НЕКОТОРЫЕ ПРИМЕРЫ ТОЧНЫХ ОПЕРАЦИЙ НА КЛАССЕ ВСЕХ ГРУПП

Георги К. Генов

За последние 25 лет в теории групп определилось направление, имеющее предметом своего изучения операции, действующие подобно прямому и свободному умножениям на классе всех групп. Результаты настоящей работы являются продолжением исследований автора в этом направлении и тесно связаны с его работами [4], [5] и [6].

В работе [2] О. Н. Головин привел полный перечень абстрактных свойств операций в виде постулатов, накладываемых на них. Полностью эту аксиоматику воспроизвести здесь невозможно, поэтому ограничимся лишь формулировкой самого необходимого. Однако заметим, что подробное чтение настоящей статьи затруднительно без знакомства с работами [2], [3], [4]. Заметим, что после выхода в печать статьи [2] возникла необходимость некоторого расширения аксиоматики точных операций, приведшего к частичным изменениям обозначений некоторых постулатов. В § 1 работы автора [5] постулаты приведены с их современными обозначениями, причем в отличной от избранной в [2] форме, которая оказывается в ряде случаев более удобной.

Напомним, что в соответствии с определением, данным О. Н. Головиным [2], говорят, что на классе всех групп задана точная операция Π^0, если введен закон, по которому каждому семейству групп G_ν $(\nu \in I)$ сопоставляется „произведение“ $G = \prod^0_{\nu \in I} G_\nu$ — с точностью до изоморфизма однозначным образом определенная группа G, порождающаяся своими подгруппами, соответственно изоморфными группам G_ν.

Приведем наиболее необходимые нам постулаты.

Пусть Π^0 — точная операция, $G = \Pi^0 G_\nu$, $H = \Pi^0 H_\nu$ — две Π^0-произведения равномощных множеств произвольных групп и $\varphi_\nu : G_\nu \to H_\nu (\nu \in I)$ — набор гомоморфизмов.

II-2* (постулат Маклейна). Если φ_ν — произвольные эпиморфизмы, то они склеиваются в эпиморфизм $\varphi : G \to H$, причем $\operatorname{Ker} \varphi = \{\operatorname{Ker} \varphi_\nu \mid \nu \in I\}^G$.

II-3* (постулат Мальцева). Если $\varphi_\nu (\nu \in I)$ — произвольные мономорфизмы, то они склеиваются в монорфизм $\varphi : G \to H$.

II-4 (постулат функторности). Если $\varphi_\nu (\nu \in I)$ — произвольные гомоморфизмы, то они склеиваются в гомоморфизм $\varphi : G \to H$.

III-5 (постулат ассоциативности). Если $I = \bigcup_{\mu \in J} I_\mu$ — произвольное разбиение множества индексов на попарно непересекающиеся подмноже-

ства, то группы $G=\Pi^0_{\nu\in I}G_\nu$ и $M=\Pi^0_{\mu\in J}(\Pi^0_{\nu\in I_\mu}G_\nu)$ являются естественно изоморфными.

В теории точных операций до сих пор существуют только три конструкции, при помощи которых строятся ассоциативные операции.

Первая конструкция была введена и изучена З. Мораном в [13] и [14]. С любой нормальной функцией Ф, определенной на классе всех групп, Моран связывает операцию Π^Φ (см. § 1). Эти операции мы называем операциями Морана, а способ их получения — конструкцией Морана. Первыми примерами ассоциативных операций Морана являются вербальные операции [13; 589] и трансфинитные нильпотентные и разрешимые умножения [14; 297]. М. Ш. Цаленко в работе [12] определил и исследовал другое семейство ассоциативных операций, которые задаются при помощи конструкции Морана. Последние операции мы называем операциями Цаленко. Класс операций Цаленко (обозначаем его через P_Φ) содержит как частные случаи вербальные операции и трансфинитные нильпотентные и разрешимые умножения. Вторая конструкция (теперь принято называть ее конструкцией Морана—Фридмана) была указана М. А. Фридманом в [9], [10] и З. Мораном в [14]. Здесь мы принимаем терминологию Фридмана, рассматривая класс P_T полукоммутативных T-умножений. Через $P_T<$II-4, III-5$>$ мы обозначаем класс всех функторных ассоциативных полукоммутативных T-умножений. В работе [6] автор доказал, что в классе ассоциативных функторных операций конструкция Морана—Фридмана есть частный случай конструкции Морана и указал третью конструкцию функторных ассоциативных операций, которая является более общей, чем конструкция Морана.

В § 2 настоящей статьи показывается, что совокупности операций $P_\Phi\bigcap P_T<$II-4, III-5$>$, $P_\Phi\backslash P_T<$II-4, III-6$>$ и $P_T<$II-4, III-5$>\backslash P_\Phi$ являются классами, а не множествами.

После введения аксиоматики точных операций естественным образом возникла „внутренняя" задача исследования зависимостей между лежащими в ее основе постулатами и группами постулатов. Эта задача в основном к настоящему времени решена, осталось лишь несколько самых трудных вопросов. Все трудности оказались связанными с постулатом Мальцева. Решению одному из этих вопросов посвящен § 3 настоящей работы. Там строится пример новой мальцевской операции, которая дает нам возможность получить следующий результат аксиоматического характера:

из набора постулатов <II-2, II-3*, III-1, IV-1> не следует постулат Маклейна II-2*.

В статье используются следующие обозначения:

$$[x, y]=x^{-1}y^{-1}xy;\ x^y=y^{-1}xy;$$

X — базовая группа (см. § 1);

$\{B_\nu\mid\nu\in I\}^G$ — нормальный делитель в группе G, порожденный подмножествами B_ν;

$[G_1, G_2]$ — взаимный коммутант двух подгрупп некоторой группы;

$\{B_\nu\mid\nu\in I\}_G$ — подгруппа группы G, порожденная подмножествами B_ν;

U, V	— вербальные подгруппы базовой группы X;
$V(G)$	— вербальная подгруппа группы G, определенная вербальной подгруппой V базовой группы X;
$[G_\nu \mid \nu \in I]^G$	— нормализованный взаимный коммутант множества подгрупп $G_\nu (\nu \in I)$ в группе G;
Π^*, $\Pi^\times$	— знак свободного и прямого умножения, соответственно;
Π_T^0	— знак полукоммутативного T-умножения, соответствующего полукоммутативному закону $T = \langle T_1, T_2 \rangle$;
Π^Φ	— знак операции Морана, соответствующей нормальной функции Φ;
P_T	— класс всех полукоммутативных T-умножений;
$P_T\langle$II-4, III-5$\rangle$	— класс всех функторных ассоциативных полукоммутативных T-умножений;
T_Φ	— класс всех операций Цаленко.

§ 1. НЕОБХОДИМЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ И РЕЗУЛЬТАТЫ

Пусть G_ν $(\nu \in I)$ любое множество произвольных групп. Через F и G_F будем обозначать, соответственно, свободное произведение $\prod^*_{\nu \in I} G_\nu$ и его декартову подгруппу $[G_\nu \ \nu \in I]^F$.

Если R — некоторый абстрактный класс групп (т. е. класс, замкнутый относительно изоморфизмов), то через SR, QR и CR будем обозначать, соответственно, класс подгрупп, класс гомоморфных образов и класс декартовых произведений групп из R.

Мы будем говорить, что на классе всех групп задана нормальная функция Φ, если каждой группе G сопоставляется ее нормальный делитель $\Phi(G)$, определенный с точностью до изоморфизмов групп. Ясно, что при таком определении $\Phi(G)$ является характеристической подгруппой в группе G.

Определение 1. 1. Нормальную функцию Φ, определенную на классе всех групп, будем называть функторной, если для любых двух групп G и H и для любого гомоморфизма $\varphi: G \to H$ имеем $\Phi(G)\varphi \subseteq \Phi(H)$.

Если Φ — любая нормальная функция, то операцией Морана, соответствующей нормальной функции Φ, будем называть операцию Π^Φ, определенную равенством

$$\Pi^\Phi G_\nu = F/\Phi(F) \cap C_F,$$

где $G_\nu (\nu \in I)$ — любое множество произвольных групп. Если Φ — функторная нормальная функция, такая, что для любой группы G выполняется равенство $\Phi(G/\Phi(G)) = 1$, то операцию Морана Π^Φ будем называть операцией Цаленко. Класс всех операций Цаленко будем обозначать через P_Φ.

Замечание. В работе [12] последние операции были определены при помощи замкнутых слева рефлективных подкатегорий категории всех

групп, т. е. при помощи классов групп R, для которых $CR \subseteq R$ и $SR \subseteq R$. Но любая функторная нормальная функция Φ, для которой выполняется условие $\Phi(G/\Phi(G))=1$ для каждой группы G, определяет такой класс групп ($R=\langle G \mid \Phi(G)=1\rangle$), и это соответствие является взаимно однозначным [6]. Если R — многообразие групп, то соответствующая ему операция Цаленко Π^V является вербальной операцией, отвечающей многообразию R [8; 56].

Определение 1. 2. [10; 710]. Пусть $T=\langle T_1, T_2\rangle$ — пара нормальных функций, определенных на классе всех групп. Полукоммутативным T-умножением, определенным полукоммутативным законом T, называется операция Π^0_T, которая для любого набора произвольных групп G_ν ($\nu \in I$) задается равенством $\Pi^0_T G_\nu = F/N(F)$, где $N(F)=\{[T_1(G_\nu), T_2(G_\mu)] \mid_{\nu \neq \mu,\ \nu,\ \mu \in I}\}^F$.

Через P_T будем обозначать класс всех полукоммутативных T-умножений, через $P_T\langle$II-4, III-5$\rangle$ — класс всех функторных ассоциативных операций из P_T.

Определение 1. 3. ([6]) Через $P(*)$ обозначим класс операций Морана, которые определяются функторными нормальными функциями со следующим свойством:

($*$) Для любого набора произвольных групп $G_\nu(\nu \in I)$, если $\varphi: F=\Pi^* G_\nu \to F/\Phi(F) \cap C_F$ — естественный эпиморфизм, то выполняется равенство $\Phi(F)\varphi=\Phi(F\varphi)$.

Класс операций $P(*)$ есть именно тот класс, для которого остается в силу метод Морана доказательства ассоциативности операций [14; теорема 11.7] В работе [6; предложение 3.8] автор доказал, что классы P_Φ и $P_T\langle$II-4, III-5$\rangle$ содержатся в классе операций $P(*)$ и получил ассоциативность операций из $P(*)$ как следствие из доказательства ассоциативности намного более широкого класса операций [6; теорема 4.9, теорема 4.14].

Группа $X=\prod_{i=1}^{\infty}{}^* X_i$, где $X_i=\prod_{j=1}^{\infty}{}^* \{x_{ij}\}$ ($i=1, 2, \ldots$), называется базовой группой, а любой ее элемент, записанный через x_{ij} — полисловом. Если V — любая вербальная подгруппа в X, а G — произвольная группа, то через $V(G)$ будем обозначать вербальную подгруппу группы G, определенную подгруппой V.

Мы часто используем следующее сокращение: $\langle \ldots \rangle$-операция — операция, удовлетворяющая набору постулатов, вписанных на место многоточия.

Определение 1. 4. ([1]). Каждая точная $\langle$II-2*, III-1$\rangle$-операция называется нейтральной поливербальной операцией.

Относительно способа задания поливербальных операций посредством полислов мы отсылаем читателя к работе О. Н. Головина [3].

Определение 1. 4.′ [4; 457]. Через Π^{C_0} будем обозначать нейтральную поливербальную операцию, определенную полисловом $w=[x_{11}, x_{21}, x_{31}]$, а если $F=\prod_{\nu \in I}^* G_\nu$ — любое свободное произведение, то через C_0 будем обозначать нейтральную поливербальную подгруппу группы F определенную полисловом w.

Определение 1. 5. Будем говорить, что на классе всех свободных произведений пар групп задана нормальная 2-функция N, если каждому свободному произведению $F=G_1 * G_2$ сопоставляется нормальный делитель $N(F)$ в F, причем выполнено условие

k) Если σ — подстановка на множестве $\langle 1, 2\rangle$, а H_1 и H_2 такие группы, что $H_{\sigma(i)} \cong G_i$, то существует изоморфизм φ группы F на группу $H=H_1 * H_2$ такой, что $N(F)\varphi=N(H)$ и ограничение φ на группе G_i — изоморфизм на $H_{\sigma(i)}$, $i=1, 2$.

Любая нормальная 2-функция N определяет бинарную операцию: любым двум группам G_1 и G_2 сопоставляется группа $F/N(F)$, где $F=G_1 * G_2$. С другой стороны, нетрудно заметить, что любая бинарная операция определяет нормальную 2-функцию и что эти два соответствия взаимно обратны.

Определение 1.6. [4; 457]. Если $\circ$ — бинарная точная операция, определенная нормальной 2-функцией N, то через $\Pi^{\langle C_0, \circ\rangle}$ будем обозначать операцию, заданную равенством

$$\Pi^{\langle C_0, \circ\rangle} G_\nu = F/\Phi(\circ, F),$$
$$\nu \in I$$

где $F=\Pi^* G_\nu$, а $\Phi(\circ, F)=\{N(G_\nu * G_\mu) \mid \nu \neq \mu, \nu, \mu \in I\}^F . C_0$.

Лемма 1. 7. Имеют место следующие утверждения:

l_1) Если $\circ$ — бинарная точная операция, то операция $\Pi^{\langle C_0, \circ\rangle}$ удовлетворяет постулату III-1. Если операция $\circ$ является еще и правильной, то операция $\Pi^{\langle C_0, \circ\rangle}$ вполне правильна.

l_2) Если точная операция $\circ$ удовлетворяет одному из постулатов II-1, II-2, II-2*, II-3, то и операция $\Pi^{\langle G_0, \circ\rangle}$ удовлетворяет ему.

l_3) Если $\circ$ — правильная мальцевская операция, то операция $\Pi^{\langle C_0, \circ\rangle}$ тоже будет правильной мальцевской.

l_4) Если $\circ$ — точная функторная операция, то операция $\Pi^{\langle C_0, \circ\rangle}$ удовлетворяет постулату IV-1.

Доказательство. Первые три утверждения леммы доказаны автором в работе [4; 457].

l_4) Пусть бинарная операция $\circ$ — точная функторная. По утверждениям l_1) и l_2) леммы операция $\Pi^{\langle C_0, \circ\rangle}$ удовлетворяет набору постулатов $\langle$II-4, III-1$\rangle$. Тогда, в силу теоремы 1 работы [4], для доказательства утверждения l_4) достаточно показать, что любое сложное $\Pi^{\langle C_0, \circ\rangle}$-произведение свободнее, чем соответствующее простое $\Pi^{\langle C_0, \circ\rangle}$-произведение.

Пусть $F=\Pi^* G_\nu$, $I=\bigcup_{\lambda \in J} I_\lambda$, $I_\lambda \cap I_\varkappa=\varnothing$ при $\lambda \neq \varkappa$, $\lambda, \varkappa \in J$. Пусть еще

$$\varphi: F \to R=\Pi^{\langle C_0, \circ\rangle}_{\nu \in I} G_\nu,$$

$$\psi: F \to H=\Pi^{\langle C_0, \circ\rangle}_{\lambda \in J} H_\lambda$$

(где $H_\lambda=\Pi^{\langle C_0, \circ\rangle}_{\nu \in I_\lambda} G_\nu$) — естественные эпиморфизмы. Нам достаточно доказать включение

(1) $$M=\operatorname{Ker}\varphi \supseteq \operatorname{Ker}\psi=K.$$

Из определения нашей операции мы имеем

(2) $$M=\{N(G_\nu * G_\mu) \mid \nu\neq\mu,\ \nu,\ \mu\in I\}^F . C_0.$$

Докажем сначала равенство

(3) $$K\bigcap(G_\nu * G_\mu)=N(G_\nu * G_\mu),$$

где $\nu\neq\mu$, ν, $\mu\in I$.

Если $\nu\in I_\lambda$, $\mu\in I_\varkappa$, $\lambda\neq\varkappa$, то из правильности нашей операции следует, что G_ν и G_μ являются ретрактами соответственно в H_λ и $H_\varkappa$. Учитывая то, что операция $\Pi^{<C_0,\circ>}$ удовлетворяет постулату III-1, а единичные подгруппы всегда являются ретрактами, то по лемме 9 работы [4] мы имеем $\{G_\nu, G_\mu\}_H=G_\nu\circ G_\mu$. Если ν, $\mu\in I_\lambda$, $\lambda\in J$, то аналогичными рассуждениями мы получаем опять $\{G_\nu, G_\mu\}_H=G_\nu\circ G_\mu$, т. е. равенство (3) доказано.

Из равенств (2) и (3) следует, что

(4) $$K . C_0\supseteq M.$$

Пусть $\tau_{\nu\mu}: F\to G_\nu * G_\mu$ $(\nu\neq\mu)$ — естественные гомоморфизмы проектирования. Мы уже видели, что подгруппа $G_\nu\circ G_\mu$ является ретрактом в H и поэтому $K\tau_{\nu\mu}=N(G_\nu * G_\mu)$.

Пусть элемент $f\in K . C_0$. Элемент f записывается в виде

$$f=f_{\nu_1\mu_1} f_{\nu_2\mu_2} \ldots f_{\nu_n\mu_n} . g,$$

где $f_{\nu_i\mu_i}\in[G_{\nu_i}, G_{\mu_i}]$, $i=1, \ldots, n$, а $g\in C_0$. Но тогда $f\tau_{\nu_i\mu_i}\in f_{\nu_i\mu_i}\in(K . C_0)\tau_{\nu_i\mu_i}$ $=K\tau_{\nu_i\mu_i}=N(G_{\nu_i} * G_{\mu_i})$. Следовательно, элемент f содержится в M. Таким образом, мы доказали, что $M=K . C_0$, т. е. включение (1) имеет место и утверждение l_4) доказано.

Нам понадобятся еще следующие теоремы.

1. 8. [11]. Для каждого бесконечного трансфинитного числа α существует простая группа без кручений, которая имеет мощность α.

1. 9. [9; 146]. Пусть полукоммутативный закон $T=\langle T_1, T_2\rangle$ задает умножение Π^0_T. Операция Π^0_T тогда и только тогда ассоциативна, когда для любых групп G_ν (где ν пробегает произвольное множество I) в группе $H=\Pi^T_0 G_\nu$ подгруппа $T_i(H)$ совпадает с подгруппой $\{T_i(G_\nu) \mid \nu\in I\}_H$, $i=1, 2$.

1. 10. [12; 63]. Если G — неабелева группа, а V — вербальная подгруппа базовой группы X такая, что $V(G)=1$, то Π^V — произведение двух групп, изоморфных группе G, не совпадает с прямым произведением этих групп.

1. 11. Пусть Π^0_T — любое полукоммутативное T-умножение. Если Q — любая простая группа, то Π^0_T — произведение любого числа групп, изоморфных группе Q, совпадает либо с прямым, либо со свободным произведением.

Последнее утверждение очевидно, так как подгруппа $T_i(Q)$ $(i=1, 2)$ совпадает либо с Q, либо с единичной подгруппой.

1. 12. [6]. Пусть полукоммутативный закон $T_1 = \langle T_1, T_2 \rangle$ задает функторное ассоциативное умножение Π^0_T. Мы можем считать, что $T_2(G) = G$ для каждой группы G. Тогда, если выполняется равенство $T_1(G/T_1(G)) = 1$, где G — любая группа, то операция Π^0_T совпадает с операцией Цаленко Π^{T_1}.

1. 13. [6]. Пусть полукоммутативное T-умножение Π^0_T ($T = \langle T_1, T_2 \rangle$) ассоциативно и удовлетворяет постулату II-3, а Π^Φ — операция Цаленко. Можем считать, что для каждой группы G выполняется равенство $T_2(G) = G$. Операции Π^0_T и Π^Φ совпадают тогда и только тогда, когда для каждой группы G имеют место включения

$$T_1(G) \supseteq \Phi(G) \supseteq [T_1(G), G].$$

§ 2. НЕКОТОРЫЕ ПРИМЕРЫ ФУНКТОРНЫХ АССОЦИАТИВНЫХ ОПЕРАЦИЙ

Пусть R_1 и R_2 — два класса групп, замкнутые относительно взятия подгрупп и декартовых произведений любого числа групп. Эти классы определяют соответственно нормальные функции Φ_1 и Φ_2 на классе всех групп (см. § 1). Рассмотрим произведение $R = R_1 R_2$ этих классов, т. е. класс всех групп, которые являются расширениями группы из R_1 при помощи группы из R_2. Легко видеть, что класс R тоже замкнут относительно взятия подгрупп и декартовых произведений групп. Поэтому класс R определяет нормальную функцию Φ на классе всех групп, и эта функция связана с нормальными функциями Φ_1 и Φ_2 довольно простым образом: если G — любая группа, то $\Phi(G) = \Phi_1(\Phi_2(G))$. В частности, если $\bar{V}$ является многообразием групп, соответствующим вербальной подгруппе V базовой группы X, то мы получаем следующее предложение.

Предложение 2. 1. Пусть Π^Φ — любая операция Цаленко, а V — произвольная вербальная подгруппа базовой группы X. Определим новую операцию $\Pi^{V\Phi}$, полагая

$$\Pi^{V\Phi}_\nu G_\nu = F/V(\Phi(F)) \cap C_F,$$

где $G_\nu (\nu \in I)$ — любое множество произвольных групп, а $F = \Pi^*_\nu G_\nu$. Тогда операция $\Pi^{V\Phi}$ тоже является операцией Цаленко.

Определение 2. 2. Пусть $\langle Q, Q_1 \rangle$ — пара простых неабелевых групп, причем группа Q конечна. Через $\bar{U}$ обозначим многообразие $\mathrm{var}(Q)$, а через U — вербальную подгруппу базовой группы X, соответствующую многообразию $\bar{U}$. Через Φ_i ($i = 1, 2, 3, 4$) в дальнейшем бы будем обозначать нормальные функции, определенные для каждой группы G следующим образом:

1. $\Phi_1(G)$ — минимальный нормальный делитель в группе G, содержащий все подгруппы, изоморфные или группе Q, или группе Q_1.

2. $\Phi_2(G)$ — минимальный нормальный делитель группы G такой, что фактор-группа $G/\Phi_2(G)$ не содержит подгрупп, изоморфных группе Q или группе Q_1.

3. $\Phi_3(G)=U(\Phi_1(G))$.

4. $\Phi_4(G)=U(\Phi_2(G))$.

Предложение 2.3. Нормальные функции Φ_i $(1\leqq i\leqq 4)$ являются функторными и удовлетворяют условию (*) определения 1. 3.

Доказательство. Функторность нормальных функций Φ_i очевидна. Докажем, что они удовлетворяют условию (*). Пусть $F=\prod^*_{\nu\in I} G_\nu$ — любое свободное произведение групп, а $\varphi_i: F\to F/\Phi_i(F)\cap C_F$ — естественные эпиморфизмы.

Рассмотрим сперва нормальную функцию Φ_2. Из ее определения непосредственно следует, что выполняется равенство $\Phi_2(G/\Phi_2(G))=1$ для каждой группы G. Следовательно операция Π^{Φ_2} является операцией Цаленко (см. § 1) и согласно [6; предложение 3.8] нормальная функция Φ_2 удовлетворяет условию (*) определения 1. 3. По предложению 2. 1 операция Π^{Φ_4} тоже является операцией Цаленко и поэтому Φ_4 удовлетворяет условию (*).

Рассмотрим теперь Φ_1. Используя теорему А. Г. Куроша [7; 211], легко доказать, что $\Phi_1(F)=B$, где $B=\{\Phi_1(G_\nu)\mid \nu\in I\}^F$. Пусть подгруппа A группы $\bar F=F/B\cap C_F$ изоморфна группе Q или группе Q_1, а $\pi_\mu:\bar F\to G_\nu$ — естественные проектирования. Обозначим через $<\pi_\mu\ \mu\in J>$ множество всех гомоморфизмов π_μ, ядра $\operatorname{Ker}\pi_\mu$ которых не содержат A. Так как A — неабелевая простая группа, то $\operatorname{Ker}\pi_\mu\cap A=1$, $\mu\in J$. Так как подгруппа $C_F\varphi_1$ в группе $\bar F$ является абсолютно свободной группой, то множество J непусто. Для каждого $\mu\in J$ подгруппа A изоморфна группе $A\pi_\mu$. Следовательно A содержится в подгруппе $\{A\pi_\mu\mid \mu\in J\}_{\bar F}$, последняя, очевидно, содержится в $B\varphi_1$. Но $\Phi(\bar F)=\Phi(F\varphi_1)$ порождается по определению подгруппами, изоморфными или группе Q, или группе Q_1, и поэтому мы получаем включение $\Phi_1(F\varphi_1)\subseteq B\varphi_1=\Phi_1(F)\varphi_1$. Обратное включение очевидно, т. е. мы имеем

$$\Phi_1(F)\varphi_1=\Phi_1(F\varphi_1),$$

что и является условием (*) определения 1.3.

Аналогичным образом доказывается, что $\Phi_1(F)\varphi_3=\Phi_1(F\varphi_3)$. Но тогда $U(\Phi_1(F\varphi_3))=U(\Phi_1(F)\varphi_3)=U(\Phi_1(F))\varphi_3$, т. е. $\Phi_3(F\varphi_3)=\Phi_3(F)\varphi_3$ — условие (*) выполняется для нормальной функции Φ_3.

Предложение 2. 3. доказано.

Предложение 2. 4. Пусть Φ_i $(i=1, 2, 3, 4)$ — нормальные функций соответствующие паре простых неабелевых групп $<Q, Q_1>$, где порядок Q конечен. Тогда

a. Операция Π^{Φ_1} содержится в классе $P_T<$II-4, III-5$>\backslash P_\Phi$, т. е. Π^Φ является функторным ассоциативным полукоммутативным T-умножением, но не является операцией Цаленко.

b. Операция Π^{Φ_2} содержится в классе $P_\Phi\cap P_T<$II-4, III-5$>$.

c. Операция Π^{Φ_3} содержится в классе $P(\ *\ )\backslash(P_\Phi\cup P_T<$II-4, III-5$>)$, т. е. Π^{Φ_3} является функторной операцией Морана, удовлетворяющей условию

(*) определения 1. 3, и не является ни операцией Цаленко, ни полукоммутативным-T-умножением.

d. Операция Π^{Φ_4} содержится в классе $P_\Phi \backslash P_T <$II-4, III-5$>$.

Доказательство. Согласно предложению 2.3. операции Π^{Φ_i} содержатся в классе $P(*)$. Следовательно все они являются точными функторными ассоциативными операциями [6; следствие 4. 8].

Рассмотрим полукоммутативный закон $T=<T_1, T_2>$, где $T_1=\Phi_1$, а $T_2(G)=G$ для каждой группы G. В доказательстве предложения 2. 3 мы заметили, что $T_1(F)=(T_1(G_\nu)\ \nu\in I\}^F$ для каждого свободного произведения произвольных групп $F=\Pi^* G_\nu$. Но тогда $T_1(F)\cap C_F=\{T_1(G_\nu)\ \nu\in I\}^F\cap C_F=\{[T_1(G_\nu), G_\mu]\ \nu\neq\mu,\ \nu,\ \mu\in I\}^F$, т. е. операции Π^{Φ_1} и Π^0_T совпадают.

Таким образом, мы доказали, что операция Π^{Φ_1} является полукоммутативным T-умножением.

Допустим, что некоторая операция Цаленко Π^Φ совпадает с операцией $\Pi^0_T=\Pi^{\Phi_1}$. Поскольку для каждой группы G выполняется равенство $\Phi_1(G)=[\Phi_1(G), G]$, то из теоремы 1. 13 вытекает, что нормальные функции Φ_1 и Φ совпадают.

Пусть $H=Q*K$, где K — бесконечная циклическая группа, а $\varphi: X\to Q$ — любой фиксированный эпиморфизм базовой группы X на группу Q. Пусть еще M — произвольный неединичный нормальный делитель группы H, содержащийся в подгруппе $C_H=[Q, K]$. Тогда подгруппа M свободна и имеет счетный ранг. Поэтому M изоморфна $\mathrm{Ker}\,\varphi$. Пусть $\psi: \mathrm{Ker}\,\varphi\to M$ — некоторый изоморфизм. При помощи этого изоморфизма мы отождествляем элементы подгрупп $\mathrm{Ker}\,\varphi$ и M. Пусть S — свободное произведение H и X с объединенной подгруппой $N=\mathrm{Ker}\,\varphi$. По теореме о подгруппах свободного произведения с объединенной подгруппой [15; 532] мы имеем

$$\Phi_1(S)=\{Q\}^S.$$

Но тогда фактор-группа $S/\Phi_1(S)$ изоморфна группе

$$K*(X/\mathrm{Ker}\,\varphi)\cong K*Q, \text{ т е. } \Phi_1(S/\Phi_1(S))\neq 1.$$

Последнее противоречит тому, что $\Phi_1=\Phi$ (для Φ выполняется равенство $\Phi(G/\Phi(G))=1$, где G — любая группа). Следовательно, операция Π^{Φ_1} не является операцией Цаленко.

b. Доказывая предложение 2. 3, мы показали, что Π^{Φ_2} является операцией Цаленко. Легко видеть (используя теорему А. Г. Куроша [7; 211]), что класс групп $R=<G\ \Phi_2(G)=1>$ замкнут относительно свободного произведения любого числа групп. По следствию 3.6 работы [6], операция Π^{Φ_2} содержится в классе всех функторных ассоциативных полукоммутативных T-умножений.

c. Рассмотрим операцию Π^{Φ_3}. Эта операция на двух сомножителях, изоморфных группе Q, совпадает с вербальной операцией Π^U, т. е. на них она не является ни прямым (см. предложение 1.10), ни свободным произведением. Согласно утверждению 1.11, операция Π^{Φ_3} не содержится в классе $P_T<$II-4, III-5$>$.

Допустим, что операция Π^{Φ_3} совпадает с некоторой операцией Цаленко Π^Φ. Пусть G — любая группа, а $F=G_1*G_2$, где $G_i\cong G$, $i=1, 2$.

Тогда $\Phi(F)\bigcap C_F=\Phi_3(F)\bigcap C_F\supseteqq[\Phi_3(G_1),\ F]$. Если $\pi: F\to G$ — эпиморфизм, склеянный из изоморфизмов G_i на G $(i=1, 2)$, то включение $\Phi(F)\supseteqq[\Phi_3(G_1),\ F]$ и функторность функций Φ и Φ_3 влекут за собой включение

$$\Phi(G)\supseteqq[\Phi_3(G),\ G]=[U(\Phi_1(G)),\ G]. \tag{1}$$

Рассмотрим группу S, определенную выше в доказательстве утверждения а). Допустим, что при построении этой группы подгруппа M была выбрана внутри нормального делителя $[U(Q^H),\ H]\bigcap C_H$. Тогда из включения (1) следует, что $\Phi(S)\supseteqq M$. Пусть $\tau: S\to S/\{M\}^S$ — естественный эпиморфизм. Так как подгруппы $Q\tau$ и $X\tau$ изоморфны группе Q, то подгруппа $(\{Q,\ X\}^S)\tau$ содержится в $\Phi_1(S\tau)$. Из включения (1) следует, что

$$\Phi(S\tau)\supseteqq[U(\{Q,\ X\}^S),\ S),\ S]\tau.$$

Так как $\{M\}^S=\operatorname{Ker}\tau$ содержится в $\Phi(S)$, то $\Phi(S\tau)=\Phi(S)\tau$ и поэтому мы имеем включение

$$\Phi(S)\supseteqq[U(\{Q,\ X\}^S),\ S]. \tag{2}$$

Подгруппа $[U(\{Q,\ X\}^S),\ S]$ не содержится в подгруппе $\Phi_1(S)$, так как она содержит подгруппу $[U(X),\ X]$, которая заведомо не содержится в подгруппе $\{Q\}^S=\Phi_1(S)$.

Пусть S_1 и S_2 — группы, изоморфные группе S, а $\varphi_i: S\to S_i$ $(i=1, 2)$ — некоторые фиксированные изоморфизмы. Положим $F=S_1 * S_2$. Тогда из включения (2) следует, что подгруппа $\Phi(F)\bigcap C_F$ содержит подгруппу $T=[[U(\{Q\varphi_1,\ X\varphi_1\}^{S_1},\ S_1|S_2]$. Так как $\Phi_1(F)\bigcap C_F=\{\Phi_1(S_1),\ \Phi_2(S_2)\}^F\bigcap C_F=[\Phi_1(S_1),\ S_2]^F\cdot[\Phi_1(S_2),\ S_1]^F$, а подгруппа $[U(\{Q\varphi_1,\ X\varphi_1\}^{S_1}),\ S_1]$ не содержится в $\Phi_1(S_1)$, то подгруппа T не содержится в $\Phi_1(F)\bigcap C_F$ и тем более T не содержится в $U(\Phi_1(F))\bigcap C_F=\Phi_3(F)\bigcap C_F$. Следовательно, операции Π^{Φ_3} и Π^{Φ} не могут совпадать. Полученное противоречие показывает, что операция Π^{Φ_3} не является операцией Цаленко.

d. В доказательстве предложения 2.3 мы уже показали, что операция Π^{Φ_4} является операцией Цаленко. То, что операция Π^{Φ_4} не содержится в классе $P_T<$II-4, III-5$>$, доказывается дословно так же, как и аналогическое утверждение для операции Π^{Φ_3}.

Предложение 2.4 доказано.

Следствие 2.5. Если $<Q,\ Q_1>$ — пара неабелевых простых групп, причем порядок Q конечен, то соответствующие операции Π^{Φ_i} $(i=1, 2, 3, 4)$ являются различными.

Предложение 2.6. Пусть Q — неабелева простая группа, Q_1 и Q_1 — простые группы без кручения, имеющие разные мощности, а пары групп $<Q,\ Q_1>$ и $<Q,\ \bar{Q}_1>$ задают по определению 2.2 нормальные функции Φ_i и $\bar{\Phi}_i$ $(i=1, 2, 3, 4)$ соответственно. Тогда в множестве восьми операций $<\Pi^{\Phi_i},\ \Pi^{\bar{\Phi}_i}>$ нет совпадающих.

Доказательство. Из предложения 2.4 и следствия 2.5 следует, что операция Π^{Φ_i} $(1\leqq i\leqq 4)$ могла бы совпасть только с операцией $\Pi^{\bar{\Phi}_i}$.

Без ограничения общности допустим, что $|Q_1|<|\bar{Q}_1|$. Пусть группы G_1, G_2 изоморфны группе Q_1. Тогда $\Pi^{\Phi_i}G_j=G_1\times G_2$ при $i=1, 2$, а при $i=3, 4$ мы

имеем $\Pi^{\Phi_i} G_j = \Pi^U G_j \neq G_1 * G_2$. Ясно, что группа Q_1 не содержит подгрупп, изоморфных группе Q или группе $\bar{Q}_1$. По теореме А. Г. Куроша [7; 211] мы имеем $\bar{\Phi}_i(G_1 * G_2) = 1$ и поэтому $\Pi^{\bar{\Phi}_i} G_j = G_1 * G_2$, $i = 1, 2, 3, 4$. Таким образом, операция Π^{Φ_i} не совпадает с операцией $\Pi^{\bar{\Phi}_i}$ $(1 \leqq i \leqq 4)$.

Предложение доказано.

Непосредственно из теоремы 1.8 и из предложений 2.4 и 2.6 следует

Теорема 2.7. Следующие четыре совокупности операций непусты и являются классами, а не множествами:

1. Операции Цаленко, которые не являются полукоммутативными T-умножениями, т. е. совокупность $P_\Phi \backslash P_T <$II-4, III-5$>$.

2. Операции, которые являются одновременно операциями Цаленко и полукоммутативными T-умножениями, т. е. совокупность $P_\Phi \cap P_T <$II-4, III-5$>$.

3. Полукоммутативные T-умножения, которые не являются операциями Цаленко, т. е. совокупность $P_T <$II-4, III-5$> \backslash P_\Phi$.

4. Совокупность $P(*) \backslash (P_\Phi \cup P_T <$II-4, III-5$>)$.

§ 3. ПРИМЕР НОВОЙ МАЛЬЦЕВСКОЙ ОПЕРАЦИИ

Определение 3.1. Если G — произвольная группа, то через $\pi(G)$ мы будем обозначать множество всех элементов нечетного порядка группы G.

Определение 3.2. Если G_1 и G_2 — две произвольные группы, а $F = G_1 * G_2$ — их свободное произведение, то через $T(F)$ будем обозначать нормальный делитель группы F, порожденный элементами вида

$$[[g_i, g_j], [g_i^{-1}, g_j]],$$

где $g_i \in \pi(G_i)$, $g_j \in G_j$, $i \neq j$, $i, j \neq 1, 2$.

Через $\circ \{T\}$ будем обозначать бинарную операцию, определенную равенством

$$G_1 \circ \{T\} G_2 = F/T(F).$$

Лемма 3.3. Пусть G_1 и G_2 — произвольные группы, A_1 и A_2 — любые подгруппы соответственно в G_1 и G_2. Если $F = G_1 * G_2$, $A = \{A_1, A_2\}_F = A_1 * A_2$, а $\psi: [G_1, G_2] \to [A_1, A_2]$ — эпиморфизм проектирования относительно естественного базиса в $C_F = [G_1, G_2]$, то

$$T(F)\psi = T(A). \tag{1}$$

Доказательство. Из определения нормального делителя $T(F)$ следует, что он есть нормальное замыкание в подгруппе C_F подгруппы, порожденной элементами вида

$$[[g_i, g_j]^{h_i h_j}, [g_i^{-1}, g_j]^{h_i^{-1} h_j}], \tag{2}$$

где $g_i \in \pi(G_i)$, $h_i \in G_i$, g_j, $h_j \in G_j$, $i \neq j$, $i, j = 1, 2$. Кроме того, включение $T(A) \subseteq T(F)\psi$ выполняется очевидным образом. Следовательно, для дока-

зательства леммы достаточно показать, что гомоморфизм ψ отображает элементы вида (2) в подгруппу $T(A)$. Пусть $f=[[g_1, g_2]^{h_1h_2}, [g_1^{-1}, g_2]^{h_1h_2}]$ — элемент вида (2). Покажем, что $f\psi \in T(A)$.

Применяя несколько раз тождества Холла $[xy, z]=[x, z]^y.[y, z]$ и $[x, yz]=[x, z].[x, y]^z$, мы получаем тождество

$$[x, y]^{zt}=[xz, t]^{-1}[xz, yt][z, yt]^{-1}[z, t]. \tag{3}$$

Тождество [3] дает нам возможность записать элемент f в следующем виде:

$$f=[f_1, f_2], \tag{4}$$

где
$$f_1=[g_1.h_1, h_2]^{-1}[g_1h_1, g_2h_2][h_1, g_2h_2]^{-1}[h_1, h_2],$$
$$f_2=[g_1^{-1}h_1, h_2]^{-1}[g_1^{-1}h_1, g_2h_2][h_1, g_2h_2]^{-1}[h_1, h_2].$$

Рассмотрим всевозможные случаи, которые могут встретиться.

1. Если $g_1, h_1, g_2, h_2 \in A$, то, очевидно, $f\psi=f \in T(A)$.

2. Допустим, что $g_1, h_1, h_2 \in A$, но $g_2 \overline{\in} A$. Из равенства (4) получаем
$$f\psi=[f_1\psi, f_2\psi]=[[g_1h_1, h_2]^{-1}[h_1, h_2], [g_1^{-1}h_1, h_2]^{-1}[h_1, h_2]]$$
$$=[[g_1, h_2]], [g_1^{-1}, h_2]]^a,$$
где $a=[h_2, g_1^{-1}][h_2, g_1][h_1, h_2] \in A$, т. е. $f\psi \in T(A)$.

3. Пусть $g_1, h_1 \in A$, $g_2, h_2 \overline{\in} A$, но $g_2h_2 \in A$. Тогда $f\psi=[f_1\psi, f_2\psi]$ $=[[g_1, g_2h_2], [g_1^{-1}, g_2h_2]]^{h_1} \in T(A)$.

4. Пусть $h_2 \in A$, $g_1, h_1, h_2 \overline{\in} A$. Тогда или g_1h_1, или $g_1^{-1}h_1$ не содержатся в A (в противном случае получилось бы, что $g_1^{-2} \in A$, а тогда, поскольку g_1 — элемент нечетного порядка, и $g_1 \in A$, что неверно). Следовательно, или $f_1\psi=1$, или $f_2\psi=1$, т. е. $f\psi=1 \in T(A)$.

Нетрудно установить аналогичным образом, что и во всех остальных случаях принадлежности и непринадлежности элементов g_i, h_i к группе A имеем $f\psi=1 \in T(A)$.

Таким образом, мы получили и обратное включение

$$T(F)\psi \subseteq T(A).$$

Лемма доказана.

Следствие 3.4. Пусть G_1 и G_2 — произвольные группы, а A_1 и A_2 — любые подгруппы соответственно в G_1 и G_2, $F=G_1 * G_2$, $A=\{A_1, A_2\}_F=A_1 * A_2$. Тогда выполняется равенство

$$A \cap T(F)\psi=T(A).$$

Доказательство. По лемме 3.3 мы имеем $T(F)\psi=T(A)$, где $\psi: C_F \to C_A$ — проектирование относительно естественного базиса в C_F. Так как $\psi^2=\psi$, то $A \cap T(F)=(A \cap T(F))_\psi=(C_A \cap T(F))_\psi \subseteq C_A\psi \cap T(F)_\psi=C_A \cap T(A)=T(A)$, т. е. $A \cap T(F) \subseteq T(A)$.

Из определения нормальной 2-функции T следует, что выполняется и обратное включение, т. е. $T(A)=A \cap T(F)$.

Следствие доказано.

Теорема 3.5. Бинарная операция $\circ\ \{T\}$ является точной операцией, удовлетворяющей набору постулатов <II-2, II-3*, III-1> и не удовлетворяющей постулату Маклейна II-2*.

Доказательство. Так как $T(G_1 * G_2)$ содержится во взаимном коммутанте $[G_1, G_2]$ и не зависит от нумерации множителей G_1 и G_2, то операция $\circ\ \{T\}$ является точной правильной <III-1>-операцией.

Если $\varphi: F=G_1 * G_2 \to H=H_1 * H_2$ — гомоморфизм, склеенный из гомоморфизмов множителей, то очевидно, что $T(F)_\varphi \subseteq T(H)$, т. е. операция $\circ\ \{T\}$ удовлетворяет постулатам II-2 и II-3.

По следствию 2.4 операция $\circ\ \{T\}$ удовлетворяет постулату Мальцева II-3*.

На классе абсолютно свободных групп операция $\circ\ \{T\}$ совпадает со свободным умножением. Но каждая группа является эпиморфным образом подходящей свободной группы. Поэтому, если операция $\circ\ \{T\}$ удовлетворяла бы постулату Маклейна II-2*, то она совпадала бы со свободным умножением, что неверно.

Теорема доказана.

Следствие 3.6. Операция $\Pi^{<C_0, \circ\{T\}>}$ является точной неассоциативной операцией, удовлетворяющей набору постулатов <II-2, II-3*, III-1, IV-1> и не удовлетворяющей постулатов Маклейна II-2*.

Доказательство. Пусть A, B и C — произвольные неединичные группы без кручения, а $G=A<C_0, \circ\ \{T\}>B<C_0, \circ\ \{T\}>C$, $H=(A<C_0, \circ\ \{T\}>B)<C_0, \circ\ \{T\}>C=A * B * C$.

Если $1 \neq a \in A$, $1 \neq b \in B$ и $1 \neq c \in C$, то в группе G выполняется соотношение $[a, b, c]=1$, т. е. G не является свободным произведением групп A, B и C. Следовательно, группы G и H не являются естественно изоморфными, т. е. операция $\Pi^{<C_0, \circ\{T\}>}$ — неассоциативна. Остальные свойства нашей операции следуют непосредственно из теоремы 2.5 и из леммы 1.7.

Теорема 3.7. Из набора постулатов <II-2, II-3*, III-1. IV-1> не следует постулат Маклейна II-2*.

Доказательством этого результата служит операция $\Pi^{<C_0, \circ\{T\}>}$, свойства которой мы указали в предшествующем следствии.

ЛИТЕРАТУРА

1. Бронштейн, М. А.: О точных операциях на классе групп. Сиб. матем. журнал, VII (1966), № 6, 1250 — 1258.
2. Головин, О. Н.: Функторные операции на классе всех групп. Докл. АН СССР, 149 (1963), № 1, 12 — 15.
3. Головин, О. Н.: Политождественные соотношения в группах и определяемые ими операции на классе всех групп. Труды Моск. матем. о-ва, 12 (1963), 413—435.
4. Генов, Г. К.: Новые семейства мальцевских операций. Матем. сб., 77 (119), (1968), № 3, 437 — 460.
5. Генов, Г. К.: К теории операций на классе всех групп. Труды Моск. матем. о-ва, 25 (1971), 59 — 82.
6. Генов, Г. К.: Ассоциативные функторные операции на классе групп. Труды Моск. матем. о-ва (в печати).

7. Курош, А. Г.: Теория групп. М., 1967, 3.
8. Нейман, Х.: Многообразия групп., М., 1969.
9. Фридман, М. А.: Условие ассоциативности полукоммутативного умножения любого множества групп. Уч. зап. Глазовск. пед. и-та, 3 (1956), 143 — 148.
10. Фридман, М. А.: О полукоммутативных умножениях. Докл. АН СССР, 109 (1956), № 4, 710 — 712.
11. Цаленко, М. Ш.: Несколько замечаний о бесконечных группах. Сиб. матем. журнал, 4 (1963), № 1, 227 — 231.
12. Цаленко, М. Ш.: Правильные операции в категориях, индуцированных рефлективными подкатегориями. Math. Nachr., 47 (1970), № 1 — 6, 47 — 67.
13. Moran, S.: Associative operations on groups 1. Proc. London Math. Soc. 6 (1956), No. 24, 581—596,
14. Moran, S.: Associative operations on groups 3. Proc. London Math. Soc; 3 (1956), No. 9, 287—317.
15. Neuman, H.: Generalized free products with amalgamated subgroups. Amer. J. Math. 71 (1949), No. 3, 491 — 540.

Постъпила на 14. XII. 1974 г.

SOME EXAMPLES OF EXACT OPERATIONS ON A CLASS OF GROUPS

G. K. Genov

(SUMMARY)

A normal function Φ on class of groups is called a mapping with the following properties: for every group G $\Phi(G)$ is a normal subgroup of G such that $\Phi(G)\varphi=\Phi(G\varphi)$ for every isomorphism φ.

Let R be a class of groups. We denote by SR the class of subgroups of groups in R and by CR the class of cartesian products of groups in R. If $SR\subseteq R$ and $CR\subseteq R$ then the normal function Φ_R corresponds to the class R: $\Phi_R(G)$ is a minimal normal subgroup of G such that $G/\Phi_R(G)\in R$. Then an operation of Calenko is defined by

$$\prod_{\nu\in I}{}^{\Phi_R} G_\nu = F/\Phi_R(F)\bigcap C_F,$$

where $F=\Pi^* G_\nu$ is a free product of groups $G_\nu(\nu\in I)$ and $C_F=[G_\nu,\ \nu\in I]^F$ is a cartesian subgroup of F. We denote the class of all operations of Calenko by P_Φ.

A semi-commutative operation Π^0_T is defined as follows:

$$\prod_{\nu\in I}{}^{0}_{T} G_\nu = F/N(F),$$

where $T=\langle T_1,\ T_2\rangle$ are two normal functions, and $N(F)$ is a normal subgroup of $F=\Pi^* G_\nu$ generated by subgroups $[T_1(G_\nu),\ T_2(G_\mu)]$, $\mu\neq\mu$, ν, $\mu\in I$.

The class of all functor associative semi-commutative operations is denoted P_T<II-4, III-5>.

The main result of this paper is the following theorem.

Theorem. The following three families of operations:

$$P_\Phi \cap P_T\langle \text{II-4, III-5}\rangle,\ P_\Phi \backslash P_T\langle \text{II-4, III-5}\rangle \text{ and } P_T\langle \text{II-5}\rangle \backslash P_\Phi$$

are classes but not sets.

An example of new Mal'cev's operation is also constructed in the present paper.