# КОДЫ, ОДНОВРЕМЕННО СОВЕРШЕННЫЕ ОТНОСИТЕЛЬНО МЕТРИК ХЭММИНГА И ЛИ

С. М. Додунеков

**1. Введение.** Рассмотрим $n$-мерное пространство слов над алфавитом из $q$ букв. Известно ([1], стр. 306), что производящая функция весов задается формулами

$$A_H^{(n)}(z)=\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}(q-1)^i z^i \tag{1}$$

в метрике Хэмминга и

$$A_{Lk}^{(n)}(z)=(1+2z+\ldots+2z^k)^n, \quad q=2k+1, \tag{$2_1$}$$

$$B_{Lk}^{(n)}(z)=(1+2z+\ldots+2z^{k-1}+z^k)^n, \quad q=2k, \tag{$2_2$}$$

в метрике Ли.

Для $q=2$ и $q=3$ обе метрики совпадают. В работе обсуждается вопрос: существуют ли для $q>3$ коды, совершенные как относительно метрики Хэмминга, так и относительно метрики Ли. Такие коды в работе называются $P$-кодами. Будем использовать следующие обозначения:

$w_H$ — метрика Хэмминга,

$w_L$ — метрика Ли,

$V_{Ht}^{(n)}$ и $V_{Lt}^{(n)}$ — объем шара радиуса $t$ в метриках $w_H$ и $w_L$ соответственно.

**2. Основные результаты.** Используя соотношения

$$A_{Lk}^{(n)}(z)=\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}A_{L,\,k-1}^{(n-i)}\,2^i z^{ki}$$

и

$$B_{Lk}^{(n)}(z)=\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}A_{L,\,k-1}^{(n-1)}\,z^{ki},$$

получим, что

$$(3_1)\qquad A_{Lk}^{(n)}(z)=\sum_{i_1=0}^{n}\sum_{i_2=0}^{n-i_1}\cdots\sum_{i_k=0}^{n-i_1-\ldots-i_{k-1}}\binom{n}{i_1}\binom{n-i_1}{i_2}$$

$$\cdots\binom{n-i_1-\ldots-i_{\alpha-1}}{i_k}2^{i_1+\ldots+i_k}z^{ki_1+(k-1)i_2+\ldots+i_k}$$

и

$$(3_2)\qquad B_{Lk}^{(n)}(z)=\sum_{i_1=0}^{n}\sum_{i_2=0}^{n-i_1}\cdots\sum_{i_k=0}^{n-i_1-\ldots-i_{k-1}}\binom{n}{i_1}\binom{n-i_1}{i_2}$$

$$\cdots\binom{n-i_1-\ldots-i_{k-1}}{i_k}2^{i_2+\ldots+i_k}z^{ki_1+(k-1)i_2+\ldots+i_k}.$$

В дальнейшем будем считать, что $k>1$. Из равенства $(3_1)$ получаем

$$(4)\qquad A_{Lk}^{(n)}\equiv 1+2\binom{n}{1}z+\left[2\binom{n}{1}+4\binom{n}{2}\right]z^2 \pmod{z^3}.$$

Согласно (1) и (4)

$$V_{H1}^{(n)}=1+(q-1)n,\quad V_{L1}^{(n)}=1+2n,$$

$$V_{H2}^{(n)}=1+(q-1)n+(q-1)^2\binom{n}{2},\quad V_{L2}^{(n)}=1+2n+2n^2.$$

Допустим, что $V_{H2}^{(n)}=V_{L2}^{(n)}$. Тогда

$$(5)\qquad n=\frac{(q-1)^2-2(q-1)+4}{(q-1)^2-4}.$$

Но

$$(q-1)^2-2(q-1)+4\leqq(q-1)^2-4$$

для $q\geqq 5$. Кроме того, если $V_{H1}^{(n)}=V_{L1}^{(n)}$, то $q=3$.

Пусть $q=2k$. Если $k>2$, то

$$(6)\qquad B_{Lk}^{(n)}(z)\equiv A_{Lk}^{(n)} \pmod{z^3}$$

и

$$B_{L2}^{(n)}(z)\equiv 1+2\binom{n}{1}z+\left[\binom{n}{1}+4\binom{n}{2}\right]z^2 \pmod{z^3}.$$

Из (6) и $V_{H2}^{(n)}=V_{L2}^{(n)}$ следует (5), а для $q=4$ $V_{H2}^{(n)}\neq V_{L2}^{(n)}$ для всех $n>1$. Мы доказали следующую теорему:

Теорема 1. Для $q>3$ и $t=1$, 2 не существуют $P$-коды, исправляющие $t$ ошибок относительно $w_H$ и $w_L$.

Так как для веса Ли $d_L$ и веса Хэмминга $d_H$ выполняется неравенство

$$d_H \leqq d_L \leqq \left[\frac{q}{2}\right] d_H ,$$

где $[x]$ — целая часть от $x$, вопрос о существовании $P$-кодов, исправляющих $t$ ошибок относительно $w_L$ и $t'$ ошибок относительно $w_H$ имеет смысл, только если

$$t' \leqq t \leqq \left[\frac{q}{2}\right] t' + \frac{\left[\frac{q}{2}\right]-1}{2} .$$

Допустим, что $V_{L2}^{(n)}=V_{H1}^{(n)}$. Тогда для $q=2k+1$ и $q=2k$, $k>2$, выполняется

$$n=\frac{q-3}{2}, \tag{7}$$

а для $q=4$ получаем, что $n=1$. Если код, исправляющий одну ошибку относительно $w_H$, является систематическим и совершенным, то ([1], стр. 311)

$$n=\frac{q^v-1}{q-1}. \tag{8}$$

Из равенств (7) и (8) вытекает

Теорема 2. Для $q>3$ не существуют систематические $P$-коды, исправляющие одну ошибку относительно $w_H$ и двойные ошибки относительно $w_L$.

Согласно [2], $P$-коды нужно искать (для $q>3$) над алфавитами не являющимися конечными полями.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Берлекэмп, Э. Р.: Алгебраическая теория кодирования. Москва, „Мир", 1971.
2. Tietäväinen, A., Perko, A.: There are no unknown perfect binary codes. Ann. Univ. Turku. Ser. AI, No. 148 (1971), 6pp.

Постъпила на 15. XII. 1973 г.

# CODES, WHICH ARE PERFECT IN HAMMING AND LEE METRICS SIMULTANEOUSLY

S. M. Dodunekov

(SUMMARY)

The $P$-codes are defined as the codes, which are perfect in Lee and Hamming metrics simultaneously. These two metrics are equivalent for $q=2$, 3.

In this paper we show, that:

1. There are not $P$-codes for $q>3$ and $t=1$, 2, which can correct $t$ errors.

2. There are not $P$-codes for $q>3$, which can correct single error in Hamming metric and double error in Lee metric.