ИНТЕГРАЛНИ ФОРМУЛИ ОТ КРОФТОНОВ ТИП ЗА КРИВА И СЪВКУПНОСТИ ОТ ПРАВИ, ПРЕСИЧАЩИ КРИВАТА. II

Адриян В. Борисов

В [1] в n-мерното евклидово пространство E_n дефинирахме $(n-1)$-параметричните съвкупности K^m_{n-1} $(m=1, \ldots, n)$ от прави, пресичащи n-кратно гладка крива c и лежащи в съответните ѝ координатни хиперравнини с нормални вектори t_m. За случаите $m=1$, $n-1$, n намерихме интегрални формули от Крофтонов тип, които изразяват интегралните мерки на съвкупностите от прави K^1_{n-1}, K^{n-1}_{n-1} и K^n_{n-1} посредством инварианти на кривата c. Естествено възниква задачата за намирането на подобни формули за $1<m<n-1$. В настоящата статия решаваме именно тази задача. Следователно тя се явява продължение на [1], поради което ще използуваме въведените там понятия и означения.

Да разгледаме n-кратно гладката крива c, с всяка точка на която по познат начин [2] е свързан десен ортонормален репер $xt_1 \ldots t_n$. Тогава за кривата c са в сила следните формули на Френе:

$$\frac{dt_1}{ds}=k_1t_2,$$

$$\frac{dt_v}{ds}=-k_{v-1}t_{v-1}+k_vt_{v+1}, \qquad (v=2, \ldots, n-1), \tag{1}$$

$$\frac{dt_n}{ds}=-k_{n-1}t_{n-1}.$$

С всяка права $g \in K^m_{n-1}$ свързваме десен ортонормален репер $ye_1 \ldots e_n$, за който

$$\text{а)}\quad y=x,\ e_1=t_m, \qquad \text{б)}\quad y \in g,\ e_n \in g. \tag{2}$$

Нека деривационните уравнения са

$$dy=\omega^ie_i,\ de_i=\omega_i^ke_k, \tag{3}$$

като Пфафовите форми ω^i, ω_i^k удовлетворяват структурните уравнения

(4) $$D\omega^i = \omega^k \wedge \omega_k{}^i, \quad D\omega_i{}^j = \omega_i{}^k \wedge \omega_k{}^j$$

и равенствата

(4') $$\omega_i{}^i = 0, \quad \omega_i{}^k = -\omega_k{}^i.$$

Тук и навсякъде по-нататък, където е възможно и не води до неясноти, използуваме сумиране по Айнщайн, като индексите вземат следните значения:

$$i,\ j,\ k = 1, \ldots, n, \qquad \varepsilon = 1, \ldots, m-1,$$

$$\alpha,\ \beta = 2, \ldots, n, \qquad \lambda = 1, \ldots, m-2,$$

$$p, q = 1, \ldots, n-1, \quad \delta = m+1, \ldots, n,$$

$$u,\ v = 2, \ldots, n-1, \quad \rho = m+1, \ldots, n-1.$$

Образуваме външната диференциална форма

(5) $$dK^m_{n-1} = \bigwedge_q \omega^q_n \ .$$

Тя е инвариантна относно групата на движенията в E_n. Ще покажем, че тя не зависи и от избора на репера $ye_1 \ldots e_n$.

Нека $\bar{y}\ \bar{e}_1 \ldots \bar{e}_n$ е друг ортонормален репер, удовлетворяващ (2). Очевидно

$$\bar{y} = y, \quad \bar{e}_1 = e_1,$$

$$\bar{e}_u = A^v_u e_v, \quad \bar{e}_n = \mu e_n, \quad \mu = \pm 1,$$

където (A^v_u) е $(n-2)\times(n-2)$ ортогонална матрица. Тогава

$$\bar{\omega}^1_n = \mu \omega^1_n \ ,$$

$$\bar{\omega}^u_n = \bar{e}_u d\bar{e}_n = (A^v_u e_v)(\mu de_n) = \sum_v \mu A^v_u \omega^v_n \ .$$

Следователно

$$\bigwedge_q \bar{\omega}^q_n = \mu \omega^1_n \wedge \bigwedge_u \Big(\sum_v \mu A^v_u \omega^v_n\Big) = \mu^2 \det(A^v_u) \bigwedge_q \omega^q_n \ .$$

Получихме, че

$$\bigwedge_q \bar{\omega}^q_n = \pm \bigwedge_q \omega^q_n \ ,$$

което показва, че формата $\bigwedge_q \omega^q_n$ се различава най-много със знак от тази при друг репер. Това обаче е без значение, защото при изчисляване на плътностите и мерките се взема абсолютната стойност на разглежданите форми.

В точката $x = y$ имаме два ортонормални репера $xt_1 \ldots t_n$ и $ye_1 \ldots e_n$. Нека трансформационните формули имат вида

$$e_1 = t_m,$$

(6)

$$e_\alpha = a_\alpha^\varepsilon t_\varepsilon + a_\alpha^\delta t_\delta$$

и

$$t_\varepsilon = \sum_\alpha a_\alpha^\varepsilon e_\alpha,$$

(7)

$$t_m = e_1,$$

$$t_\delta = \sum_\alpha a_\alpha^\delta e_\alpha,$$

като трансформационната матрица е ортогонална и детерминантата й е равна на + 1.

От (6) посредством диференциране получаваме равенството

(8) $$de_n = da_n^\varepsilon . t_\varepsilon + da_n^\delta . t_\delta + a_n^\varepsilon . dt_\varepsilon + a_n^\delta . dt_\delta,$$

което, съобразено с (1) и (7), приема вида

(9)

$$de_n = (a_n^{m-1} k_{m-1} - a_n^{m+1} k_m) ds . e_1 + \sum_v \left(\sum_\varepsilon a_v^\varepsilon . da_n^\varepsilon + \sum_\delta a_v^\delta . da_n^\delta \right) e_v + \ldots$$

Неписаните членове са пропорционални на ds и по-нататък няма да играят никаква роля. Но

$$de_n = \omega_n^q e_q$$

и като сравним с (9), получаваме

(10)

$$\omega_n^1 = (a_n^{m-1} k_{m-1} - a_n^{m+1} k_m) ds,$$

$$\omega_n^v = \sum_\varepsilon a_v^\varepsilon . da_n^\varepsilon + \sum_\delta a_v^\delta . da_n^\delta + \ldots$$

От (5) и (10) следва

(11) $$dK_{n-1}^m = (a_n^{m-1} k_{m-1} - a_n^{m+1} k_m) ds \wedge \bigwedge_v \left(\sum_\varepsilon a_v^\varepsilon . da_n^\varepsilon + \sum_\delta a_v^\delta . da_n^\delta \right).$$

Като използуваме, че

$$\sum_\varepsilon a_n^\varepsilon . da_n^\varepsilon + \sum_\delta a_n^\delta . da_n^\delta = 0,$$

намираме

$$da_n^n = -\frac{1}{a_n^n} \left(\sum_\varepsilon a_n^\varepsilon . d a_n^\varepsilon + \sum_\rho a_n^\rho . da_n^\rho \right)$$

и следователно

$$\sum_{\varepsilon} a^{\varepsilon}_{v} . da^{\varepsilon}_{n} + \sum_{\delta} a^{\delta}_{v} . da^{\delta}_{n}$$

$$= \sum_{\varepsilon} \left(a^{\varepsilon}_{v} - \frac{a^{n}_{v}}{a^{n}_{n}} a^{\varepsilon}_{n} \right) da^{\varepsilon}_{n} + \sum_{\rho} \left(a^{\rho}_{v} - \frac{a^{n}_{v}}{a^{n}_{n}} a^{\rho}_{n} \right) da^{\rho}_{n} .$$

Тогава

$$\underset{v}{\Lambda} \left(\sum_{\varepsilon} a^{\varepsilon}_{v} . da^{\varepsilon}_{n} + \sum_{\delta} a^{\delta}_{v} . da^{\delta}_{n} \right) = \frac{1}{a^{n}_{n}} \underset{\varepsilon}{\Lambda} da^{\varepsilon}_{n} \wedge \underset{\rho}{\Lambda} da^{\rho}_{n} . \tag{12}$$

Формулата (12) ни дава възможност да получим следното представяне за инвариантната плътност:

$$dK^{m}_{n-1} = \frac{a^{m-1}_{n} k_{m-1} - a^{m+1}_{n} k_{m}}{a^{n}_{n}} \cdot ds \wedge \underset{\varepsilon}{\Lambda} da^{\varepsilon}_{n} \wedge \underset{\rho}{\Lambda} da^{\rho}_{n} \Big| . \tag{13}$$

Въвеждаме сферични координати:

$$\begin{aligned}
a^{1}_{n} &= \cos \theta_1 , \\
a^{2}_{n} &= \sin \theta_1 \cos \theta_2 , \\
a^{m-1}_{n} &= \sin \theta_1 \sin \theta_2 \ldots \sin \theta_{m-2} \cos \theta_{m-1} , \\
a^{m+1}_{n} &= \sin \theta_1 \sin \theta_2 \ldots \sin \theta_{m-1} \cos \theta_{m+1} , \\
\ldots & \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots \\
a^{n-1}_{n} &= \sin \theta_1 \sin \theta_2 \ldots \sin \theta_{n-2} \cos \theta_{n-1} , \\
a^{n}_{n} &= \sin \theta_1 \sin \theta_2 \ldots \sin \theta_{n-2} \sin \theta_{n-1} .
\end{aligned} \tag{14}$$

Понеже разглеждаме неориентирани прави, то

$$0 < \theta_{\varepsilon} < \pi , \quad 0 < \theta_{\rho} < \pi . \tag{15}$$

От (13) и (14) получаваме

$$\begin{aligned}
dK^{m}_{n-1} = {} & (k_{m-1} \cos \theta_{m-1} - k_{m} \sin \theta_{m-1} \cos \theta_{m+1}) (\sin \theta_{m-1})^{n-m-1} \\
& \times \prod_{\lambda} (\sin \theta_2)^{n-\lambda-1} \prod_{\rho} (\sin \theta_{\rho})^{n-\rho-1} ds \wedge \underset{\varepsilon}{\Lambda} d\theta_{\varepsilon} \wedge \underset{\rho}{\Lambda} d\theta_{\rho} \Big| .
\end{aligned} \tag{16}$$

Да означим с $N_m(g)$ числото, което показва колко пъти една права g принадлежи на една и съща съвкупност K^{m}_{n-1}. За да получим интегралната мярка на съвкупността K^{m}_{n-1}, интегрираме (16), като имаме пред вид (15). Получаваме

$$(17) \qquad \int_{(G)} N_m(g) dK^m_{n-1} = \frac{\pi^{\frac{n-2}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \int_{(C)} \sqrt{k^2_{m-1} + k^2_m}\, ds,$$

което е търсената Крофтонова формула. Интегрирането в лявата страна на (17) се извършва върху всички прави в K^m_{n-1}, защото ако една права g не принадлежи на K^m_{n-1}, то $N_m(g)=0$.

Така доказахме следната

Теорема. В E_n съвкупностите K^m_{n-1} $(1<m<n-1)$ от прави g, пресичащи n-кратно гладка правилна крива c и лежащи в съответните ѝ координатни хиперравнини с нормални вектори t_m, са измерими и интегралните им мерки се дават със (17).

ЛИТЕРАТУРА

1. Борисов, А.: Интеграли формули от Крофтонов тип за крива и съвкупности от прави, пресичащи кривата. I. Год. Соф. унив., Фак. мат. и мех., 68 (1973/74).
2. Розенфельд, Б. А.: Многомерные пространства. М., 1966.

Постъпила на 15. XII. 1975 г.

INTEGRAL FORMULAE OF CROFTON TYPE FOR A CURVE AND SETS OF LINES INTERSECTING THE CURVE. II

A. V. Borissov

(SUMMARY)

Theorem. Let K^m_{n-1} $(1<m<n-1)$ be the set of all straight lines g in E_n intersecting a regular C^n-curve c and lying in its corresponding coordinate hyperplanes. All the sets K^m_{n-1} are measurable and their measures are given by (17). In (17), (i) a straight line g belongs $N_m(g)$ times to K^m_{n-1}, (ii) dK^m_{n-1} is the density of K^m_{n-1} and (iii) k_i $(i=1,\ldots, n-2)$ is the i-th curvature of c.