x_n)) \leqq 2^k \leqq \frac{2^k}{c_k}\left(1-e^{-c_k}+\frac{c_k}{2^n}\right) \leqq \frac{2^k}{c_k}\left(1-e^{-c_k}+\frac{1}{2^n}\right)$$

следва първото от търсените неравенства. Нека сега да допуснем, че съществува такова $k_0<k_1$, за което се изпълнява

$$s_{k_0}(f(x_1, x_2, \ldots, x_n)) \leqq \frac{2^{k_0}}{c_{k_0}}\left(1-e^{-c_{k_0}}-\frac{8}{\sqrt[3]{n}}\right).$$

Тогава

$$s_{k_0}(f(x_1, x_2, \ldots, x_n)) \leqq 2^{k_0}\left(1+\frac{1}{2^n}-\frac{8}{c_{k_0}\sqrt[3]{n}}\right)$$

и не е трудно да се види, че

$$S_{k_1}(f(x_1, x_2, \ldots, x_n)) \leqq 2^{k_1}\left(1+\frac{1}{2^n}-\frac{4}{c_{k_0}\sqrt[3]{n}}\right)$$

или за всички достатъчно големи n е вярно

$$s_k(f(x_1, x_2, \ldots, x_n)) \leqq \frac{2^{k_2}}{c_{k_1}}\left(1-e^{-c_{k_1}}+\frac{c_{k_1}}{2^n}\right)\left(1+\frac{1}{2^n}-\frac{8}{c_{k_0}\sqrt[3]{n}}\right)$$

$$\leqq \frac{2^{k_1}}{c_{k_1}}\left(1-e^{-c_{k_1}}-\frac{4}{\sqrt[3]{n}}\right),$$

което е невъзможно.

За така избраното k_1 се изпълняват неравенствата

$$\frac{2^{k_1}}{2^{2^{n-k_1+1}}} \leqq \frac{1}{\sqrt[3]{n}} \quad \text{и} \quad k_1 \geqq n-2\log n.$$

Следователно за почти всички функции

$$s_{k_1}(f(x_1, x_2, \ldots, x_n)) \geqq \frac{2^{k_1}}{c_{k_1}}\left(1-e^{-c_{k_1}}-\frac{3}{\sqrt[3]{n}}\right),$$

с което теоремата е доказана.

Теорема **2.** Ако

$$\frac{2^k}{2^{2^{n-k+1}}} > \frac{1}{\sqrt[3]{n}},$$

то за почти всички функции се изпълнява

$$2^{2^{n-k}}\left(1-\frac{2}{\sqrt[3]{n}}\right) \leqq s_k(f(x_1, x_2, \ldots, x_n))$$

$$\leqq S_k(f(x_1, x_2, \ldots, x_n)) \leqq 2^{2^n}.$$

Доказателство. Да фиксираме множеството $v_{n,k}$. И тук ще приложим, както в теорема 1., неравенството на Чебишев. Броят на функциите на n променливи $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, за които се изпълнява

$$|M(\xi_{v_{n,k}})-\xi_{v_{n,k}}(f(x_1, x_2, \ldots, x_n))| > t,$$

не превъзхожда $\frac{D(\xi_{v_{n,k}})}{t^2}\, 2^{2^n}$. Да положим $t=\frac{M(\xi_{v_{n,k}})}{\sqrt[3]{n}}$. Тогава

$$\frac{D(\xi_{v_{n,k}})}{t^2} \leqq n \exp\left(-2^{\frac{n}{4}}\right).$$

Множеството $v_{n,k}$ можем да изберем по $\binom{n}{k}$ начина. Тъй като $k \geqq n-]\log\left(n-\frac{1}{3}\log n\right)[+1$, то

$$\binom{n}{k} \leqq n^{2\log n}.$$

Тогава броят на функциите на n променливи $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, за които се изпълнява

$$s_k(f(x_1, x_2, \ldots, x_n)) \leqq 2^{2^{n-k}}\left(1-\frac{2}{\sqrt[3]{n}}\right)$$

или

$$S_k(f(x_1, x_2, \ldots, x_n)) \geqq 2^{2^{n-k}},$$

не е по-голям от

$$\frac{n^{2\log n+1}}{\exp\left(2^{\frac{n}{4}}\right)}\, 2^{2^n} = o(2^{2^n}).$$

Теоремата е доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. Денев, Й.: Сложность реализации почти всех функций алгебры логики методом каскадов. Мат. заметки, т. 12, № 6 (1972).
2. Кузнецов, В.: Об асимптотическом поведении функции Шеннона для метода каскадов синтеза контактных схем. Кибернетика, 1 (1972).

Постъпила на 2. XII. 1972 г.

EVALUATION DU NOMBRE DES SUBFONCTIONS DES PRESQUE TOUTES FONCTIONS DE BOOLE

J. Dénev

(RÉSUMÉ)

Admettons que $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ soit une fonction de Boole. Remplaçons k variables avec des constantes. On a montré que pour les presque toutes fonctions de Boole on obtient

$$\frac{2^k}{c_k}(1-e^{-c_k}+o(1))$$

$\left(c_k=\frac{2^k}{2^{2^{n-k}}}\right)$ subfonctions.