НАДЕЖНОСТЬ СТАРЕЮЩИХ СИСТЕМ

Светлозар Т. Рачев

§ 1. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПОНЯТИЯ „СТАРЕЮЩАЯ СИСТЕМА"

Элемент E называется стареющим, если его продолжительность жизни ξ — неотрицательная случайная величина с ВФИ-распределением $F(t)$, т. е. функция „интенсивность отказов"

$$Q(t,\ x)=P(\xi<t+x/\xi\geqq t)=\frac{F(t+x)-F(t)}{1-F(t)}$$

неубывающая по t при каждом фиксированном неотрицательном x.

Функция $P(t)=P(\xi>t)$ называется надежностью элемента E в момент t.

Согласно теореме 4.1. [1] распределение $F(t)$ является ВФИ (стареющим), тогда и только тогда, когда функция $f(t)=-\lg P(t)$ выпукла на $[0,\ \infty)$.

Пусть $E=(E_1,\ E_2,\ldots,\ E_n)$ система с элементами E_i с продолжительностью жизни ξ_i, $i=1,\ldots,\ n$. Продолжительностью жизни систем E будем называть n-мерную случайную величину $\xi=(\xi_1,\ldots,\ \xi_n)$.

Определение 1. Систему E будем называть стареющей, если ξ имеет функцию распределения $F(x)$ такую, что функция $f(t)=-\lg P(t)$ выпукла на R^n_+; соответственно ξ будем называть стареющей случайной величиной, $F(t)$ — стареющим распределением. Будем обозначать через $\varepsilon^{(n)}$ класс стареющих систем $E^n=(E_1,\ldots,\ E_n)$, через $\chi^{(n)}$ — класс подобных (равнораспределенных) n-мерных случайных величин $\xi^{(n)}=(\xi_1,\ldots,\ \xi_n)$, $\mathbf{F}^{(n)}$ — класс стареющих распределений F на R^n_+.

В качестве примера стареющей системы можем рассмотреть систему, состоящую из стареющих элементов, которые отказывают независимо друг от друга.

В дальнейших рассмотрениях не будем нуждаться в понятии независимости элементов в системе.

§ 2. ОПИСАНИЕ СТАРЕЮЩИХ СИСТЕМ

Пусть $P(t)$ функция на R^n_+. Определим функцию множеств $\mu(I_{[a,\ b)})$, где $I_{[a,\ b)}$ интервал в R^n_+:

$$\mu(I_{[a,\ b)})=\Delta^1_{[a^1,b^1)}\ldots\Delta^n_{[a^n,b^n)}P(t), \tag{2.1}$$

где $\Delta^k_{[a,b)} G(t) = G(t^1, \ldots, t^{k-1}, a, t^{k+1}, \ldots, t^n) - G(t^1, \ldots, t^{k-1}, b, t^{k+1}, \ldots t^n)$.

Теорема 2.1. Пусть $f(t)$ — неотрицательная выпуклая для $t \in R^n_+$ функция, $f(0, \ldots, 0) = 0$, но проекции $f(0, \ldots t_i, \ldots, 0)$, $i = 1, \ldots, n$, не аннулируются тождественно. Определяем, функции

$$P(t) = \exp(-f(t)) \tag{2.2}$$

и $\mu(I_{[a,b)})$ через (2.1). Если

$$\mu(I_{[a,b)}) \geqq 0 \tag{2.3}$$

для всех $[a, b) \subset R^n_+$, то существует единственная вероятностная мера μ на B^n (борелевская σ-алгебра) такая, что $\mu(I_{[t,\infty)}) = P(t)$.

Функция распределения

$$F(t) = \mu(I_{(-\infty, t]}) = P(\xi < t) \tag{2.4}$$

принадлежит классу $\mathbf{F}^{(n)}$ и определенная через $F(t)$ случайная величина ξ принадлежит $\chi^{(n)}$.

Доказательство. Достаточно установить, что $P(t) = \exp(-f(t))$ имеет свойства:

(1) $0 \leqq P(x) \leqq 1$;

(2) если $x \leqq y$, то $P(x) \geqq P(y)$;

(3) $\mu[a, b) \geqq 0$, где $\mu[a, b) = \mu(I_{[a,b)})$ определяются (2.1.);

(4) $P(t-0) = P(t)$;

(5) $P(t) \to 0$, если хотя бы одна из координат точки t стремится к бесконечности;

(6) $P(-\infty, \ldots, -\infty) = 1$.

Условия (1), (2), (3), (6) следуют из представления $P(t) = \exp(-f(t))$ Полагая $f(t) = 0$ для $t \in R^n_+$, т. е. $P(t) = 1$ для $t \in R^n_+$, и используя теорему 10.1. [2], получаем, что $P(t)$ непрерывна для $t \in R^n$.

Из теоремы 7.5. [2] следует, что функция

$$g_i(t_i) = \inf_{j, j \neq i} f(t_1, \ldots, t_n) = f(0, \ldots, t_i, \ldots, 0) \tag{2.5}$$

выпукла. Следовательно, для каждого $i = 1, \ldots, n$ существует положительная граница

$$0 < \lim_{t_i \to \infty} \frac{g_i(t_i)}{t_i} \leqq \infty \tag{2.6}$$

и $\alpha_i > 0$ такие, что $g_i(t_i) \geqq \alpha_i t_i$ для достаточно большого t_i.

Из (2.6) следует верность неравенства:

$$f(t_1, \ldots, t_n) \geqq \alpha_i t_i \tag{2.7}$$

для произвольных неотрицательных $t_1, \ldots, t_{i-1}, t_{i+1}, \ldots, t_n$ и достаточно больших t_i. Из (2.7) следует, что $f(t) \to \infty$, когда $t_i \to \infty$, для $i=1, \ldots, n$, откуда следует условие (5).

Случайная величина ξ, определенная (2.4) с точностью до подобия, согласно (2.2) стареющая.

Теорема 2.1 определяет однозначное обратимое соответствие между классом $\varepsilon^{(n)}$ и $V^{(n)}$ — классом выпуклых неотрицательных функций на R^n_+, таких, что $f(0, \ldots, 0)=0$, $f(0, \ldots, t_i, \ldots, 0) \not\equiv 0$ для $i=1, \ldots, n$; $\mu(I_{[a,b)}) \geqq 0$, где $\mu(I_{[a,b)})$ определяется из (2.1). Тогда возможные операции в $V^{(n)}$ можно перенести в $\varepsilon^{(n)}$, $\chi^{(n)}$ и $\mathbf{F}^{(n)}$.

Пусть $P(t)$ функция надежности стареющего распределения F. Следовательно, $P(t)$ имеет представление (2.2) и удовлетворяет неравенство (2.3).

Отметим через $\mathbf{P}^{(n)}$ класс всех $P(t)$, имеющих представление (2.2). Следовательно, $P(t)$ удовлетворяет условиям от (1) до (6) за исключением (3).

Из теории выпуклого анализа известно, что в множестве выпуклых функций на R^n можно ввести восемь естественных реляций, относительно которых оно замкнуто и каждую другую реляцию в нем можно описать этими восьмью. Вид этих реляций описан в § 5, гл. I [2]. Нетрудно увидеть, что множество $V^{(n)}$ замкнуто относительно этих операций. Перебросив операции в $P^{(n)}$, получаем теорему:

Теорема 2.2. Класс $P^{(n)}$ замкнут относительно операций:

$$P^{(1)}(t)=P_1(t) \ldots P_m(t); \quad t \in R^n_+;$$

$$P^{(2)}(t)=\sup\{P_1(t_1) \ldots P_m(t_m)/t_i \in R^n_+, \ t_1+ \ldots +t_m=t\};$$

$$P^{(3)}(t)=\sup\{P_1^{\lambda_1}(t_1) \ldots P_m^{\lambda_m}(t_m)/\lambda_1 t_1+ \ldots +\lambda_m t_m=t\};$$

$$P^{(4)}(t)=\sup\{\min\{P_1(t_1), \ldots, P_m(t_m)\}/t_1+ \ldots +t_m=t\};$$

$$P^{(5)}(t)=\sup\{P_1^{\lambda_1}(\lambda_1^{-1}t) \ldots P_m^{\lambda_m}(\lambda_m^{-1}t)/\lambda_i \geqq 0, \lambda_1+ \ldots +\lambda_m=1\};$$

$$P^{(6)}(t)=\sup\{\min\{P_1^{\lambda_1}(\lambda_1^{-1}t), \ldots, P_1^{\lambda_m}(\lambda_m^{-1}t);$$

$$P^{(7)}(t)=\sup\{\min\{P_1^{\lambda_1}(t_1), \ldots, P_m^{\lambda_m}(t_m)\}\},$$

причем верхняя грань берется по всем направлениям t вида

$$t=\lambda_1 t_1+ \ldots +\lambda_m t_m;$$

$$P^{(8)}(t)=\inf\{P_i(t), \ i \in I\},$$

где I — множество с произвольной мощностью; эти операции описывают все возможные операции в $\mathbf{P}_{(n)}$.

Следствие. Так как $P^{(1)}$ совокупность функций надежности стареющих случайных величин, то теорема 2.2 в одномерном случае дает описание функций надежности стареющих распределений. Или из $F(x)=1-P(x)$ и теоремы 4.1 [1], следует, что теорема 2.2 дает описание ВФИ распределений.

Теорема 2.3. Если система $E^{(n)}=(E_1, \ldots, E_n)$ стареющая, то каждая ее подсистема $E^{(m)}=(E_{n_1}, \ldots, E_{n_m})$, $1 \leqq m \leqq n$, стареющая.

Доказательство. Пусть $E^{(n)} \in \mathcal{E}^{(n)}$ имеет продолжительность жизни $\xi \in X^{(n)}$ с функцией надежности $P(t)=\exp(-f(t))$ и линейное преобразование „проекция" $A: R_+^n \to R_+^m$. Следовательно, функция

$$g(t_1, \ldots, t_m)=\inf_{t_{m+1}, \ldots, t_n} f(t_1, \ldots, t_m, t_{m+1}, \ldots, t_n)=f(t_1, \ldots, t_m, 0, \ldots, 0)$$

выпукла на R_+^m. Положим $Q(t_1, \ldots, t_m)=\exp(-g(t_1, \ldots, t_m))$. Тогда функция $Q(t_1, \ldots, t_m)=P(\xi_1>t_1, \ldots, \xi_m>t_m, \xi_{m+1}>0, \ldots, \xi_n>0)$ является функцией надежности случайного вектора $(\xi_1, \ldots, \xi_m) \in X^m$. Следовательно, система $E^m=(E_1, \ldots, E_m)$ стареющая.

Следствие. Если $F \in \mathbf{F}^{(n)}$, то существуют все смешанные моменты.

Доказательство. Пусть F — функция распределения стареющей случайной величины $\xi=(\xi_1, \ldots, \xi_n)$. Согласно теореме 2.3 случайные величины $\xi_1, \ldots, \xi_n$ — стареющие. Из леммы 4.2 [1] следует существование моментов $E\xi_j^k$ для всех $j=1, \ldots, n$; $k=1, 2 \ldots$ Следовательно, смешанные моменты

$$\mu_{k_1, \ldots, k_n}=E\xi_1^{k_1} \ldots \xi_n^{k_n}$$

существуют.

§ 3. НАДЕЖНОСТЬ СТАРЕЮЩИХ СИСТЕМ

Если в системе $E=(E_1, \ldots, E_n)$ элементы E_i начали функционировать в момент $t_i=0$ и не отказали до момента $t_i=T_i$, то будем говорить, что E работала безотказно до момента $T=(T_1, \ldots, T_n)$. Вероятность $R(T, x)$ события, чтобы система E работала еще время $x=(x_1, \ldots, x_n) \in R_+^n$ имеет представление, $R(T, x)=P(\xi>T+x \mid \xi>T)=P(T+x)\, P(T)$.

Определение 2. Вероятность $q(t, x)$ события отказа хотя бы одного элемента E_i в интервале $[t_i, t_i+x_i)$ при условии, что система E функционировала до момента t будем, называть интенсивностью отказов в системе E.

$$q(t, x)=1-R(t, x)=\frac{P(t)-P(t+x)}{P(t)}. \tag{3.1}$$

Определение 3. Распределение $F(t)$, $t \in R_+^n$ с функцией надежности $P(t)$ будем называть ВФИ распределением, если его интенсивность отказов $q(t, x)$ не убывает для каждого фиксированного $x \in R_+^n$, когда $t_1, \ldots, t_n$ возрастают.

Теорема 3. 1. Если функция распределения $F(x)$, $x \in R_+^n$, имеет непрерывные частные производные, то необходимым и достаточным условием для $F \in \mathbf{F}^{(n)}$ является возрастание функции $q(a+st, \lambda t)$ по s при $\lambda>0$ достаточно малом, где $\bar{o} \neq a \in R_+^n$, $t \in R_-^n$, $s \in I$ (I — открытый интервал).

Доказательство.

Необходимость. Пусть $a \in \operatorname{Int} R^n_+$, $t \in R^n_-$, и I — открытый интервал, такой, что $x=a+st$ принадлежит R^n_+ для всех $s \in I$.

Для $\lambda>0$ интенсивность отказов $q(x, \lambda t)$ имеет вид

$$q(x, \lambda t)=1-\exp\{-[f(x+\lambda t)-f(x)]\}. \tag{3.2}$$

Так как $f(x)$ выпукла на R^n_+, то функция $\Phi(s)=f(a+st)$ выпукла на $s \in I$. Следовательно, ее производная

$$\Phi'(s)=(\nabla f(x), t)=\lim_{\lambda \downarrow 0} \frac{f(x+\lambda t)-f(x)}{\lambda} \tag{3.3}$$

возрастает, когда $s \in I$.

Из (3.3) следует существование $\delta>0$, такого, что для $\lambda<\delta$ разность $f(x+\lambda t)-f(x)$ возрастающая функция по s, где $x=a+st$. Но равенство (3.2) показывает, что $q(a+st, \lambda t)$ возрастающая по s при $\lambda<\delta$.

Достаточность. Пусть $a, b \in \operatorname{Int} R^n_+$, $t=b-a \in R^n_-$ (если $b-a \in R^n_-$, то полагаем $t=a-b$), тогда $x=a+st \in R^n_+$ для $s \in I=\{-\varepsilon<s<1+\varepsilon\}$.

Из $q(a+st, \lambda t)$, возрастающей по $s \in I$ для $0<\lambda<\delta$, где δ — достаточно маленькое, и представления (3.2) и (3.3) следует, что функция $\Phi(s)=f(a+st)$ выпукла в I. Отметим сейчас, что

$$s=(1-s).0+s.1, \quad a+st=(1-s)a+sb,$$

$$\Phi(0)=f(a), \quad \Phi(1)=f(b).$$

Отчитывая эти соотношения и из неравенства

$$(1-s)\Phi(0)+s\Phi(1) \geqq \Phi((1-s).0+s.1)$$

получаем неравенство

$$(1-s)f(a)+sf(b) \geqq f((1-s)a+sb),$$

которое устанавливает выпуклость $f(x)$.

Функция интенсивность отказов $q(t, \Delta t)$ определяла вероятность события: отказ хотя бы одного элемента E_i в интервале $[t_i, t_i+\Delta t_i)$ при условии, что система E работала безотказно до момента t. Используя равенство

$$q(t, x)=1-\exp\{-[f(t+x)-f(t)]\} \tag{3.4}$$

для $q(t, x)$, получаем представление

$$q(t, \Delta t)=(\nabla f(t), \Delta t)+0(\Delta t); \tag{3.5}$$

$$\nabla f(t)=\left(\frac{\partial f}{\partial t_1}(t), \ldots, \frac{\partial f}{\partial t_n}(t)\right), \quad t \in R^n_+.$$

Определение 4. Векторную функцию $\chi(t)=\nabla f(t)$, выражающую условную вероятность отказа хотя бы одного из элементов E_i в момент

t_i, при условии, что до $t=(t_1, \ldots, t_n)$ система E функционировала безотказно, будем называть **опасностью отказа в момент** t.

Из $f(t)=-\lg P(t)$ следует представление:

$$\lambda(t)=\nabla f(t)=-\frac{\nabla P(t)}{P(t)}. \tag{3.6}$$

Теорема 3. 2. Если функция распределения $F(t)$ имеет непрерывные частные производные до второго порядка, то $F(t) \in \mathrm{F}^{(n)}$ тогда и только тогда, когда квадратичная форма

$$\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial t_j} \lambda_i(t) \xi_i \xi_j \tag{3.7}$$

неотрицательна, где $\lambda_i(t)$ — i-тая компонента $\lambda(t)$.

Теорема 3.3. Если функция распределения $F(t)$ имеет непрерывные частные производные до второго порядка, то $F(t)$ является ВФИ-распределением, если для каждого $i=1, \ldots, n$ компонент $\lambda_i(t)$ вектора $\lambda(t)$ возрастает по t_i при фиксированных t_j, $j \neq i$.

Доказательство следует из представления (3. 4) и

$$f(t+x)-f(t)=\sum_{i=1}^{n} \int_{t_i}^{t_i+x_i} \lambda_i(t_1, \ldots, t_{i-1}, y_i, t_{i+1}+x_{i+1}, \ldots, t_n+x_n)\, dy_i.$$

Следующие две теоремы дают возможность оценивать функцию надежности произвольного стареющего распределения через

$$Q(t)=\exp(-(c, t)), \quad c \in R_+^n$$

функцию надежности экспоненциального распределения.

Теорема 3.4. Если распределение $F(t)$ имеет опасность отказа $\lambda(t)$ и $\bar{\mu}=(\mu_1^{(1)}, \ldots, \mu_1^{(n)})$ — вектор с компонентами — средними значениями

$$\mu_1^{(i)}=\int_{R_+^n} x_i\, dF(x),$$

то в силе неравенства

$$P(t) \geqq P(\bar{\mu}) \exp(\lambda(t), \mu-t), \tag{3.8}$$

$$P(t+\mu) \leqq P(\bar{\mu}) \exp[-(\lambda(t), \mu-t)]. \tag{3.9}$$

Доказательство. Для выпуклой функции $f(x)=-\lg P(x)$ на R_+^n известно (т. 23. 1 [2]), что отношение,

$$\frac{1}{k}(f(t+kx)-f(t)) \tag{3.10}$$

возрастающая функция по $k>0$ для каждого фиксированного x.

Отметим, что если $0<k\leqq 1$, из монотонности (3.10) следует неравенство

$$P(t+x)\leqq P(t+kx)^{\frac{1}{k}}\cdot P(t)^{1-\frac{1}{k}}. \tag{3.11}$$

Используя неравенство (т. 25.1 [2])

$$f(t+kx)\geqq f(t)+(\nabla f(t),\ kx),$$

получаем оценку

$$P(t+x)\leqq P(t)\exp[-(\lambda(t),\ kx)].$$

Полагая $x=\bar{\mu}-t$, получаем (3.8), а если $x=\bar{\mu}$, имеем (3.9).

Следствие 1. Для функции надежности $P(t)$ верна следующая оценка снизу:

$$P(t)\geqq\exp(-1+(\lambda(x),\ \mu-t)), \tag{3.12}$$

причем равенство достигается в экспоненциальном случае.

Доказательство. Из многомерного аналога неравенства Йенсена $Ef(\xi)\geqq Ef(\mu)$ и равенства $Ef(\xi)=1$ получаем неравенство

$$P(\bar{\mu})\geqq\exp(-1). \tag{3.13}$$

Из (3.8) и (3.13) следует (3.12).

Равенство в (3.12) достигается в экспоненциальном случае, $P(t)=\exp(-(\lambda,\ t))$, где $\lambda\in R^n_+$.

Следствие 2. Если $t\leqq k\mu$, $0<k\leqq 1$, то

$$P(t)\geqq\exp(-k). \tag{3.14}$$

Доказательство. В (3.11) полагаем $t=0$, $x=\bar{\mu}$ и используя (3.13), имеем неравенство $P(k\bar{\mu})\geqq\exp(-k)$. Имея в виду монотонность $P(t)$, получаем (3.14).

Теорема 3.5. Если функция распределения $F(x)\in\mathrm{F}^{(n)}$ и

$$\mu=\int\limits_{R^n_+}x_1\ \ldots\ x_n\,dF(x),$$

то

$$P(t)\leqq\begin{cases}1 & \text{при } t \text{ таком, что } \prod\limits_{i=1}^{n}t_i\leqq\mu,\\ \exp[-(\omega,\ t)] & \text{при } t \text{ таком, что } \prod\limits_{i=1}^{n}t_i>\mu,\end{cases}$$

где $\omega\in R^n_+$ зависит от t и удовлетворяет условию

$$\int\limits_0^t\exp[-(\omega,\ x)]\,dx=\mu.$$

Доказательство аналогично одномерному случаю, рассмотренному в [1, с. 49].

На основе однозначно-обратимого соответствия между классами $\varepsilon^{(n)}$ и $V^{(n)}$ можно поставить задачи надежности стареющих систем и обыкновенных выпуклых программ.

Обыкновенной выпуклой программой [гл. IV, § 28 [2]] называется задача следующего вида: минимизировать $f_0(t)$ на множестве всех $t \in C$, удовлетворяющих дополнительным ограничениям

$$f_1(t) \leqq 0, \ldots, f_r(t) \leqq 0, f_{r+1}^{(t)} = 0, \ldots, f_m(t) = 0,$$

где C — непустое выпуклое множество на R^n, f_i — конечные выпуклые на C при $i=0, 1, \ldots, r$ и афинные функции на C при $i=r+1, \ldots, m$.

В качестве аналога в $\varepsilon^{(n)}$ обыкновенной выпуклой программы представим следующую задачу:

Пусть системы $E_1, \ldots, E_m \in \varepsilon^{(n)}$ имеют функции надежности $P_1(t), \ldots, P_m(t)$, где $t \in R_+^n$ и функция $f_0(t)$ — выпукла на R_+^n, выражает „расходы" при безотказной работе систем.

Ищем $\min f_0(t)$ для x, принадлежащих $[0, T_0) \subset R_+^n$ и таких, что выполнены неравенства

$$P_1(t) \geqq p_1, \ldots, P_m(t) \geqq p_m,$$

где $0 \leqq p_i \leqq 1$, $i=1, 2, \ldots, m$.

Очевидно эта задача сводится к обыкновенной выпуклой программе, для которой $r=m$.

Автор выражает свою глубокую благодарность научному руководителю настоящей работы А. Обретенову.

ЛИТЕРАТУРА

1. Барлоу, Р., Прошан, А.: Математическая теория надежности. Москва, 1969.
2. Рокафеллар, Р.: Выпуклый анализ. Москва, 1973.

Постъпила на 20. I. 1975 г.

RELIABILITY OF AGEING SYSTEMS

S. T. Ratchev

(SUMMARY)

Let $E=(E_1, \ldots, E_n)$ be a system with elements E_i with life-length the random variables ξ_i, $i=1, \ldots, n$. The random vector $\xi=(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ denotes the life-length of E. The system E is ageing, if ξ has a reliability function $P(t)=P(\xi>t)$, such that $f(t)=-\lg P(t)$ is convex in R_+^n. A descrip-

tion of the ageing systems is given in paragraph 2. The following properties have been proved:

if a system is ageing, every subsystem of it is ageing;

all the expectations of the random vector are bounded.

The system E has an increasing hazard rate, if the function

$$q(t, x)=\frac{P(t)-P(t+x)}{P(t)},$$

$x \in R_+^n$ is fixed, is not decreasing if t increases. In paragraph 3 are shown: the connection between ageing and increasing hazard rate systems; estimates for $P(t)$; a connection between problems of reliability of systems and simple convex programmes.