СОХРАНЯЮЩИЕ ОРБИТЫ ГОМЕОМОРФИЗМЫ АБСТРАКТНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Тома В. Тонев

1. Пусть X — связное хаусдорфово топологическое пространство, на котором непрерывно действует связная компактная коммутативная полугруппа S. Иными словами, пусть задано представление $s \to T(X, s)$ полугруппы S в полугруппу $C(X, X)$ (с суперпозицией), причем отображение $(s, x) \to T(X, s)x$ непрерывно по совокупности аргументов. Через $[x]$ будем обозначать орбиту точки x из X. Это то подмножество X, которое состоит из всех элементов вида $T(X, s)x$, $s \in S$. Пусть X — такое S-пространство, а Y — H-пространство, где S и H — связные компактные абелевы полугруппы. Мы будем рассматривать только такие гомеоморфизмы $F: X \to Y$, которые сохраняют орбиты X, т. е. для которых $F([x]) = [Fx]$ для каждого $x \in X$. Действие полугруппы S с единицей e называется эффективным, если для каждого $x \in X$ из $T(X, s)x = x$ следует, что $s = e$.

В задаче о классификации подобий сохраняющих орбит гомеоморфизмов F, существенную роль имеет внутреннее строение этих гомеоморфизмов. В 1969 г. Е. А. Горин и В. Я. Лин доказали, что когда действие группы G на X и Y эффективно, $F: X \to Y$ представляется как суперпозицией действия некоторого автоморфизма $\gamma: G \to G$ и сохраняющего орбиты другого гомеоморфизма, порождаемого действием стягиваемого отображения G в G. В 1970 г. А. Я. Гордон обобщил этот результат на случай когда точки, на которых G действует эффективно, образуют связные и всюду плотные подмножества в X и Y. В настоящей работе мы покажем, что упомянутый результат остается в силе при сильно ослабленном условии на действия G на Y, при котором не обязательно даже существование эффективных точек в Y, и без ограничения на действия G в X, причем туда может действовать вовсе не группа, а только связная компактная полугруппа.

2. Если группа G действует на себя сдвигами, орбита каждого элемента совпадет с G, а будут сохранять орбиты, очевидно, все гомеоморфизмы.

Пусть S действует на X гомеоморфизмами, т. е. $S' = T(X, S) \subset \mathrm{Homeom}(X)$. Тогда S' будет группой. Действительно, пусть $st = ht$, значит тогда $T(X, s)T(X, t) = T(X, h)T(X, t)$. Отсюда $T(X, s) = T(X, t)$ и, следовательно, в компактной полугруппе S' выполняется закон правого (а тоже и левого) сокращения и значит она есть группа [5]. Наоборот, пусть S' является

группой. Тогда из $g.g^{-1}=e$ получим, что $T(X, g).T(X, g^{-1})x=x$ и все отображения $T(X, g)$ окажутся гомеоморфизмами X.

Пусть X является G-пространством для некоторой группы G. Если действие G неэффективно, не для всех точек x тривиальны их стационарные подгруппы $H_x=\{g \in G, T(X, g)x=x\}$. Фактогруппы G/H_x будем обозначать через G_x, а соответствующие проекции $G \to G_x$ — через π_x. На каждой орбите $[x]$ кроме G действует, причем эффективно, еще и группа G_x, так как для каждого $g \in G$ выполняется равенство $H_x = H_{T(X,g)x} = H_{[x]}$. Это действие (непрерывно по $\pi_x g$ в силу открытости проекции π_x) определяется естественным образом: $T([x], \pi_x(g))x = T(X, g)x$. Отношение эквивалентности $x \sim y \Longleftrightarrow H_x = H_y$ (как множества) разбивает пространство X на классы, каждый из которых содержит все точки с одной и той же стационарной подгруппой. Связные компоненты $\{D_\alpha\}_\alpha$ этих классов мы будем называть **компонентами действия** G в X. Множество всех компонент действий G в X обозначим через $\mathbf{D}_x$. Так как для каждой орбиты t, содержащейся в компоненте действия D_α, группы H_t, а заодно и G_t — общие, то G_t действует на всем D_α, и мы будем писать обычно G_{D_α} или даже G_α (соответственно H_{D_α}, H_α) вместо G_x и H_x для x из t. Точку $x \in X$ назовем **G-невырожденной**, если $H_x=\{e\}$ или, что то же, если группа G действует эффективно на $[x]$. Ясно, что каждое x из X является G_x-невырожденным.

В множестве компонент действия $\mathbf{D}_X$ введем частичный порядок. Пусть D_1 и D_2 — два элемента $\mathbf{D}$, $N(D_1, D_2)$ — содержащее D_1 и D_2 связное объединение некоторых компонент действия $N(D_1, D_2)=\bigcup\limits_{\alpha \in A} D_\alpha$, стационарные группы которых удовлетворяют условию $H_1 \subseteq H_\alpha \subset H_2$. Для каждой подгруппы $H \subset G$, $H_1 \subset H \subset H_2$ через $N(H)$ будем обозначать подмножество $N(D_1, D_2)$, состоящее из всех компонент $D_\alpha \subset N(D_1, D_2)$, стационарные группы H_α которых содержатся в H: $N(H)=\bigcup\{D_\gamma | D_\gamma \subset N(D_1, D_2), H_\gamma \subset H\}$.

Определение 1. $N(D_1, D_2)$ будем называть **цепью**, связывающей D_1 с D_2, если:

1) для каждого $\alpha \in A$ множество $N(H_\alpha)$ связно;

2) для каждого линейно упорядоченного относительно включения семейства Γ стационарных подгрупп H_γ, $\gamma \in \Gamma$, все граничные точки множества $\bigcup\limits_{\gamma \in \Gamma} N(H_\gamma)$ в $N(D_1, D_2)$ принадлежат только одной компоненте действия D_Γ, причем для нее $H_\Gamma \supset \bigcup H_\gamma$, а $D_\Gamma \cup \bigcup\limits_\gamma N(H_\gamma)=N(H_\Gamma)$.

Определение 2. Будем говорить, что компонента действия D_1 **следует** за D_2 ($D_1 \succ D_2$), если существует связывающая D_1 с D_2 цепь.

Если x есть **неподвижная** точка X (т. е. если $T(X, g)x=x$ для всех g из G), то компонента действия D_x, содержащая x, совпадает с содержащей x связной компонентой множества неподвижных точек X и является минимальным в смысле Цорна элементом $\mathbf{D}$ относительно введенной нами упорядоченности. Если притом $\mathbf{D}$ обладает наименьшим элементом, то множество неподвижных точек X будет связным и совпадает с этим элементом. Аналогично, каждая связная компонента множества G-невырожденных точек определяет элемент $\mathbf{D}$, максимальный в смысле Цорна. Снова если $\mathbf{D}$ обладает наибольшим элементом, множе-

ство невырожденных точек окажется связным. В общем случае не обязательно наличие G-невырожденных элементов в X, даже если имеется наибольший элемент D_0 в $\mathbf{D}$. Действуя эффективно на D_0, група G_0 тогда будет действовать и на всем X. В этом случае естественно считать, что X есть G_0-пространство, а тогда D_0 совпадает с множеством всех невырожденных элементов X.

Определение 3. Будем говорить, что группа G действует направленно на X, если частично упорядоченное множество компонент действия G в X является направленным вверх (т. е. если для любых двух элементов D_1 и D_2 из $\mathbf{D}$ найдется D_3, следующий как за D_1, так и за D_2), и, кроме того, если пересечение стационарных подгрупп всех элементов x тривиально.

Например, действие G на X будет направленным, если $\mathbf{D}$ содержит наибольший элемент.

3. Примеры.

а) Пусть $G=S^1$ — окружность, реализованная как совокупность комплексных чисел ξ, для которых $|\xi|=1$. Рассмотрим два экземпляра G_1 и G_2 такой окружности и пусть $X=G_1\bigcup G_2$ — их дизъюнктное объединение. Определим действие G на X умножением на числа ξ, $|\xi|=1$. Тем самым возникает представление $\xi\to T_\xi$ группы G в группу гомеоморфизмов пространства X, порожденное сдвигами. Здесь G_1 и G_2 являются единственными компонентами действия G на X, однако они не пересекаются, следовательно, они не сравнимы между собой и, значит, не образуют направленного в нашем смысле множества.

б) В предыдущем примере X не было связным. Пусть сейчас $X=K_1\overset{*}{\bigcup}K_2$, где K_1 и K_2 — два экземпляра единичного диска $|\xi|\leqq 1$, с заклеенными центрами, а группа G — снова единичная окружность S^1. Пространство X можем считать реализованным в виде двухстороннего конуса. На X умножением действует G. Теперь невырожденные точки входят в две компоненты действия: $D_0'=K_1\setminus\{0\}$ и $D_0''=K_2\setminus\{0\}$. В X существует только еще одна компонента действия — общий центр, являющийся неподвижной точкой X. И в этом случае действие G на X не направленно — $D_0'\succ D_1$ и $D_0''\succ D_1$, но не существует следующей как за D_0', так и за D_0'' компоненты действия.

в) Рассмотрим два экземпляра полноториев Π_1 и Π_2, реализованных в $\mathbf{C}^2$ как множество всех точек (z_1, z_2), таких, что $|z_1|\leqq 1$, $|z_2|\leqq 1$. Пространство X будет их дизъюнктное объединеные с заклеенными центрами Q_1 и Q_2. Определим действие тора $\mathbf{T}^2$: $|z_1|=|z_2|=1$ на X следующим образом:

$$T(X, (\xi_1, \xi_2))(z_1, z_2)=\begin{cases}(\xi_1 z_1, \xi_2 z_2), & \text{если } (z_1, z_2)\in\Pi_1,\\ 0 & \text{для } \{(0, 0)\},\\ (z_1, \xi_2 z_2), & \text{если } (z_1, z_2)\in\Pi_2.\end{cases}$$

Сейчас $D_0=\Pi_1\setminus\{0\}$ есть единственная эффективная компонента действия, $G_x=G$ для $x\in D_2=\Pi_2\setminus Q_2$ и $x\in D_1$: $|z_2|\leqq 1$, $|z_1|=0$, а $C_{\{(0,0)\}}=\mathbf{T}^2$. В $\mathbf{D}$ соот-

ношения такие: $D_0 \succ D_1 \succ (0, 0)$, $D_2 \succ (0,0)$, но не существует компоненты, следующей как за D_0 и D_2 одновременно, ни такой, которая следует за D_1 и D_2.

г) Пусть $X=[0, 1]\times \mathbf{T}^\infty$, где $\mathbf{T}^\infty=\{(z_1, \ldots, z_n, \ldots)\}$ — бесконечномерный тор, $z_i \in \mathbf{C}^1$, $|z_i|=1$. Определим действие тора $\mathbf{T}^\infty$ на X следующим образом. Пусть $x=(t;\ z_1, \ldots, z_n, \ldots) \in X$, $\theta=(\xi_1, \ldots, \xi_n, \ldots) \in \mathbf{T}^\infty$, $\xi_n=e^{i\varphi_n} \in S^1$, а $\rho(t, n)=(n+1)(1-nt)\varphi_n$. Положим

$$T(X, \theta)x=(t;\ \xi_1 z_1, \ldots, \xi_{n-1} z_{n-1},\ e^{i\rho(t,n)} z_n,\ z_{n+1}, \ldots, z_{n+k}, \ldots), \text{ для}$$

$$t \in \left[\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}\right],\ T(X, \theta)(0;\ z_1, \ldots, z_n, \ldots)=(0;\ \xi_1 z_1, \xi_2 z_2, \ldots, \xi_n z_n, \ldots).$$

Ясно, что компонентами действия X являются множества $\left[\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}\right]\times \mathbf{T}^\infty = D_n$, причем $G_n=\mathbf{T}^n$, $D_0=\{0\}\times \mathbf{T}^\infty$ — эффективная компонента X, а $D_\infty=\{1\}\times T^\infty$ состоит из всех неподвижных точек X. Для всех $n \geqq m$ имеем $D_0 \succ D_n \succ D_m \succ D_\infty$ так, что $\mathbf{D}_x$ будет даже линейно упорядоченным, а заодно и действие тора — направленным.

д) Немного изменив действия $\mathbf{T}^\infty$ на X, полагая, например,

$$T(X, \theta)x=(t;\ e^{it\varphi_1} z_1, \ldots, e^{it\varphi_{n-1}} z_{n-1},\ \rho(t, n)e^{it\varphi_n} z_n,\ z_{n+1}, \ldots, z_{n+k}, \ldots),$$

получим ненаправленное действие, так как неподвижные точки теперь сосредоточиваются в двух компонентах действия: $\{0\}\times T^\infty$ и $\{1\}\times T^\infty$, и не существует компоненты в X, следующей одновременно за ними. Однако, если отождествить эти компоненты, получим пространство, в котором G действует направленно, которое не содержит эффективной компоненты.

е) Пусть связная компактная группа действует на связном хаусдорфовом топологическом пространстве X так, что эффективная компонента действия D_0 всюду плотна в нем. Это действие рассматривалось А. Я. Гордоном [4] и оно является направленным. Действительно, пусть D — любая компонента действия X. Положим $N(D_0, D)=D_0 \cup D$. Это множество — цепь, связывающая D_0 с D, так как $H_D \supset H_0=\{0\}$, причем N связно в силу плотности D_0, а все граничные точки D_0, лежащие в N, содержатся в D.

4. Основная теорема. Если группа G действует направленно на Y, а связная компактная коммутативная полугруппа S с ядром K удовлетворяет условию $\check{H}^1(S, K;\ \mathbf{Z})=0$, то для каждого сохраняющего орбиты гомеоморфизма F S-пространства X в G-пространстве Y имеет место следующее представление:

$$FT(X, s)x=T(Y, \gamma(s))T(Y, v(s, x))Fx, \tag{1}$$

где γ — непрерывный гомоморфизм S в G, а v — такое многозначное отображение $S\times X \to G$, для которого все непрерывные отображения $\pi_{Fx} \circ v_1 : S\times X \to G_{Fx}$ стягиваются к нулям соответствующих групп G_{Fx}.

При доказательстве нам понадобится следующее обобщение теоремы Ван Кампена:

(*) Каждое непрерывное отображение $f: S \to \Gamma$ связной компактной коммутативной полугруппы с $\check{H}^1(S, K; \mathbf{Z}) = 0$ в локально компактную абелеву группу Γ представляется единственным образом в виде

$$f(s) = f(e_1) + \chi_f(s) + \varphi_f(s),$$

где χ_f — непрерывный гомоморфизм S в Γ, φ_f — непрерывное отображение S в Γ, стягиваемое к единице Γ, а $\varphi(e_1) = 1$, где e_1 — единица ядра K. Возникающее отображение $C(S, \Gamma) \to \mathrm{Hom}(S, \Gamma): f \to \chi_f$ непрерывно (см. напр. [7], [8]).

Доказательство основной теоремы. Покажем сначала, что при сделанных предположениях имеет место следующая

Лемма. Пусть D_1 — фиксированный элемент $\mathbf{D}_F$. Для каждой цепи $N(D_1, D_2)$, связывающей D_1 с D_2, сужение F на множество $F^{-1}(N(D_1, D_2)) \subset X$ представляется единственным образом в виде $FT(X, s)x = T(D_1, \gamma(s))T(D_1, v(s, x))Fx$ для некоторого гомоморфизма $\gamma_1 \in \mathrm{Hom}(S, G_1)$ и многозначного отображения $v_1: S \times F^{-1}(N(D_1, D_2)) \to G_1$, причем для каждого $D_\alpha \subset N(D_1, D_2)$ отображение $\pi_\alpha v \in C(S \times F^{-1}(D_\alpha), G_\alpha)$ и стягивается к нулю G_α.

Доказательство. Пусть цепь $N(D_1, D_2)$ связывает D_1 с D_2. Рассмотрим семейство A всех подцепей $N(D_1, D_2)$ вида $N(H_\alpha)$, где H_α есть стационарная подгруппа некоторой компоненты D_α из $N(D_1, D_2)$, $H_1 \subset H_\alpha \subset H_2$, на которых выполняется утверждение леммы. Покажем, что это семейство индуктивно относительно включения стационарных подгрупп H_α, определяющих его элементы $N(H_\alpha)$. В самом деле A не пусто, так как D_1, рассматриваемое как подцепь $N(H_1)$, принадлежит A. Действительно, пусть $x \in F^{-1}(D_1)$ — фиксированный элемент X. Для F имеем, что $F([x]) = [Fx]$, и если $y \in [x]$, то $y = T(X, s)x$ для некоторого $s \in S$ и найдем такой элемент $u(s, x) \in G$, для которого

$$Fy = FT(X, s)x = T(Y, u(s, x))Fx. \tag{2}$$

На D_1 кроме G действует еще, притом эффективно, группа $G_1 = G_{Fx}$, и (2) переписывается в виде

$$Fy = FT(X_1, s)x = T(D_1, \pi_1 u(s, x))Fx.$$

Ввиду компактности S и G_1 и эффективности действия G_1 на D_1 отображение $\pi_1 u(\cdot, x)$ непрерывно отображает S в G_1. В силу упомянутого выше обобщения теоремы Ван Кампена (*) оно представляется единственным образом в виде

$$\pi_1 u(s, x) = \gamma_1(s, x) + v_1(s, x), \tag{3}$$

для всех $s \in S$, где γ_1 — непрерывный гомоморфизм S в G_1, а v — стягиваемое к 0_1 непрерывное отображение S в G_1 (напомним, что всегда $\pi_1 u(e, x) = 0_1$). Пусть теперь x описывает все элементы $F^{-1}(D_1)$. Снова из-за компактности S и G_1 и эффективности действия G_1 на D_1 получаем, что возникающая функция $\pi_1 u(s, x): S \times F^{-1}(D_1) \to G_1$ непрерывна, откуда следует и непрерывность отображения $x \to \pi_1 u(\cdot, x)$ из $F^{-1}(D_1)$ в $C(S, G_1)$. Поскольку отображение $\pi_1 u(\cdot, x) \to \gamma(\cdot, x)$ непрерывно отображает $C(S, G_1)$

в $\mathrm{Hom}(S, G_1)$ (см. (*)) таким будет и отображение $x \to \gamma(\cdot, x)$ из $F^{-1}(D_1)$ в $\mathrm{Hom}(S, G)$. В силу связности $F^{-1}(D_1)$ (из-за гомеоморфности F), его образ в $\mathrm{Hom}(S, G_1)$ снова будет связным, и в силу полной несвязности $\mathrm{Hom}(S, G_1)$ (см. напр. [3]) отображение $\gamma(s, x)$ не зависит на самом деле от второго аргумента, и равенство (3) приобретает вид

$$\pi_1 u(s, x) = \gamma_1(s) + v_1(s, x)$$

для всех $x \in X$, где $\gamma_1 \in \mathrm{Hom}(S, G_1)$ а $v_1 \in C(S \times F^{-1}(D_1), G_1)$ и для каждого фиксированного x из $F^{-1}(D_1)$ стягивается к 0_1. Полагая теперь $v(s, x) = v_1(s, x) + H_x$, получим многозначное отображение $S \times F^{-1}(S_1) \to G_1$ с требуемыми свойствами.

Итак, семейство A непусто. Докажем его индуктивность. Пусть $\Sigma = \{N(H_\lambda)\}_{\lambda \in A}$ — линейно упорядоченное множество элементов A. Покажем, что Σ ограничено сверху. Действительно, каждое $N(H_\lambda)$ является относительно открытым в $N(D_1, D_2)$ множеством, что легко проверяется, так что связное множество $N' = \bigcup_{\lambda \in A} N(H_\lambda)$ будет снова открытым в $N(D_1, D_2)$. Ввиду связности $N(D_1, D_2)$ найдем компоненту действия $D_A \subset N(D_1, D_2)$ такой что все граничные точки множества N' в $N(D_1, D_2)$ содержатся в D_A, причем $H_\lambda \supset \bigcup H_A$ а $N(H_A) = D_A \bigcup N'$, из-за пункта 2 определения цепи. В силу единственности на каждом $N(H_\lambda)$, F имеет искомое представление на $F^{-1}(N') \subset X$. Покажем, что утверждение леммы выполняется на всем $N(H_\lambda)$. Пусть y_0 — элемент X, такой, что Fy_0, содержится в $N' \bigcap D_A$, а $y_\nu \in F^{-1}(N')$ — сходящая обобщенная последовательность: $y_\nu \to y_0$. Как и для D_1 выше, сейчас на $F^{-1}(D_A)$ получаем разложение F в виде

$$FT(X, s)y_0 = T(D_A, \pi_A u(s, y_0))Fy = T(D_A, \chi(s))T(D_A, w(s, y_0))Fy_0, \tag{4}$$

где $\chi \in \mathrm{Hom}(S, G_A)$, а $w \in C(S, G_A)$. На $F^{-1}(N')$ имеем аналогичное разложение с $\gamma_1 \in \mathrm{Hom}(S, G_1)$:

$$FT(X, s)\, y_\nu = T(N', \gamma_1(s))T(N', v(s, y_\nu)Fy_\nu. \tag{5}$$

Так как $v(s, y_\nu)$ принадлежит компакту G_1, найдется подпоследовательность $\{y_{\nu_\rho}\}$, такая, что $\{v(s, y_{\nu_\rho})\}$ сходится к некоторому элементу $\xi \in G_1$. Тогда из $y_{\nu_\rho} \to y_0$, $Fy_{\nu_\rho} \to Fy_0$, $FT(X, s)y_{\nu_\rho} \to FT(X, s)y_0$ и $v(s, y_{\nu_\rho}) \to \xi$, после предельного перехода в (4) и (5) получим

$$T(D_A, \chi(s))T(D_A, w(s, y_0))Fy_0 = T(N', \gamma_1(s))T(N, \xi)Fy_0$$
$$= T(D_A, \pi_A \gamma_1(s))T(D_A, \pi_A \xi)Fy_0.$$

В силу единственности разложения в теореме (*) отсюда получим, что $\chi = \pi_A \gamma_1$ и $w(s, y_0) = \pi_A \xi$. Теперь (4) можно переписать в виде

$$FT(X, s)y_0 = T(D_A, \chi(s))T(D_A, w(s, y_0))Fy_0 = T(N', \gamma_1(s))T(N', v'(s, y_0))Fy_0,$$

где $v'(s, y_0) = \xi \in G_1$. Полагая для каждого $s \in S$ и $y \in F^{-1}(D_A)$, $v_1(s, y) = \pi_A^{-1} w(s, y)$, получим окончательно на $F^{-1}(D_A)$, а вместе с тем и на $F^{-1}(N(H_A))$, требуемое представление $FT(X, s)y = T(N(H_A), \gamma_1(s))T(N(H_A), v_1(s, y))Fy$.

Итак, цепь $N(H_A)$ принадлежит A и следует за каждым элементом Σ, что дает и индуктивность A. Пусть $N(H_\mu)$ — максимальный элемент в A

и пусть $N(H_\mu) \neq N(D_1, D_2)$. Но $N(H_\mu)$ — относительно открытое множество в $N(D_1, D_2)$, откуда как и выше найдем компоненту $D_m \subset N(D_1, D_2)$, для которой $N(H_m)$ строго больше чем $N(H_\mu)$, и на $N(H_m)$ выполняется утверждение леммы. Это приводит к противоречию с максимальностью $N(H_\mu)$, и, следовательно, $N(H_\mu) = N(D_1, D_2)$. Лемма доказана.

Чтобы закончить доказательство теоремы о представлении, зафиксируем некоторую компоненту действия D_σ из $\mathbf{D}_Y$ и рассмотрим все такие подгруппы $H_\alpha \subset G$, для которых существует компонента действия (скажем D_α) со стационарной подгруппой H_α, следующая за D_σ. Эти подгруппы, вместе с вложениями, образуют направленную вверх систему, причем в силу направленности действия G их пересечение тривиально. Соответствующие факторгруппы $G_\alpha = G/H_\alpha$, вместе с проекциями — фактор-отображения $\pi^\alpha_\beta : G_\alpha \to G_\beta$ (если $D_\alpha \succ D_\beta$, то $H_\alpha \subset H_\beta$), образуют обратный спектр $\{G_\alpha, \pi^\alpha_\beta\}$. Нетрудно убедится, что $\varprojlim \{G_\alpha, \pi^\alpha_\beta\} = G$. Для каждого $D_\alpha \succ D_\beta$ согласно лемме возникает такой непрерывный гомоморфизм $\gamma_\alpha \in \mathrm{Hom}(S, G_\alpha)$, который участвует в разложении $F_{F^{-1}(D_\sigma)}$ типа (1). Отсюда определяется непрерывный гомоморфизм $\gamma : S \to \varprojlim \{G_\alpha, \pi_\alpha\} = G$, для которого $\pi_\alpha \gamma = \gamma_\alpha$, и разложение $F_{F^{-1}(D_\sigma)}$ приобретает вид

$$FT(X, s)x = T(D_\sigma, \gamma_\sigma(s))T(D_\sigma, v_\sigma(s, x))Fx = T(Y, \gamma(s))T(Y, v(s, x))Fx,$$

где $\gamma \in \mathrm{Hom}(S, G)$ единственно, а для каждого $s \in S$ и x из $F^{-1}(D_\sigma)$, $\pi_\sigma v(s, x) = v_\sigma(s, x)$. Пусть D_τ — другая компонента действия G на Y и пусть на $F^{-1}(D_\tau)$ имеем

$$FT(X, s)x = T(Y, \gamma'(s))T(Y, v'(s, x))Fx,$$

где γ' — снова непрерывный гомоморфизм $S \to G$. Покажем, что $\gamma' = \gamma$. Действительно, в силу направленности действия G существует такое $D_\theta \in \mathbf{D}_Y$, которое следует за D_σ и D_τ. Тогда $\pi^\sigma_\theta \gamma = \gamma = \pi^\tau_\theta \gamma'$ как и выше, так что определенный однозначно элемент γ как $\varprojlim_\alpha \gamma_\alpha$ будет участвовать в разложении трех сужений: $F|_{F^{-1}(D_\theta)}$, $F|_{F^{-1}(D_\sigma)}$ и $F|_{F^{-1}(D_\tau)}$. Значит, на всем X получаем единое представление для F:

$$FT(X, s)x = T(Y, \gamma(s))T(Y, v(s, x))Fx, \tag{1}$$

где γ — непрерывный гомоморфизм $S \to G$, а $\pi_{Fx} v(s, x)$ — непрерывно на S и стягивается к нулю G_{Fx}. Теорема доказана.

Замечание. В случае когда $S = G$, гомоморфизм γ на самом деле является автоморфизмом.

Действительно, если F сохраняет орбиты, то и F^{-1} будет тоже таким, и значит на Y будем иметь

$$F^{-1}T(Y, g)y = T(Y, \chi(g))T(Y, w(g, y))F^{-1}y.$$

Тогда для $1 = F^{-1}F$ получим $T(X, g)x = F^{-1}FT(X, g)x = F^{-1}T(Y, \gamma(g) + v(g, x))Fx = T(X, \chi(\gamma(g)))T(X, \chi(v(g, x) + w(\gamma(g) + v(g, x)), Fx)F^{-1}Fx$

$$= T(X, \chi(\gamma(g)))T(X, k(g, x))x,$$

где $\pi_x k(g, x)$ стягивается к 0_{Gx} для каждого фиксированного $x \in X$. В силу единственности представления $F^{-1}FT(X, g)$ имеем, что $g = \chi(\gamma(g))$, а $\pi_{Fx} k(g, x) = 0_{GFx}$ и, значит, χ и γ суть взаимнообратные гомоморфизмы G.

В случае ненаправленного действия в первых двух примерах гомеоморфизм F, определенный как x, если $x \in G_1$ $(x \in K_1)$, и $\bar{x}$ для $x \in G_2$ (K_2) сохраняет орбиты X, но не имеет представление вида (1), потому что соответствующее ему отображение $u: G \times X \to G$ равняется gx для $x \in G_1$ и $\bar{g}x$ для $x \in G_2$, а его нельзя представить в виде произведения автоморфизма G на стягиваемом отображении. В примере в) тоже есть сохраняющие орбиты гомеоморфизмы, не удовлетворяющие утверждение основной теоремы. Рассмотрим, например, гомеоморфизм F, определенный как (z_1, z_2) для (z_1, z_2) из Π_1 и как $(z_1, \bar{z}_2)$ для (z_1, z_2) из Π_2. Для соответствующего отображения $u(g, x)$ получаем

$$u((\xi_1, \xi_2), (z_1, z_2)) = \begin{cases} (\xi_1 z_1, \ \xi_2 z_2), & \text{если } (z_1, z_2) \in \Pi_1, \\ (z_1, \ \bar{\xi}_2 z_2), & \text{если } (z_1, z_2) \in \Pi_2, \end{cases}$$

которое тоже нельзя представить как произведения автоморфизма тора на стягиваемом отображении.

Автор благодарит Е. А. Горина за внимание к этой работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. Аров, Д. З.: О топологическом подобии автоморфизмов и сдвигов компактных коммутативных групп. Усп. Мат. наук, XVIII, вып. 5 (113) (1963), 133 — 138.
2. Горин, Е. А., Лин, В. Я.: О топологическом подобии G-линейных преобразований компактов, II тираспольский симпозиум по общей топологии и ее приложениям. Кишинев, 1969, 24 — 26.
3. Лин, В. Я.: Полуинвариантное интегрирование со значениями в группе. Мат. сб., 82 (1970), 2, 233 — 259.
4. Гордон, А. Я.: О линейном подобии гомеоморфизмов компактных пространств. Усп. мат. наук, XXV, вып. 6 (156), (1970), 221 — 222.
5. Rym, J.: Idempotent measures on semigroups. Pacific J. Math., 1962, 12, No. 2, 685 — 698.
6. Тонев, Т. В.: Об алгебраических подобиях гомеоморфизмов абстрактных динамических систем. Усп. мат. наук, XXIX, вып. 1 (175) (1974), 191 — 192.
7. Тонев, Т. В.: Некоторые вопросы гармонического анализа на полугруппе и абстрактные динамические системы. МГУ, 1973, диссертация.
8. Тонев, Т. В.: Каноническое разложение отображений полугруппы в алгебре. Докл. БАН, 28 (1975), № 3, 291 — 294.

Постъпила на 14. II. 1974 г.

ORBIT PRESERVING HOMEOMORPHISMS OF THE ABSTRACT DYNAMICAL SYSTEMS

T. W. Tonev

(SUMMARY)

In this paper we consider spaces with compact connected abelian group ore semigroup actions, in generally not effective or transitive. In the group case there are introduced the so called directed actions generalizing the effective actions. A representation theorem for the orbit preserving homeomorphisms of that spaces is proved. Every such homeomorphism is the superposition of a homeomorphism action and a special continuous semigroup action. Some examples showing the essentiality of our conditions are given.