СИСТЕМА ПЛОСКОСТЕЙ ПРОСТРАНСТВА P^4, СВЯЗАННЫХ С НОРМПОВЕРХНОСТЬЮ F^2_3

Гергана Енева, Николай Гушель

В алгебраической системе двумерных плоскостей Q^6 четырехмерного проективного пространства P^4 можно выделить различные подсистемы в зависимости от пересечения плоскостей с данной нормповерхностью $F^2_3 \subset P^4$[3], [4]: а) пятимерная система Q^5 плоскостей, содержающих не менее одной касательной прямой F^2_3; б) система Q^4 плоскостей, пересекающих F^2_3 в трех совпавших точках; в) система Q^3 плоскостей, пересекающих F^2_3 по образующей; г) двумерное множество касательных плоскостей (конгруэнция) $K(2, 3)$; д) конгруэнция $K(1, 0)$ плоскостей, содержающих прямую u, пересекающую все образующие F^2_3; е) конгруэнция $K(1, 3)$ плоскостей, пересекающих F^2_3 по кривым второго порядка. Можно доказать, что указанные системы замкнуты и выполняются вложения: $Q^6 \supset Q^5 \supset [K(2, 3) \cap K(1, 0) \cap K(1, 3)]$, $Q^3 \supset K(2, 3)$, причем $K(2, 3) \cap K(1, 0) \cap K(1, 3)$ плоские, образующие гиперконуса второго порядка с одномерной вершиной u.

Конгруэнции $K(2, 3)$, $K(1, 3)$ изучались в работах [2], [3], [5]. Свойства образующих и касательных прямых F^2_3 определяют характеристики систем соответственно Q^3 и Q^5. В настоящей заметке рассматриваются некоторые конечные характеристики системы Q^4.

I. а) В гиперплоскости общего положения P^3 содержится одномерная система σ_l плоскостей Q^4. Система образована соприкасающимися плоскостями в точках нормкривой $P^3 \cap F^2_3$. Точку $M \in P^3$ общего положения содержат три плоскости σ_l, поэтому порядок σ_l (класс Q^4) равен трем.

б) Гиперплоскости P^3, пересекающие F^2_3 по конике c_2 и прямой m, образуют трехмерную систему R^3. Пучок $\sigma_1 \subset P^3$ плоскостей, проходящих через касательную к конике в точке $c_2 \cap m$ принадлежит Q^4.

в) Если гиперплоскость P^3 содержит прямую u и образующие m_1 m_2 $(m_1 \not\equiv m_2)$, то в ней лежит пучок плоскостей $\sigma_1 \in Q^4$ с вершиной u.

г) Каждая гиперплоскость P^3 одномерной системы R^1_2 соприкасающихся гиперплоскостей к F^2_3 содержит прямую u и образующие $m_1 \equiv m_2$. В P^4 лежит связка $K^{u \cap m_1}$ с вершиной $u \cap m_1$ плоскостей Q^4.

Заметим, что все плоскости Q^4 исчерпываются плоскостями, принадлежащими R^3 и R^1_2. Поэтому можно утверждать, что система Q^4 четырехмерная.

II. а) Назовем порядком системы Q^4 число ее плоскостей, содержащих прямую l общего положения.

Каждой точке $L \in l$ инцидентна единственная плоскость $\pi^2 \in K(1, 3)$. В гиперплоскости (l, π^2) лежит единственная касательная плоскость $\tau^2 \in K(2, 3)$, определяющая точку $l \cap \tau^2$. Обратно, точке $M \in l$ инцидентны две плоскости δ^2, $\tilde{\delta}^2 \in K(2, 3)$. В гиперплоскостях (l, δ^2), $(l, \tilde{\delta}^2)$ лежат по одной плоскости $(\rho^2, \tilde{\rho}^2 \in K(1, 3)$, определяющих точки $l \cap \rho^2$, $l \cap \tilde{\rho}^2$. На прямой l установлено соответствие $[1, 2]: L \to l \cap \tau^2$; $M \to l \cap \rho^2$, $l \cap \tilde{\rho}^2$, имеющее, как известно [1] три инвариантные точки. Инвариантные точки определяют три плоскости $\zeta^2 \in Q^4$, $\tilde{\zeta}^2 \in Q^4$, $\tilde{\tilde{\zeta}}^2 Q^4$, содержащие прямую l. Итак, порядок Q^4 равен трем.

б) Если прямая l пересекает F_3^2 в точке M (прямая $m \ni M$ — образующая F_3^2), то соответствие [1, 2] вырождается. Прямую l содержит плоскость Q^4, определяемая касательной в точке M коники $c_2 \in F_3^2$; $[M, (m, l)] \cap F_3^2 \backslash m \in c_2$. В частности, если $M \in u$, то $l \subset (l, u) \in Q^4$.

в) Бисеканта $l \ni L, \bar{L}$ поверхности F_3^2 лежит в плоскости $\pi^2 \in K(1, 3)$; $L \in \pi^2$, $\bar{L} \in \pi^2$.

г) Касательные прямые и прямые $l \subset P^3 \subset R_2^1$; $u \cap m_1 \in l$ — оси пучков плоскостей Q^4 (см. I. г).

III. а) Точке M общего положения инцидентны плоскости конгруэнции $K^M \subset Q^4$. Порядок и класс K^M (определение смотрите в [5]) равны порядку и классу Q^4.

б) Если $M \in F_3^2$, $M \bar{\in} u$, то K^M первого порядка и класса [7]. Действительно, если $\tau^2 \in K(2, 3)$, то в каждой гиперплоскости пучка с вершиной τ^2 лежит пучок плоскостей Q^4.

в) Точке $M \in u$ инцидентны плоскости связки, лежащей в соответствующей соприкасающейся гиперплоскости, и плоскости $K(1, 0)$.

IV. Рассмотрим конгруэнцию K^{ω^2} плоскостей Q^4, пересекающие фиксированную плоскость ω^2 по прямым.

а) Пусть плоскость ω^2 пересекает F_3^2 в трех точках. В гиперплоскости (M, ω^2) три плоскости из Q^4 содержат точку M общего положения, поэтому порядок K^{ω^2} равен 3. Класс K^{ω^2} равен 6. Для его определения необходимо найти плоскости Q^4, пересекающие ω^2 и плоскость σ^2 общего положения по прямым $(\omega^2 \cap \sigma^2 = N \bar{\in} F_3^2)$. Конгруэнция K^N (3, 3) пересекает гиперплоскость $P^3 \ni N$ по прямым конгруэнции (3, 3). Прямые $P^3 \cap \omega^2$ и $P^3 \cap \sigma^2$ пересекают шесть прямых (3, 3) [1], определяющие (вместе с точкой N) искомые плоскости.

б) Если плоскость ω^2 пересекает F_3^2 по образующей m и в точке $N \in m, u$, то конгруэнция K^{ω^2} порядка 1 и класс 2 [8]. Действительно, в каждой гиперплоскости пучка с вершиной ω^2 лежит пучок плоскостей K^{ω^2}. Оси пучков плоскостей образуют полуквадрику $F_2^2 = F_2^3 \cap \omega^3$ — след гиперконуса F_2^3 бисекант нормповерхности F_3^2, проходящих через точку N в соприкасающейся гиперплоскости $\omega^3 \supset n$. Очевидно, $F_2^2 \cap \omega^2 = m$.

Касательная плоскость ω^2 в точке N определяет приводимую конгруэнцию $K^N \bigcup [K^{m \cap u} \backslash K(1,0)]$.

в) Пусть плоскость ω^2 пересекает F_3^2 по конике c_2. В каждой гиперплоскости пучка с вершиной ω^2 лежит пучок плоскостей Q^4 с осью-касательной к конике c_2. Через точку $M \in \omega^2$ проходит единственная гиперплоскость пучка с вершиной ω^2. В гиперплоскости находится единственная плоскость $\pi^2 \in Q^4$ инцидентная M. Плоскость ρ^2 общего положения пересекает по прямым две плоскости пучков с осями касательными t_1 и t_2 к c_2, проведенными из точки $\omega^2 \bigcap \rho^2$. Поэтому конгруэнция $K\omega^2$ в данном случае также имеет порядок 1 и класс 2.

г) Если плоскость $\omega^2 \supset u$, то K^{ω^2} приводима на $K(1,0)$ и две связки плоскостей Q^4, лежащих в гиперплоскостях Ω^3, $\tilde{\Omega}^3 \subset R_2^1$, таких, что $\Omega^3 \bigcap \tilde{\Omega}^3 = \omega^2$. В частности возможно $\Omega^3 \equiv \tilde{\Omega}^3$.

V. Рассмотрим подсистемы $\omega^l \subset Q^4$ плоскостей, пересекающих прямую l.

а) Прямую l общего положения пересекают плоскости трехмерной подсистемы $\omega^l \subset Q^4$. Важной характеристикой (порядком) является порядок гиперконуса плоскостей ω^l, инцидентных точке M общего положения, т. е. число плоскостей Q^4, пересекающих прямые l, n и содержащих точку M. Аналогично доказательству пункта IV.а получим число 6.

Систему ω^l можно характеризировать также свойствами конгруэнции $K^{l,n}$ плоскостей Q^4, пересекающие прямые l, n. Определения порядка ω^l и $K^{l,n}$ совпадают. Класс $K^{l,n}$ равен 9, так как число плоскостей K^{ω^2}, пересекающих по прямым плоскость общего положения ρ^2 и прямые l, n, равно 9. Доказательство аналогично IV.а.

Если прямая $l \bigcap F_3^2 \neq \varnothing$, $l \not\subset F_3^2$, то основные характеристики ω^l такие же как и для прямой общего положения.

б) Пусть прямая $l \subset F_3^2$, $l \not\equiv u$. Для определения порядка ω^l необходимо найти число плоскостей Q^4, пересекающих прямую l, прямую n общего положения и проходящих через точку M.

Точка $N \in n$ определят полуквадрику F_2^2 касательных к коникам $c_2 \ni (l, N) \bigcap F_3^2 \backslash l$ в точках $l \bigcap c_2$. Гиперконус второго порядка F_2^3 плоскостей, содержащих прямые F_2^2 и точку M, пересекает n в точках O, $\tilde{O}$. Обратно, точка $P \in n$ определяет плоскость (PM, p), где прямая $p \in PM \bigcap \pi^3$ принадлежит параболической конгруэнции (1, 1) касательных к F_3^2, лежащих в гиперплоскости $\pi^3 \supset l$. Гиперплоскость Ω^3, содержащая прямую l и конику $c_2 \subset F_3^2$, касательную к прямой p в точке $l \bigcap p$, пересекает n в точке R. Таким образом на прямой n установлено соответствие $[1, 2]: N \to 0$, $\tilde{O}$, $P \to R$. Поскольку $[1, 2]$ имеет три инвариантные точки, порядок ω^l равен 3.

Для определения класса $K^{l,n}$ необходимо найти число плоскостей Q^4, пересекающих l, n и плоскость σ^2 общего положения по прямым. Прямые конгруэнции (1, 1), пересекающие σ^2, образуют полуквадрику $I_2^2 \supset \sigma^2 \bigcap \pi^3$, l. Каждая прямая r полуквадрики I_2^2 определяет пучок ω^1 плоскостей Q^4 и гиперплоскость пучка с вершиной σ^2. Гиперплоскости $\Omega^3 \supset \omega^1$, (r, σ^2) опре-

деляют точки $\Omega^3 \cap n$, $(r, \sigma^2) \cap n$. Инвариантные точки проективного соответствия $f: \omega^3 \cap n \to (r, \sigma^2)_{\cap n}$ определяют искомые две плоскости Q^4.

в) Плоскости системы ω^u лежат в гиперплоскостях R_2^1. Порядок ω^u равен двум, так как точку $M \overline{\in} u$ содержат две гиперплоскости $P^3 \in R_2^1$, $\widetilde{P}^3 \in R_2^1$.

Класс $K^{u,n}$ равен порядку гиперповерхности F_3^3 плоскостей ω^u, пересекающих плоскость $\sigma^2 (\sigma^2 \cap u \neq \emptyset)$ по прямым. Гиперплоскости $P^3 \in R_2^1$ пересекают σ^2 по прямым q, огибающим некоторую конику. Прямая q и точка M пересечения образующей $m \subset P^3$ и прямой u определяют $(M, q) \subset F_3^3$. На прямой n установлено соответствие [1, 2]: $(M, \sigma^2) \cap n \to (u, q) \cap n$; $P^6 \cap n \equiv \widetilde{P}^5 \cap n \to (M, \sigma^2) \cap n$, $(\widetilde{M}, \sigma^2) \cap n)$, где $M, q \subset P^3$; $\widetilde{M}, \widetilde{q} \subset \overline{P}^3$. Три инвариантные точки [1, 2] определяют плоскости F_3^3, пересекающие n. Следовательно, гиперповерхность F_3^3 порядка 3.

Система Q^4 содержит ряд подсистем удобных для моделирования P^4 на плоскости или в трехмерном пространстве. Представляется интересным также изучение отображений прямых $l \subset P^4$ на плоскость $\rho^2 \in Q^4: l \to (\zeta^2 \cup \widetilde{\zeta}^2 \cup \widetilde{\widetilde{\zeta}}^2) \cap \rho^2$ или на поверхность F_3^2, $l \to (\zeta^2 \cup \overline{\zeta}^2 \cup \overline{\overline{\zeta}}^2) \cap F_3^2$. Важно выяснить вопрос об обратных отображениях, и т. д.

ЛИТЕРАТУРА

1. Sturm, R.: Liniengeometrie, Teil I, Leipzig, 1892, 16—41.
2. Скопец, З. А.: Отображение четырехмерного пространства на двумерную плоскость посредством нормповерхности. Уч. зап. Каб.-Балк. ун-та, вып. 30 (1966), 251—259.
3. Енева, Г, Скопец, З.: Построение плоской модели четырехмерного проективного пространства изотропным проектированием нормповерхности третьего порядка. Год. Соф. унив., Мат. фак., 62 (1967/68), 243—258.
4. Котий, О. А., Потоскуев, Е. В.: О кубической нормповерхности четырехмерного проективного пространства. Уч. зап. Яросл. пед. ин-та, 64 (1969), 87—98.
5. Пеклич, В. А.: Отображение плоскости на плоскость в четырехмерном пространстве коникосекантами нормповерхности. Научные труды Моск. лесотехн. ин-та, 39 (1971), 58—63.
6. Скопец, З. А., Моллов, С. Г.: Отображение четырехмерного пространства на плоскость посредством гиперкубики с двойной плоскостью. Уч. зап. Яросл. пед. ин-та, 64 (1969), 121—130.
7. Тефова, Е. Л.: Косое отображение плоскости на плоскость в четырехмерном пространстве. Уч. зап. Каб.-Балк. ун-та, 30 (1966), 269—275.
8. Герасимова, И. С., Скопец, З. А.: Косое проектирование двумерными плоскостями в четырехмерном проективном пространстве. Уч. зап. Яросл. пед. ин-та, 64 (1969), 24—33.

Постъпила на 14. XII. 1974 г.

EIN EBENENSYSTEM DES RAUMES P^4, DAS MIT DER NORMFLÄCHE F_3^2 VERKNÜPFT IST

G. Enewa, N. Guschel

(ZUSAMMENFASSUNG)

In der Arbeit wird die Menge Q^4 der zweidimensionalen Ebenen, die die Normfläche von P^4 in drei zusammenfallenden Punkte schneiden, betrachtet. Es wird gezeigt, dass diese Menge vierdimensional ist und es wurden deren endliche Charakteristiken gefunden. Es wird bewiesen, dass die Klasse und die Ordnung von Q^4 gleich drei sind. Es werden die Untermengen von C^4 untersucht, die in der Hyperebenen von P^4 liegen, und die Kongruenz der zweidimensionalen Ebenen, die der Menge Q^4 gehören und eine fixierte Ebene in Geraden schneiden.