СХОДИМОСТ И $(C, 1)$-СУМИРУЕМОСТ НА РЕДОВЕ НА ЛАГЕР ВЪРХУ ГРАНИЦИТЕ НА ОБЛАСТИТЕ ИМ НА СХОДИМОСТ

Петър Русев

В тази работа, която може да се счита като естествено продължение на изследванията ни върху редовете на Лагер, публикувани в статиите ни [1], [2] и [3], разглеждаме въпросите за сходимост и сумируемост с метода на Чезаро на някои класи редове на Лагер в точки от границите на областите им на сходимост. В следващото изложение ще използуваме както означенията, така и резултатите от цитираните по-горе статии. В методическо или по-скоро техническо отношение настоящата работа е тясно свързана с публикациите [4] и [5], в които аналогични проблеми бяха разгледани за редовете по полиномите на Бесел и Якоби. Основното затруднение, свързано с редовете на Лагер, е, че областта на сходимост на ред по полиномите на Лагер $\{L_n^{(\alpha)}(z)\}_{n=0}^{\infty}$, а също така и по функциите на Лагер от втори род $\{M_n^{(\alpha)}(z)\}_{n=0}^{\infty}$ е неограничена. Това последно обстоятелство не позволява директното приложение на метода, използуван в цитираните по-горе работи [4] и [5], поради което се налагат известни модификации. Освен това асимптотичните формули за парциалните суми на редовете на Лагер и особено тези за съответните средни на Чезаро са далеч по-комплицирани, което създава и допълнителни трудности.

I

В тази част разглеждаме въпроса за сходимост на редове по функциите на Лагер от втори род, т. е. редове от вида

$$\sum_{n=0}^{\infty} b_n M_n^{(\alpha)}(z) \tag{1}$$

в точки от границата на областта му на сходимост. Както беше установено в нашата работа [2], ако положим $\mu_0 = \overline{\lim}\,(2\sqrt{n})^{-1} \ln b_n$, то ако $0 < \mu_0 < +\infty$, редът (1) е абсолютно равномерно сходящ върху всяко компактно подмножество на външността $\Delta^*(\mu_0)$ на параболата $p(\mu_0) = \{z \in \mathbf{C}: \operatorname{Re}(-z)^{1/2} = \mu_0\}$ и е разходящ във всяка точка от областта $\Delta(\mu_0) - [0, +\infty)$, където $\Delta(\mu_0)$ е вътрешността на параболата $p(\mu_0)$.

Преди всичко с оглед на бъдещите нужди ще установим едно помощно твърдение, което има известно самостоятелно значение и може да се схваща като аналог на теоремата на Абел за степенните редове.

Теорема 1. Ако редът (1) е сходящ в точката $z_0 \in C-[0, +\infty)$, то в сила е равенството

$$\lim_{z\to z_0} \sum_{n=0}^{\infty} b_n M_n^{(\alpha)}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n M_n^{(\alpha)}(z_0)$$

при условие, че z принадлежи на областта $\Delta^*(\mu_0)$ $(\mu_0 = \mathrm{Re}(-z_0)^{1/2})$ и $z-z_0 = O\{\mathrm{Re}(-z)^{1/2}-\mu_0\}$.

Доказателство. Да предположим, че $M_n^{(\alpha)}(z_0) \neq 0$ за всяко $n=0, 1, 2, \ldots$. Ще покажем в такъв случай, че редът

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{M_n^{(\alpha)}(z)}{M_n^{(\alpha)}(z)} \tag{2}$$

е абсолютно сходящ в областта $\Delta^*(\mu_0)$. За целта ще използуваме асимптотичната формула за функциите на Лагер от втори род, която беше получена в [2], а именно:

$$M_n^{(\alpha)}(z) = -\sqrt{\pi}\exp(-z/2)(-z)^{\alpha/2-1/4} n^{\alpha/2-1/4} \exp[-2(-z)^{1/2}\sqrt{n}][1+\mu_n^{(\alpha)}(z)], \tag{3}$$

където $\{M_n^{(\alpha)}(z)\}_{n=0}^{\infty}$ са комплексни функции, аналитични в областта $C-[0, +\infty)$, и $\lim\limits_{n\to+\infty} \mu_n^{(\alpha)}(z) = 0$ равномерно върху всяко компактно подмножество на тази област.

Като имаме пред вид формулата (3), получаваме, че за всяко $z \in \Delta^*(\mu_0)$ е в сила равенството

$$\frac{M_n^{(\alpha)}(z)}{M_n^{(\alpha)}(z_0)} = O(\exp\{-2[(-z)^{1/2}-\mu_0]\sqrt{n}),$$

от което следва абсолютната сходимост на реда (2) в областта $\Delta^*(\mu_0)$.

По-нататък, както при доказателството на класическата теорема на Абел, получаваме, че за всяко $z \in \Delta^*(\mu_0)$ е в сила равенството

$$f(z) - \frac{M_0^{(\alpha)}(z)}{M_0^{(\alpha)}(z_0)} f(z_0) = \sum_{n=0}^{\infty} [s_n - f(z_0)] \left\{ \frac{M_n^{(\alpha)}(z)}{M_n^{(\alpha)}(z_0)} - \frac{M_{n+1}^{(\alpha)}(z)}{M_{n+1}^{(\alpha)}(z_0)} \right\}, \tag{4}$$

където $f(z)$ означава сумата на реда (1), а $s_n = \sum\limits_{k=0}^{n} b_k M_k^{(\alpha)}(z_0)$. Да положим по определение

$$M(z, z_0) = \sum_{n=0}^{\infty} \left| \frac{M_n^{(\alpha)}(z)}{M_n^{(\alpha)}(z_0)} - \frac{M_{n+1}^{(\alpha)}(z)}{M_{n+1}^{(\alpha)}(z_0)} \right| .$$

Ако покажем, че при условията на теоремата $M(z, z_0) = O(1)$, от равенството (4) ще следва твърдението, което искаме да докажем.

Изхождайки от определението на функциите на Лагер от втори род, а именно:

$$M_n^{(\alpha)}(z) = -\int_0^\infty \frac{t^{n+\alpha} e^{-t}}{(t-z)^{n+1}} dt \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots), \tag{5}$$

не е трудно да установим следното съотношение:

$$M_n^{(\alpha)}(z) = M_{n+1}^{(\alpha)}(z) - z\, M_{n+1}^{(\alpha-1)}(z). \tag{6}$$

От (6) и от асимптотичната формула (3) получаваме тогава, че

$$\frac{M_n^{(\alpha)}(z)}{M_n^{(\alpha)}(z_0)} - \frac{M_{n+1}^{(\alpha)}(z)}{M_{n+1}^{(\alpha)}(z_0)} = z_0 \frac{M_{n+1}^{(\alpha)}(z)}{M_{n+1}^{(\alpha)}(z_0)} \cdot \frac{M_{n+1}^{(\alpha-1)}(z_0)}{M_n^{(\alpha)}(z_0)} - z \frac{M_{n+1}^{(\alpha-1)}(z)}{M_n^{(\alpha)}(z_0)} \tag{7}$$

$$= n^{-1/2} \exp\{-2[\operatorname{Re}(-z)^{1/2} - \mu_0]\sqrt{n}\}\, \omega_n^{(\alpha)}(z, z_0),$$

където $\{\omega_n^{(\alpha)}(z, z_0)\}_{n=1}^\infty$ е редица от функции, аналитични в областта $\mathbf{C} - [0, +\infty)$. Освен това тази редица е равномерно ограничена върху всяко компактно подмножество на тази област. Като имаме пред вид, че $\omega_n^{(\alpha)}(z_0, z_0) = 0$ за всяко $n = 1, 2, 3, \ldots$, от лемата на Шварц получаваме, че редицата с общ член $(z - z_0)^{-1} \omega_n^{(\alpha)}(z, z_0)$ е също равномерно ограничена върху всяко компактно подмножество на областта $\mathbf{C} - [0, +\infty)$. Тогава от (7) следва, че

$$M(z, z_0) = O\left(z - z_0 \sum_{n=1}^\infty n^{-1/2} \exp\{-2[\operatorname{Re}(-z)^{1/2} - \mu_0]\sqrt{n}\} \right)$$

$$= O\left(z - z_0 \int_0^\infty t^{-1/2} \exp\{-2[\operatorname{Re}(-z)^{1/2} - \mu_0]\sqrt{t}\}\, dt \right)$$

$$= O\left(\frac{|z - z_0|}{\operatorname{Re}(-z)^{1/2} - \mu_0} \right) = O(1).$$

За да се освободим от направеното в началото на доказателството предположение, да отбележим преди това, че каквото и да е $z_0 \in \mathbf{C} - [0, +\infty)$, от асимптотичната формула (3) следва съществуването на естествено число $\nu = \nu(z_0)$, такова, че $M_n^{(\alpha)}(z_0) \neq 0$ за всяко $n \geq \nu$. Извършваме тогава направените по-горе разсъждения за функцията

$$f_\nu(z) = f(z) - \sum_{n=0}^{\nu-1} b_n M_n^{(\alpha)}(z) = \sum_{n=\nu}^\infty b_n M_n^{(\alpha)}(z).$$

Ще дойдем до извода, че съществува $\lim_{z\to z_0} f_\nu(z)=f_\nu(z_0)=\sum_{n=\nu}^{\infty} b_n M_n^{(\alpha)}(z_0)$ при условията на теоремата. Следователно ще съществува и $\lim_{z\to z_0} f(z)=f_\nu(z_0)$ $+\sum_{n=0}^{\nu-1} b_n M_n^{(\alpha)}(z_0)=\sum_{n=0}^{\infty} b_n M_n^{(\alpha)}(z_0)=f(z_0)$ при същите условия.

Нека α е произволно реално число, отлично от $-1, -2, \ldots, 0<\mu_0<+\infty$, и $F(\zeta)$ е комплексна функция, която е дефинирана и измерима върху параболата $p(\mu_0)$ и удовлетворява следните изисквания:

(А) за всяко $\rho>\max(1, 2\mu_0^2)$

$$\int_{\Gamma(\mu_0,\rho)} F(\zeta)\, ds<+\infty,$$

където $\Gamma(\mu_0, \rho)$ е частта от параболата $p(\mu_0)$, която принадлежи на кръга $K_\rho=\{z\in \mathbf{C}: z\leqq\rho\}$.

(Б) $F(\zeta)=O(|\zeta|^\beta \exp(-\zeta))$ при $\zeta\in p(\mu_0)$ и $\zeta\to\infty$ за някое $\beta<\alpha/2-3/4$.

Както беше установено в нашата работа [3, теорема 6], при горните условия функцията

$$f(z)=-\frac{1}{2\pi i}\int_{p(\mu_0)} \frac{F(\zeta)}{\zeta-z}\, d\zeta \tag{8}$$

се развива в ред от вида (1) по функциите на Лагер от втори род в областта $\Delta^*(\mu_0)$ с коефициенти

$$b_n=\frac{1}{2\pi i\, I_n^{(\alpha)}}\int_{p(\mu_0)} L_n^{(\alpha)}(\zeta)\, F(\zeta)\, d\zeta \qquad (n=0, 1, 2, \ldots), \tag{9}$$

където

$$I_n^{(\alpha)}=\frac{\Gamma(n+\alpha+1)}{\Gamma(n+1)} \qquad (n=0, 1, 2, \ldots). \tag{10}$$

Забележка 1. Интегрирането на параболата $p(\mu_0)$ считаме, че се извършва в положителна посока по отношение на нейната вътрешност.

Опирайки се на горния резултат, ще разгледаме въпроса за сходимостта на реда (8), чрез който се представя функцията (8) в областта $\Delta^*(\mu_0)$, в точки от границата на последната, т. е. в точки от параболата $p(\mu_0)$.

Теорема 2. Нека z_0 е точка на параболата $p(\mu_0)$ и $F(\zeta)$ е комплексна функция, която удовлетворява изискванията (А) и (Б) и освен това и следното условие:

$$\int_{\Gamma(\mu_0,\rho)} \left|\frac{F(\zeta)-F(z_0)}{\zeta-z_0}\right| d\zeta<+\infty \tag{11}$$

за някое $\rho>\max(1, 2\mu_0^2, |z_0|)$.

Тогава редът (1) е сходящ в точката z_0 и сумата му е

$$(12)\qquad -\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{p(\mu_0)}\frac{F(\zeta)}{\zeta-z_0}\,d\zeta+\frac{1}{2}F(z_0).$$

Забележка 2. Интеграл от вида, който фигурира в горното равенство, навсякъде в тази работа се разбира в смисъл на главна стойност по Коши.

Доказателство. Достатъчно е да покажем, че редът (1) е сходящ в точката z_0. Наистина тогава, от една страна, от теорема 1 ще следва съществуването на границата $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)=f(z_0)=\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n M_n^{(\alpha)}(z_0)$ (при условие, че $z-z_0=O[\mathrm{Re}\,(-z)^{1/2}-\mu_0])$, а, от друга страна, от формулите на Сохоцки — Племел за граничните значения на интегралите от типа на Коши [6, с. 195] веднага следва, че тази граница се дава от (12).

Да означим с $s_\nu(f;\,z)$ парциалната сума $\sum\limits_{n=0}^{\nu} b_n M_n^{(\alpha)}(z)$ на реда (1), който представя функцията (8) в областта $\Delta^*(\mu_0)$, и да положим за $\zeta,\ z\in \mathbf{C}-[0,\ +\infty)$,

$$(13)\qquad \eta(\zeta,\ z)=(-\zeta)^{1/2}-(-z)^{1/2},$$

$$(14)\qquad E_\nu(\zeta,\ z)=\exp\{2\eta(\zeta,\ z)\sqrt{\nu+1}\}\qquad (\nu=0,\ 1,\ 2,\ldots).$$

Ще покажем преди всичко, че е в сила следната асимптотична формула:

$$(15)\qquad s_\nu(f;\,z_0)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{p(\mu_0)}\frac{E_\nu(\zeta,\ z_0)-1}{\zeta-z_0}F(\zeta)\,d\zeta+o(1).$$

За да установим горното равенство, ще използуваме формулата на Кристофел — Дарбу за полиномите и функциите на Лагер от втори род [3, с. 196, (35)]. Ако в тази последна формула разменим местата на z и ζ, ще получим, че

$$(16)\qquad -\frac{1}{\zeta-z}=\sum_{n=0}^{\nu}\frac{1}{I_n^{(\alpha)}}L_n^{(\alpha)}(\zeta)\,M_n^{(\alpha)}(z)-\frac{\Delta_{\nu+1}^{(\alpha)}(\zeta,\ z)}{\zeta-z},$$

където

$$(17)\qquad \Delta_{\nu+1}^{(\alpha)}(\zeta,\ z)=\frac{\nu+1}{I_\nu^{(\alpha)}}\{L_\nu^{(\alpha)}(\zeta)\,M_{\nu+1}^{(\alpha)}(z)-L_{\nu+1}^{(\alpha)}(\zeta)\,M_\nu^{(\alpha)}(z)\}.$$

От (16) и равенството (9) следва тогава, че за всяко $z\in\Delta^*(\mu_0)$

$$s_\nu(f;\,z)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{p(\mu_0)}\left\{\sum_{n=0}^{\nu}\frac{1}{I_n^{(\alpha)}}L_n^{(\alpha)}(\zeta)\,M_n^{(\alpha)}(z)\right\}F(\zeta)\,d\zeta$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{p(\mu_0)}\frac{\Delta_{\nu+1}^{(\alpha)}(\zeta,\ z)-1}{\zeta-z}F(\zeta)\,d\zeta.$$

Пак от формулата на Кристофел — Дарбу следва, че $\Delta_{\nu+1}^{(\alpha)}(z, z)=1$ за всяко $\nu=0, 1, 2, \ldots$ и $z \in \mathbf{C}-[0, +\infty)$. Следователно

$$s_\nu(f; z)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{p(\mu_0)} \frac{\Delta_{\nu+1}^{(\alpha)}(\zeta, z)-\Delta_{\nu+1}^{(\alpha)}(z, z)}{\zeta-z} F(\zeta)d\zeta$$

и от последното равенство не е трудно да заключим, че

$$(18) \qquad s_\nu(f; z_0)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{p(\mu_0)} \frac{\Delta_{\nu+1}^{(\alpha)}(\zeta, z_0)-\Delta_{\nu+1}^{(\alpha)}(z_0, z_0)}{\zeta-z_0} F(\zeta)\,d\zeta$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{p(\mu_0)} \frac{\Delta_{\nu+1}^{(\alpha)}(\zeta, z_0)-1}{\zeta-z_0} F(\zeta)\,d\zeta.$$

Забележка 3. Условията (А) и (Б), които функцията $F(\zeta)$ удовлетворява по предположение, гарантират съществуването и даже абсолютната сходимост на несобствените интеграли, фигуриращи в горните равенства. Това беше установено при доказателството на теорема 6 от [3].

От равенството $L_n^{(\alpha)}(z)=L_{n+1}^{(\alpha)}(z)-L_{n+1}^{(\alpha-1)}(z)$, което се получава, като в [8, (5. 1. 14)] заменим α с $\alpha-1$ и n с $n+1$, а също така и от съотношението (6) следва непосредствено, че

$$(19) \qquad \Delta_{\nu+1}^{(\alpha)}(\zeta, z)=-\frac{\nu+1}{l_\nu^{(\alpha)}}\{(-z)\,L_{\nu+1}^{(\alpha)}(\zeta)\,M_{\nu+1}^{(\alpha-1)}(z)-L_{\nu+1}^{(\alpha-1)}(\zeta)\,M_{\nu+1}^{(\alpha)}(z)\}.$$

В [1] беше установено следното неравенство за полиномите на Лагер

$$(20) \qquad L_n^{(\alpha)}(z)=O\{z^{-\alpha/2-1/4}\,n^{\alpha/2-1/4}\exp(z+2\lambda\sqrt{n})\}$$

при условие, че $\operatorname{Re}(-z)^{1/2}\leqq\lambda$ и $|z|\geqq\rho>\max(1, 2\lambda^2)$.

Като имаме пред вид условията (А) и (Б), които функцията $F(\zeta)$ удовлетворява, равенството (19), неравенството (20) и асимптотичната формула (3), а също така и формулата на Стирлинг, заключаваме, че равномерно по ν

$$\lim_{\rho\to+\infty}\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma^*(\mu_0,\rho)} \frac{\Delta_{\nu+1}^{(\alpha)}(\zeta, z_0)-1}{\zeta-z_0} F(\zeta)\,d\zeta=0,$$

където $\Gamma^*(\mu_0, \rho)=p(\mu_0)-\Gamma(\mu_0, \rho)$. Понеже $|E_\nu(\zeta, z_0)|=1$ за всяко $\zeta \in p(\mu_0)$ и $\nu=0, 1, 2, \ldots$, ще бъде изпълнено и равенството

$$\lim_{\rho\to+\infty}\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma^*(\mu_0,\rho)} \frac{E_\nu(\zeta, z_0)}{\zeta-z_0} F(\zeta)\,d\zeta=0$$

равномерно по ν. Следователно, за да установим равенството (15), достатъчно е да покажем, че

$$\lim_{\nu\to+\infty}\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma(\mu_0,\rho)}\frac{\Delta_{\nu+1}^{(\alpha)}(\zeta,z_0)-E_\nu(\zeta,z_0)}{\zeta-z_0}F(\zeta)\,d\zeta=0 \tag{21}$$

за всяко достатъчно голямо ρ.

За полиномите на Лагер $\{L_n^{(\alpha)}(z)\}_{n=0}^{\infty}$ е в сила следната асимптотична формула в областта $\mathbf{C}-[0,+\infty)$ [7, (8.22.3)]:

$$L_n^{(\alpha)}(z)=(2\sqrt{\pi})^{-1}\exp(z/2)(-z)^{-\alpha/2-1/4}n^{\alpha/2-1/4}\cdot\exp[2(-z)^{1/2}\sqrt{n}][1+\lambda_n^{(\alpha)}(z)], \tag{22}$$

където $\{\lambda_n^{(\alpha)}(z)\}_{n=1}^{\infty}$ са комплексни функции, аналитични в областта $\mathbf{C}-[0,+\infty)$ и $\lim\limits_{n\to+\infty}\lambda_n^{(\alpha)}(z)=0$ равномерно върху всяко компактно подмножество на тази област.

Опирайки се на горната асимптотична формула, на асимптотичната формула (3) за функциите на Лагер от втори род, на равенството (19), а също така и на формулата на Стирлинг, след известни несложни пресмятания ще получим, че

$$\Delta_{\nu+1}^{(\alpha)}(\zeta,z)=E_\nu(\zeta,z)\{A(\zeta,z)+\varepsilon_\nu^{(\alpha)}(\zeta,z)\}, \tag{23}$$

където

$$A(\zeta,z)=\frac{1}{2}\exp\left(\frac{\zeta-z}{2}\right)\{(-\zeta)^{-\alpha/2-1/4}(-z)^{\alpha/2+1/4}+(-\zeta)^{-\alpha/2+1/4}(-z)^{\alpha/2-1/4}\},$$

а $\{\varepsilon_\nu^{(\alpha)}(\zeta,z)\}_{\nu=1}^{\infty}$ са комплексни функции, аналитични в областта $\{\mathbf{C}-[0,+\infty)\}\times\{\mathbf{C}-(0,+\infty)\}$ и освен това $\lim\limits_{\nu\to+\infty}\varepsilon_\nu^{(\alpha)}(\zeta,z)=0$ равномерно върху всяко компактно подмножество на тази област. Понеже $A(z_0,z_0)=1$, от (22) получаваме, че

$$\Delta_{\nu+1}^{(\alpha)}(\zeta,z_0)=\{A(\zeta,z_0)-A(z_0,z_0)\}E_\nu(\zeta,z_0)+E_\nu^{(\alpha)}(\zeta,z_0)+E_\nu^{(\alpha)}(\zeta,z_0)\varepsilon_\nu^{(\alpha)}(\zeta,z_0).$$

Следователно, като вземем пред вид, че $\varepsilon_\nu^{(\alpha)}(z_0,z_0)=0$ за всяко $\nu=1,2,3,\ldots$, намираме, че

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma(\mu_0,\rho)}\frac{\Delta_{\nu+1}^{(\alpha)}(\zeta,z_0)-E_\nu(\zeta,z_0)}{\zeta-z_0}F(\zeta)\,d\zeta$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma(\mu_0,\rho)}\frac{A(\zeta,z_0)-A(z_0,z_0)}{\zeta-z_0}E_\nu(\zeta,z_0)F(\zeta)\,d\zeta$$

$$+\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma(\mu_0,\rho)}\frac{\varepsilon_\nu^{(\alpha)}(\zeta,z_0)}{\zeta-z_0}E_\nu(\zeta,z_0)F(\zeta)\,d\zeta=A_\nu^{(1)}+A_\nu^{(2)}.$$

От лемата на Шварц следва, че редицата $\{(\zeta-z_0)^{-1}\varepsilon_\nu^{(\alpha)}(\zeta, z_0)\}_{\nu=1}^{\infty}$ също клони равномерно към нула върху компактни подмножества на областта $C-[0, +\infty)$. Следователно, като имаме пред вид условието (А), което функцията $F(\zeta)$ удовлетворява, и освен това, че $E_\nu(\zeta, z_0)=1$ за $\zeta \in p(\mu_0)$ и $\nu=0, 1, 2, \ldots$, заключаваме, че $\lim\limits_{\nu\to+\infty} A_\nu^{(2)}=0$.

В интеграла $A_\nu^{(1)}$ да направим смяна на интеграционната променлива, като положим $\eta(\zeta, z_0)=(-z)^{1/2}-(-z_0)^{1/2}=it$ $(-t_1\leqq t\leqq t_2)$, където $t_1, t_2>0$ се определят само в зависимост от z_0 и ρ. Ще получим, че

$$A_\nu^{(1)}=\int_{-t_1}^{t_2} E(t)\exp(2it\sqrt{\nu+1})\,dt,$$

където $E(t)$ е сумируема функция. От лемата на Риман — Лебег следва тогава, че $\lim\limits_{\nu\to+\infty} A_\nu^{(1)}=0$.

С това равенството (21) е установено, а следователно е налице и представянето (15) на парциалните суми $s_\nu(f; z_0)$ $(\nu=1, 2, 3, \ldots)$.

По-нататък от (15) следва, че

$$s_{\nu+p}(f; z_0)-s_\nu(f; z_1)=\frac{1}{2\pi i}\int_{p(\mu_0)}\frac{E_{\nu+p}(\zeta, z_0)-E_\nu(\zeta, z_0)}{\zeta-z_0}F(\zeta)\,d\zeta+o(1).$$

Понеже, както не е трудно да се убедим, имайки пред вид условието (Б), което удовлетворява функцията $F(\zeta)$,

$$\lim_{p\to+\infty}\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma^*(\mu_0, p)}\frac{E_{\nu+p}(\zeta, z_0)-E_\nu(\zeta, z_0)}{\zeta-z_0}F(\zeta)\,d\zeta=0$$

равномерно по отношение на ν и p, за да покажем, че съществува границата $\lim\limits_{\nu\to+\infty} s_\nu(f; z_0)$, достатъчно е да установим, че за всяко $\rho>\max(1, 2\mu_0^2)$ е в сила равенството

$$\lim_{\nu\to+\infty}\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma(\mu_0, p)}\frac{E_{\nu+p}(\zeta, z_0)-E_\nu(\zeta, z_0)}{\zeta-z_0}F(\zeta)\,d\zeta=0$$

равномерно за $p=1, 2, 3, \ldots$

Обаче

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma(\mu_0, p)}\frac{E_{\nu+p}(\zeta, z_0)-E_\nu(\zeta, z_0)}{\zeta-z_0}F(\zeta)\,d\zeta$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma(\mu_0, p)}\frac{F(\zeta)-F(z_0)}{\zeta-z_0}E_{\nu+p}(\zeta, z_0)\,d\zeta$$

$$-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma(\mu_0,\rho)}\frac{F(\zeta)-F(z_0)}{\zeta-z_0}E_\nu(\zeta,z_0)\,d\zeta$$

$$+\frac{F(z_0)}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma(\mu_0,\rho)}\frac{E_{\nu+p}(\zeta,z_0)-E_\nu(\zeta,z_0)}{\zeta-z_0}\,d\zeta.$$

От условието (11) на теоремата, лемата на Риман — Лебег и принципа на Коши за сходимост получаваме, че

$$\lim_{\nu\to+\infty}\left\{\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma(\mu_0,\rho)}\frac{F(\zeta)-F(z_0)}{\zeta-z_0}E_{\nu+p}(\zeta,z_0)\,d\zeta\right.$$

$$\left.-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma(\mu_0,\rho)}\frac{F(\zeta)-F(z_0)}{\zeta-z_0}E_\nu(\zeta,z_0)\,d\zeta\right\}=0$$

равномерно за $p=1, 2, 3, \ldots$

Остава да покажем, че

$$\lim_{\nu\to+\infty}\int\limits_{\Gamma(\mu_0,\rho)}\frac{E_{\nu+p}(\zeta,z_0)-E_\nu(\zeta,z_0)}{\zeta-z_0}\,d\zeta=0 \tag{24}$$

равномерно за $p=1, 2, 3, \ldots$ Да разгледаме за целта интеграла

$$R_\nu(z_0)=\int\limits_{\Gamma(\mu_0,\rho)}\frac{E_\nu(\zeta,z_0)-1}{\zeta-z_0}\,d\zeta$$

и да направим в него смяната $\eta(\zeta,z_0)=it$ $(-t_1\leqq t\leqq t_2)$. Ще получим, че

$$R_\nu(z_0)=-2\int\limits_{-t_1}^{t_2}\frac{\exp(2it\sqrt{\nu+1})-1}{t[(-z_0)^{1/2}+it][2(-z_0)^{1/2}+it]}\,dt$$

$$=\frac{1}{z_0}\int\limits_{-t_1}^{t_2}\frac{\exp(2it\sqrt{\nu+1})-1}{t}\,dt+\frac{i}{z_0}\int\limits_{-t_1}^{t_2}\frac{\exp(2it\sqrt{\nu+1})-1}{(-z_0)^{1/2}+it}\,dt$$

$$-\frac{2i}{z_0}\int\limits_{-t_1}^{t_2}\frac{\exp(2it\sqrt{\nu+1})-1}{2(-z_0)^{1/2}+it}\,dt=\frac{1}{z_0}\int\limits_{-t_1\sqrt{\nu+1}}^{t_2\sqrt{\nu+1}}\frac{\exp(2it)-1}{t}\,dt$$

$$+\frac{i}{z_0}\int\limits_{-t_1}^{t_2}\frac{\exp(2it\sqrt{\nu+1})}{(-z_0)^{1/2}+it}\,dt-\frac{2i}{z_0}\int\limits_{-t_1}^{t_2}\frac{\exp(2it\sqrt{\nu+1})}{2(-z_0)^{1/2}+it}\,dt$$

$$-\frac{i}{z_0}\int_{-t_1}^{t_2}\frac{dt}{(-z_0)^{1/2}+it}+\frac{2i}{z_0}\int_{-t_1}^{t_2}\frac{dt}{2(-z_0)^{1/2}+it}.$$

Нека $\delta>0$ е фиксирано, тогава за всички достатъчно големи ν ще бъде изпълнено равенството

$$\int_{-t_1\sqrt{\nu+1}}^{t_2\sqrt{\nu+1}}\frac{\exp(2it)-1}{t}\,dt=\int_{-t_1\sqrt{\nu+1}}^{-\delta}\frac{\exp(2it)}{t}\,dt=\int_{-t_1\sqrt{\nu+1}}^{-\delta}\frac{dt}{t}$$

$$+\int_{-\delta}^{\delta}\frac{\exp(2it)-1}{t}\,dt+\int_{\delta}^{t_2\sqrt{\nu+1}}\frac{\exp(2it)}{t}\,dt-\int_{\delta}^{t_2\sqrt{\nu+1}}\frac{dt}{t}$$

$$=\int_{\delta}^{t_2\sqrt{\nu+1}}\frac{\exp(2it)}{t}\,dt-\int_{\delta}^{t_1\sqrt{\nu+1}}\frac{\exp(-2it)}{t}\,dt+\int_{-\delta}^{\delta}\frac{\exp(2it)-1}{t}\,dt+\ln\frac{t_1}{t_2},$$

от което следва, че съществува границата

$$\lim_{\nu\to+\infty}\int_{-t_1\sqrt{\nu+1}}^{t_2\sqrt{\nu+1}}\frac{\exp(2it)-1}{t}\,dt=2i\int_0^{\infty}\frac{\sin 2t}{t}\,dt+\ln\frac{t_1}{t_2}.$$

Тогава, като имаме пред вид пак лемата на Риман — Лебег, заключаваме, че съществува $\lim\limits_{\nu\to+\infty} R_\nu(z_0)$, с което равенството (24) е установено. И така за редицата $\{s_\nu(f;\,z_0)\}_{\nu=0}^{\infty}$ е изпълнен критерият на Коши, следователно тя е сходяща.

Забележка 4. Изискването (11) на теорема 2 ще бъде сигурно изпълнено, ако функцията $F(\zeta)$ удовлетворява условие от типа на Хьолдер в точката z_0, т. е. ако съществуват $K>0$, $0<\tau\leqq 1$, и околност $U(z_0)$ на z_0, такива, че $F(\zeta)-F(z_0)\leqq K\,\zeta-z_0{}^{\tau}$ за $\zeta\in p(\mu_0)\cap U(z_0)$.

Да обърнем сега внимание върху възможните следствия от доказаната теорема. Най-общо казано, тя може да бъде прилагана към развития по функциите на Лагер от втори род на комплексни функции, аналитични в област от вида $\Delta^*(\mu_0)$ и непрекъснати върху затворената област $\overline{\Delta^*(\mu_0)}$. Наистина при подходящи ограничения за растежа на такава функция върху параболата $p(\mu_0)$, а също така и в областта $\Delta^*(\mu_0)$ (при условие, че $z\to\infty$) тя ще се представи чрез съответен интеграл на Коши, към който ще бъде приложима теорема 2.

Теорема 3. Нека $0<\mu_0<+\infty$ и $f(z)$ е комплексна функция, която удовлетворява следните изисквания:

(а) $f(z)$ е аналитична в областта $\Delta^*(\mu_0)$ и е непрекъсната върху затворената област $\overline{\Delta^*(\mu_0)}$.

(б) съществува $\delta>0$, такова, че $f(z)=O(z^{-\delta})$ при $z\to\infty$ и $z\in\overline{\Delta^*(\mu_0)}$.
(в) $f(z)=O(z^{\beta}\exp(-z))$ при $z\to\infty$ и $z\in p(\mu_0)$ за някое $\beta<\alpha/2-3/4$.

(г)
$$\int\limits_{\Gamma(\mu_0,\rho)} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}\,ds<+\infty,$$

където $z_0\in p(\mu_0)$ и $\rho>\max(1,\ 2\mu_0^2,\ |z_0|)$.

Тогава $f(z)$ се представя в областта $\Delta^*(\mu_0)$ чрез ред от вида (1) по функциите на Лагер от втори ред и този ред е сходящ в точката със сума $f(z_0)$.

Без да се спираме подробно върху доказателството на горната теорема, ще отбележим, че условията (а) и (б) гарантират представянето на $f(z)$ в областта $\Delta^*(\mu_0)$ чрез интеграл на Коши, т. е.

(25)
$$f(z)=-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{p(\mu_0)}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}\,d\zeta,$$

а от условието (в) следва, че $f(z)$ може да се развие в тази област в ред от вида (1) с коефициенти

(26)
$$b_n=\frac{1}{2\pi i\,I_n^{(\alpha)}}\int\limits_{p(\mu_0)}L_n^{(\alpha)}(\zeta)f(\zeta)\,d\zeta\qquad(n=0,\ 1,\ 2,\ \ldots).$$

II

В тази част ще разгледаме въпроса за сумируемостта с метода на аритметичните средни на редове по функциите на Лагер от втори род. По-точно казано, както и в първата част, ще се спрем главно върху развития на функции, дефинирани чрез интеграли от типа на Коши. Ако отслабим изискванията, предявени към функцията $F(\zeta)$ в теорема 2, изобщо не можем да очакваме сходимост на реда (1) (който представя функцията $f(\zeta)$, дефинирана с (8)) в точки от параболата $p(\mu_0)$, но затова пък ще се убедим, че редът (1) може да бъде сумиран с метода на Чезаро. Основният резултат е следната

Теорема 4. Нека функцията $F(\zeta)$ удовлетворява условията (А) и (Б). Тогава, ако $F(\zeta)$ е непрекъсната в околност на точката $z_0\in p(\mu_0)$ и съществува интегралът

(27)
$$\int\limits_{p(\mu_0)}\frac{F(\zeta)}{\zeta-z_0}\,d\zeta,$$

редът (1) е (C, 1)-сумируем в тази точка със сума, която се дава от (12).

Доказателство. Да положим по определение за $\nu=0,\ 1,\ 2,\ldots$

$$\sigma_\nu(f;\ z_0)=(\nu+1)^{-1}\sum_{n=0}^{\nu}s_n(f;\ z_0).$$

Тогава от (15) веднага следва, че

$$\sigma_\nu(f;\ z_0)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{p\,(\mu_0)}\frac{G_\nu(\zeta,\ z_0)-1}{\zeta-z_0}F(\zeta)\,d\zeta+o(1), \tag{28}$$

където $G_\nu(\zeta,\ z_0)=(\nu+1)^{-1}\sum\limits_{n=0}^{\nu}E_n(\zeta,\ z_0)$.

Да положим по-нататък $g(\zeta,\ z_0;\ t)=\exp[2\eta(\zeta,\ z_0)\sqrt{t+1}]$ $(t\geqq 0)$. Тогава от сумационната формула на Ойлер — Маклорен [8, с. 283] ще получим, че

$$G_\nu(\zeta,\ z_0)=(\nu+1)^{-1}\sum_{n=0}^{\nu}g(\zeta,\ z_0;\ n) \tag{29}$$

$$=(\nu+1)^{-1}\left\{\int\limits_0^\nu g(\zeta,\ z_0;\ t)\,dt+\frac{1}{2}g(\zeta,\ z_0;\ \nu)+\frac{1}{2}g(\zeta,\ z_0;\ 0)\right.$$

$$\left.-\int\limits_0^\nu P_1(t)\,g_t'(\zeta,\ z_0;\ t)\,dt\right\},$$

където $P_1(t)=[t]-t+1/2$. От (28) и (29) следва тогава, че

$$\sigma_\nu(f;\ z_0)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{p\,(\mu_0)}K_\nu(\zeta,\ z_0)F(\zeta)\,d\zeta+\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{p\,(\mu_0)}k_\nu(\zeta,\ z_0)F(\zeta)\,d\zeta+o(1), \tag{30}$$

където

$$K_\nu(\zeta,\ z_0)=\frac{1}{\zeta-z_0}\left\{(\nu+1)^{-1}\left[\int\limits_0^\nu g(\zeta,\ z_0;\ t)\,dt\right.\right. \tag{31}$$

$$\left.\left.+\frac{1}{2}g(\zeta,\ z_0;\ \nu)+\frac{1}{2}g(\zeta,\ z_0;\ 0)\right]-1\right\},$$

$$k_\nu(\zeta,\ z_0)=-\frac{(\nu+1)^{-1}}{\zeta-z_0}\int\limits_0^\nu P_1(t)\,g_t'(\zeta,\ z_0;\ t)\ dt.$$

Понеже

$$g_t'(\zeta,\ z_0;\ t)=\frac{\eta(\zeta,\ z_0)}{\sqrt{t+1}}g(\zeta,\ z_0;\ t)=\frac{(-\zeta)^{1/2}-(-z_0)^{1/2}}{\sqrt{t+1}}g(\zeta,\ z_0;\ t)$$

$$=-\frac{(\zeta-z_0)\ g(\zeta,\ z_0;\ t)}{[(-\zeta)^{1/2}+(-z_0)^{1/2}]\sqrt{t+1}}$$

и освен това $g(\zeta, z_0; t) = 1$ за всяко $\zeta \in p(\mu_0)$ и $t \geqq 0$, като вземем пред вид, че функцията $P_1(t)$ е ограничена, намираме, че

$$k_\nu(\zeta, z_0) = O\left\{(\nu+1)^{-1} \int_0^\nu \frac{dt}{\sqrt{t+1}}\right\} = O\left(\frac{1}{\sqrt{\nu+1}}\right)$$

равномерно за $\zeta \in p(\mu_0)$. Тъй като функцията $F(\zeta)$ удовлетворява условията (А) и (Б), получаваме, че при $\nu \to +\infty$

$$\int_{p(\mu_0)} K_\nu(\zeta, z_0)\, F(\zeta)\, d\zeta = o(1).$$

Тогава от (30) следва, че

$$\sigma_\nu(f; z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{p(\mu_0)} K_\nu(\zeta, z_0)\, F(\zeta)\, d\zeta + o(1). \tag{32}$$

С оглед на бъдещите нужди ще изследваме поведението на редицата $\{K_\nu(\zeta, z_0)\}_{\nu=0}^{\infty}$ върху параболата $p(\mu_0)$. Преди всичко от (31), като извършим необходимите пресмятания, ще получим, че

$$\begin{aligned} K_\nu(\zeta, z_0) = \{2(\nu+1)(\zeta - z_0)\eta^2(\zeta, z_0)\}^{-1} \{2\sqrt{\nu+1}\,\eta(\zeta, z_0)\, E_\nu(\zeta, z_0) \\ + \eta^2(\zeta, z_0) E_\nu(\zeta, z_0) - E_\nu(\zeta, z_0) + \eta^2(\zeta, z_0) \exp[2\eta(\zeta, z_0)] \\ - 2\eta(\zeta, z_0) \exp[2\eta(\zeta, z_0)] + \exp[2\eta(\zeta, z_0)] - 2(\nu+1)\eta^2(\zeta, z_0)\}. \end{aligned} \tag{33}$$

Като си послужим със съответните степенни развития, от горното равенство намираме по-нататък, че

$$\begin{aligned} K_\nu(\zeta, z_0) = \frac{\eta(\zeta, z_0)}{2(\nu+1)(\zeta - z_0)} \Bigg\{ \sum_{k=3}^{\infty} \frac{2^{k+1}}{k!} \eta^{k-2}(\zeta, z_0) (\sqrt{\nu+1})^{k+1} \\ + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^k}{k!} \eta^{k-1}(\zeta, z_0) (\sqrt{\nu+1})^k - \sum_{k=3}^{\infty} \frac{2^k}{k!} \eta^{k-3}(\zeta, z_0) (\sqrt{\nu+1})^k \\ + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^k}{k!} \eta^{k-1}(\zeta, z_0) - \sum_{k=2}^{\infty} \frac{2^{k+1}}{k!} \eta^{k-2}(\zeta, z_0) + \sum_{k=3}^{\infty} \frac{2^k}{k!} \eta^{k-3}(\zeta, z_0) \Bigg\}. \end{aligned} \tag{34}$$

Нека $\delta_\nu(z_0)$ е околността на точката z_0 върху параболата $p(\mu_0)$, определена с неравенството $\zeta - z_0 < (\nu+1)^{-1/2}$, т. е. $\delta_\nu(z_0) = p(\mu_0) \cap D_\nu(z_0)$, където $D_\nu(z_0) = \{\zeta \in \mathbf{C} : \zeta - z_0 < (\nu+1)^{-1/2}\}$. Ако $\zeta \in \delta_\nu(z_0)$, както не е трудно да се убедим, $\eta(\zeta, z_0) = O[(\nu+1)^{-1/2}]$. Наистина $\eta(\zeta, z_0) = -(\zeta - z_0) \cdot [(-\zeta)^{1/2} + (-z_0)^{1/2}]^{-1}$ и функцията $[(-\zeta)^{1/2} + (-z_0)^{1/2}]^{-1}$ е ограничена върху параболата $p(\mu_0)$. От (34) получаваме тогава, че

(35) $$K_\nu(\zeta, z_0) = O(\sqrt{\nu+1}), \ \zeta \in \delta_\nu(z_0).$$

От (31) следва непосредствено, че редицата $\{K_\nu(\zeta, z_0)\}_{\nu=0}^{\infty}$ е равномерно ограничена върху $\Gamma^*(\mu_0, \rho)$ за всяко $\rho > \max(1, 2\mu_0^2, |z_0|)$, т. е.

(36) $$K_\nu(\zeta, z_0) = O(1), \ \zeta \in \Gamma^*(\mu_0, \rho).$$

Да допуснем, че $F(z_0) = 0$ и да положим

$$d_\nu(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{p(\mu_0)} K_\nu(\zeta, z_0) F(\zeta) d\zeta + \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{(\mu_0)} \frac{F(\zeta)}{\zeta - z_0} d\zeta$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{p(\mu_0)} P_\nu(\zeta, z_0) F(\zeta) d\zeta,$$

където

(37) $$P_\nu(\zeta, z_0) = K_\nu(\zeta, z_0) + \frac{1}{\zeta - z_0}.$$

За да докажем твърдението на теоремата в разглеждания случай, трябва да установим, че $\lim\limits_{\nu \to +\infty} d_\nu(z_0) = 0$. От (36) и от условието (Б), което удовлетворява функцията $E(\zeta)$, заключаваме, че

$$\lim_{\rho \to +\infty} \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma^*(\mu_0, \rho)} P_\nu(\zeta, z_0) F(\zeta) d\zeta = 0$$

равномерно по ν. Остава да покажем, че за всяко достатъчно голямо ρ

(38) $$\lim_{\nu \to +\infty} \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma(\mu_0, \rho)} P_\nu(\zeta, z_0) F(\zeta) d\zeta = 0.$$

Очевидно за всички достатъчно големи ν ще бъде изпълнено равенството

(39) $$\int\limits_{\Gamma(\mu_0, \rho)} P_\nu(\zeta, z_0) F(\zeta) d\zeta = \int\limits_{\delta_\nu(z_0)} P_\nu(\zeta, z_0) F(\zeta) d\zeta$$

$$+ \int\limits_{\Gamma(\mu_0, \rho) - \delta_\nu(z_0)} P_\nu(\zeta, z_0) F(\zeta) d\zeta.$$

Да разгледаме интеграла

(40) $$\int\limits_{\delta_\nu(z_0)} P_\nu(\zeta, z_0) F(\zeta) d\zeta = \int\limits_{\delta_\nu(z_0)} K_\nu(\zeta, z_0) F(\zeta) d\zeta + \int\limits_{\delta_\nu(z_0)} \frac{F(\zeta)}{\zeta - z_0} d\zeta.$$

Да означим с $l_\nu(z_0)$ дължината на дъгата $\delta_\nu(z_0)$ от параболата $p(\mu_0)$. Очевидно $l_\nu(z_0) = O[(\nu+1)^{-1/2}]$. Понеже функцията $F(\zeta)$ е непрекъсната в

точката z_0 и освен това $F(z_0)=0$, като имаме пред вид (35), ще получим, че

$$(41)\quad \int\limits_{\delta_\nu(z_0)} K_\nu(\zeta, z_0) F(\zeta)\, d\zeta = O\left(\sqrt{\nu+1} \int\limits_{\delta_\nu(z_0)} F(\zeta)\, ds\right) = o\left(\sqrt{\nu+1}\, l_\nu(z_0)\right) = o(1).$$

Не е трудно да се убедим също така, че

$$(42)\quad \lim_{\nu\to+\infty} \int\limits_{\delta_\nu(z_0)} \frac{F(\zeta)}{\zeta-z_0}\, d\zeta = 0.$$

Това следва от съществуването на интеграла (27) и от равенството

$$\int\limits_{\delta_\nu(z_0)-\delta_{\nu+k}(z_0)} \frac{F(\zeta)}{\zeta-z_0}\, d\zeta = \int\limits_{p(\mu_0)-\delta_{\nu+k}(z_0)} \frac{F(\zeta)}{\zeta-z_0}\, d\zeta - \int\limits_{(\mu_0)-\delta_\nu(z_0)} \frac{F(\zeta)}{\zeta-z_0}\, d\zeta.$$

Наистина, като се има пред вид определението на интеграла (27), дясната страна на горното равенство (а следователно и лявата) може да се направи в съответствие с принципа на Коши за сходимост, произволно малка по абсолютна стойност за всички достатъчно големи ν и произволно $k=1, 2, 3, \ldots$ Но това означава съгласно определението на интеграла, фигуриращ в равенството (42), че този интеграл (който съществува, разбира се, понеже съществува интегралът (27)) може да се направи също произволно малък по абсолютна стойност за същите стойности на ν.

От (40), (41) и (42) заключаваме тогава, че

$$(43)\quad \lim_{\nu\to+\infty} \int\limits_{\delta_\nu(z_0)} P_\nu(\zeta, z_0) F(\zeta)\, d\zeta = 0.$$

Нека $z_2(\nu)$ и $z_1(\nu)$ са съответно началната и крайната точка на дъгата $\delta_\nu(z_0)$ (която считаме ориентирана еднакво с параболата $p(\mu_0)$). Ако в интеграла

$$\int\limits_{\Gamma(\mu_0, \rho)-\delta_\nu(z_0)} P_\nu(\zeta, z_0) F(\zeta)\, d\zeta$$

направим смяната $\eta(\zeta, z_0) = (-\zeta)^{1/2} - (-z_0)^{1/2} = it$, като имаме пред вид (33) и (37), след несложни пресмятания ще получим, че

$$(44)\quad \int\limits_{\Gamma(\mu_0, \rho)-\delta_\nu(z_0)} P_\nu(\zeta, z_0) F(\zeta)\, d\zeta$$

$$= -\left(\int\limits_{-t_1}^{\tau_1(\nu)} + \int\limits_{\tau_2(\nu)}^{t_2}\right) \Bigg\{ \frac{t - i(-z_0)^{1/2}}{(\nu+1)\left[t - 2i(-z_0)^{1/2}\right] t^3} \left[2i\sqrt{\nu+1}\, t \exp\left(2it\sqrt{\nu+1}\right)\right.$$

$$-t^2 \exp\left(2it\sqrt{\nu+1}\right) - \exp\left(2it\sqrt{\nu+1}\right) - t^2 \exp(2it) - 2it \exp(2it)$$

$$\left.+\exp(2it)\right] F\left\{z_0 - 2it(-z_0)^{1/2} + t^2\right\} \Bigg\} dt,$$

където t_1, $t_2>0$ се определят в зависимост от z_0 и ρ, а $\tau_1(\nu)<0$ и $\tau_2(\nu)>0$ съответствуват на краищата на дъгата $\delta_\nu(z_0)$, т. е. с други думи, $\eta[z_s(\nu), z_0]=t\tau_s(\nu)$ $(s=1, 2)$.

Не е трудно да се убедим, че съществува границата

$$\lim_{\nu\to+\infty}(\nu+1)^{1/2}\tau_s(\nu)=\theta_s\neq 0, \infty \qquad (s=1, 2). \tag{45}$$

Наистина $z_s(\nu)=z_0+(\nu+1^{-1/2}\exp[i\omega_s(\nu)]$, при това $\lim\limits_{\nu\to+\infty}\omega_2(\nu)=\alpha(z_0)$ и $\lim\limits_{\nu\to+\infty}\omega_1(\nu)=\pi+\alpha(z_0)$, където $\alpha(z_0)$ е ъгълът, който допирателната към параболата $p(\mu_0)$ в точката z_0 сключва с реалната ос. Като имаме пред вид, че $\eta(\zeta, z_0)=-(\zeta-z_0)[(-\zeta)^{1/2}-(-z_0)^{1/2}]^{-1}$, идваме до извода (45). От него следва по-нататък, че

$$\int\limits_{\Gamma(\mu_0,\rho)-\delta_\nu(z_0)} P_\nu(\zeta, z_0)F(\zeta)\,d\zeta \tag{46}$$

$$=O\left\{\frac{1}{\nu+1}\left(\int\limits_{1-t}^{\tau_1(\nu)}+\int\limits_{t_2(\nu)}^{t_2}\right)\frac{t^2+(\sqrt{\nu+1}+1)t+1}{t^3}\,\varphi(t)\,dt\right\},$$

където $\varphi(t)=t-i(-z_0)^{1/2}\,t-2i(-z_0)^{-1}\,F[z_0-2it(-z_0)^{1/2}+t^2]$.

От предположенията за функцията $F(\zeta)$ следва, че съществува интервал $[-\delta, \delta]$ $(0<\delta<t_2)$, в който функцията $\varphi(t)$ е непрекъсната и следователно ограничена. Тогава при $\nu\to+\infty$ ще имаме

$$\frac{1}{\nu+1}\int\limits_{\tau_2(\nu)}^{t_2}\frac{\varphi(t)}{t}\,dt-\frac{1}{\nu+1}\int\limits_{\delta}^{t_2}\frac{\varphi(t)}{t}\,dt+\frac{1}{\nu+1}\int\limits_{\tau_2(\nu)}^{\delta}\frac{\varphi(t)}{t}\,dt$$

$$=O\left(\frac{1}{\nu+1}\right)+O\left(\frac{\ln(\nu+1)}{\nu+1}\right)=o(1).$$

Да положим

$$\Phi(t)=\int\limits_0^t\varphi(\tau)\,d\tau \qquad (-t_1\leqq t\leqq t_2).$$

Понеже $\Phi'(t)$ съществува в интервала $[-\delta, \delta]$, като имаме пред вид, че $\Phi(t)=o(t)$ при $t\to 0$ и използуваме формулата за интегриране по части, ще получим въз основа на (45), че при $\nu\to+\infty$

$$\frac{\sqrt{\nu+1}+1}{\nu+1}\int\limits_{\tau_2(\nu)}^{t_2}\frac{\varphi(t)}{t^2}\,dt=\frac{\sqrt{\nu+1}+1}{\nu+1}\int\limits_{\delta}^{t_2}\frac{\varphi(t)}{t^2}\,dt+\frac{\sqrt{\nu+1}+1}{\nu+1}\left\{\frac{\Phi(\delta)}{\delta^2}\right.$$

$$\left.-\frac{\Phi[\tau_2(\nu)]}{[\tau_2(\nu)]^2}+2\int\limits_{\tau_2(\nu)}^{\delta}\frac{\Phi(t)}{t^3}\,dt\right\}=O\left(\frac{1}{\sqrt{\nu+1}}\right)+o(1)+o\left(\frac{1}{\sqrt{\nu+1}}\int\limits_{\tau_2(\nu)}^{\delta}\frac{dt}{t^2}\right)=o(1)$$

$$\frac{1}{\nu+1}\int\limits_{\tau_2(\nu)}^{t_2}\frac{\varphi(t)}{t^3}\,dt=\frac{1}{\nu+1}\int\limits_{\delta}^{t_2}\frac{\varphi(t)}{t^3}\,dt+\frac{1}{\nu+1}\left\{\frac{\Phi(\delta)}{\delta^3}-\frac{\Phi[\tau_2(\nu)]}{[\tau_2(\nu)]^3}\right.$$

$$\left.+3\int\limits_{\tau_2(\nu)}^{\delta}\frac{\Phi(t)}{t^4}\,dt\right\}=O\left(\frac{1}{\nu+1}\right)+o(1)+o\left(\frac{1}{\nu+1}\int\limits_{\tau_2(\nu)}^{\delta}\frac{dt}{t^3}\right)=o(1).$$

Аналогично оценяваме и интегралите в граници от $-t_1$ до $\tau_1(\nu)$. От направените изводи и от равенството (46) следва, че

$$\lim_{\nu\to+\infty}\int\limits_{\Gamma(\mu_0,\rho)-\delta_\nu(z_0)}P_\nu(\zeta,z_0)F(\zeta)\,d\zeta=0. \tag{47}$$

Тогава от (43) и (47) следва (38), което трябваше да се докаже.

Забележка 5. Техниката, която употребихме при доказателството на теорема 4 (в случая, когато $F(z_0)=0$), е аналогична на тази, използувана при установяването на теоремата на Лебег за $(C,1)$-сумируемостта на редовете на Фурие в [9, с. 151]. Разбира се, съществена роля играе асимптотичната формула (32) за средните на Чезаро $\{\sigma_\nu(f;z_0)\}_{\nu=0}^{\infty}$, а също така и поведението на ядрото $K_\nu(\zeta,z_0)$ в околност на точката z_0, изразено чрез равенството (35).

Да се освободим сега от условието, което наложихме на $F(\zeta)$. Да положим за целта $H(\zeta)=F(\zeta)-F(z_0)(-\zeta)^\beta(-z_0)^{-\beta}\exp[-(\zeta-z_0)]$. Тогава $f(z)=h(z)+r(z)$, където

$$h(z)=-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\rho(\mu_0)}\frac{H(\zeta)}{\zeta-z}\,d\zeta,$$

$$r(z)=-\frac{F(z_0)}{2\pi i}\int\limits_{\rho(\mu_0)}\frac{(-\zeta)^\beta(-z_0)^{-\beta}\exp[-(\zeta-z_0)]}{\zeta-z}\,d\zeta.$$

Функцията $H(\zeta)$ удовлетворява същите изисквания, както и функцията $F(\zeta)$ и освен това $H(z_0)=0$. Следователно редът по функциите на Лагер от втори род, чрез който се представя функцията $h(z)$ в областта $\Delta^*(\mu_0)$, е $(C,1)$-сумируем в точката z_0 със сума

$$-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\rho(\mu_0)}\frac{H(\zeta)}{\zeta-z_0}\,d\zeta=-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\rho(\mu_0)}\frac{F(\zeta)}{\zeta-z_0}\,d\zeta$$

$$+\frac{F(z_0)}{2\pi i}\int\limits_{\rho(\mu_0)}\frac{(-\zeta)^\beta(-z_0)^{-\beta}\exp[-(\zeta-z_0)]}{\zeta-z_0}\,d\zeta.$$

Функцията $(-\zeta)^\beta(-z_0)^{-\beta}\exp[-(\zeta-z_0)]$ очевидно удовлетворява условията на теорема 2. Следователно съответният ред по функциите на

Лагер от втори род, чрез който се представя $r(z)$, е сходящ в точката z_0 със сума

$$-\frac{F(z_0)}{2\pi i}\int\limits_{p(\mu_0)}\frac{(-\zeta)^{\beta}(-z_0)^{-\beta}\exp[-(\zeta-z_0)]}{\zeta-z_0}\,d\zeta+\frac{1}{2}F(z_0).$$

Понеже всеки сходящ ред е и $(C, 1)$-сумируем със същата сума и освен това методът $(C, 1)$ е линеен, идваме до извода, че редът (1) е сумируем с метода на аритметичните средни със сума, която се дава от (12). С това теорема 4 е окончателно установена. Като нейно естествено следствие се явява следната

Теорема 5. Нека $0<\mu_0<+\infty$ и $f(z)$ е комплексна функция, която удовлетворява условията (а), (б) и (в) на теорема 3. Тогава редът (1), чрез който се представя $f(z)$ в областта $\Delta^*(\mu_0)$, е $(C, 1)$-сумируем във всяка точка $z_0\in p(\mu_0)$ със сума $f(z_0)$.

Доказателство. Както беше обърнато внимание по-горе във връзка с теорема 3, $f(z)$ се представя в областта $\Delta^*(\mu_0)$ чрез интеграла на Коши (25). Нещо повече, не е трудно да се убедим, че в случая за всяка точка $z_0\in p(\mu_0)$ съществува интегралът

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{p(\mu_0)}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z_0}\,d\zeta=-\frac{1}{2}f(z_0).$$

Тогава съгласно теорема 4 редът (1) е $(C, 1)$-сумируем в точката z_0 със сума

$$-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{p(\mu_0)}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z_0}\,d\zeta+\frac{1}{2}f(z_0)=f(z_0).$$

III

В тази част разглеждаме въпроса за сходимост, респ. сумируемост, по метода на Чезаро на една класа редове по полиномите на Лагер в точки от границата на областта им на сходимост. Основна роля ще играе възможността да изразим коефициентите на развитието на една аналитична функция в ред на полиномите на Лагер чрез самата функция и чрез функциите на Лагер от втори род. Достатъчни условия, които гарантираха такава възможност, бяха дадени в нашата работа [3]. Тук преди всичко ще установим резултат от този характер, който има и известно самостоятелно значение.

Теорема 6. Нека $0<\lambda_0<+\infty$, $\alpha>-1$ и $f(z)$ е комплексна функция, аналитична в полуравнината $H(\lambda_0)=\{z\in \mathbf{C}:\operatorname{Re}z>=\lambda_0^2\}$, и освен това, каквото и да е λ, $0<\lambda<\lambda_0$, $f(z)=o(1)$ при $z\to\infty$ и $z\in\overline{H(\lambda)}$. Тогава $f(z)$ се представя в областта $\Delta(\lambda_0)=\{z\in \mathbf{C}:\operatorname{Re}(-z)^{1/2}<\lambda_0\}$ чрез ред по полиномите на Лагер:

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n L_n^{(\alpha)}(z) \tag{48}$$

с коефициенти

$$a_n=-\frac{1}{2\pi i I_n^{(\alpha)}}\int_{-\lambda^2-i\infty}^{-\lambda^2+i\infty} M_n^{(\alpha)}(\zeta) f(\zeta)\, d\zeta \qquad (n=0,\ 1,\ 2,\ldots). \tag{49}$$

Доказателство. Преди всичко, както не е трудно да се убедим, във всяка полуравнина $H(\lambda)(0<\lambda<\lambda_0)$ функцията $f(z)$ е представима чрез интеграл на Коши, т. е. за $z \in H(\lambda)$

$$f(z)=-\frac{1}{2\pi i}\int_{-\lambda^2-i\infty}^{-\lambda^2+i\infty} \frac{f(\zeta)}{\zeta-z}\, d\zeta. \tag{50}$$

От (16), като разменим местата на z и ζ и умножим с $(2\pi i)^{-1} f(\zeta)$, получаваме следното равенство:

$$-\frac{f(\zeta)}{2\pi i(\zeta-z)}+\frac{1}{2\pi i I_0^{(\alpha)}} L_0^{(\alpha)}(z) M_0^{(\alpha)}(\zeta) f(\zeta) \tag{51}$$

$$=-\sum_{n=1}^{\nu}\frac{1}{2\pi i I_n^{(\alpha)}} L_n^{(\alpha)} M_n^{(\alpha)}(\zeta) f(\zeta)-\frac{\Delta_{\nu+1}^{(\alpha)}(z,\zeta) f(\zeta)}{2\pi i(\zeta-z)}.$$

В нашата работа [3] за $M_n^{(\alpha)}(z)$ при фиксирано n беше установена следната асимптотична формула при $z\to\infty$ в областта $\mathbf{C}-[0,+\infty)$, а именно:

$$M_n^{(\alpha)}(z)=O\left(\frac{1}{z^{n+1-(\alpha-[\alpha])}}\right).$$

От горната формула и от условието на теоремата следва, че интегралът (49) съществува (и даже е абсолютно сходящ) за всяко $n\geqq 1$. Имайки пред вид (17), от (50) и (51) заключаваме, че интегралът (49) съществува и при $n=0$. Освен това за всяко $z \in H(\lambda)$ ще бъде в сила равенството

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\nu}\left\{-\frac{1}{2\pi i I_n^{(\alpha)}}\int_{-\lambda^2-i\infty}^{-\lambda^2+i\infty} M_n^{(\alpha)}(\zeta) f(\zeta)\, d\zeta\right\} L_n^{(\alpha)}(z)+R_\nu(z) \tag{52}$$

$$=\sum_{n=0}^{\nu} a_n L_n^{(\alpha)}(z)+R_\nu(z),$$

където

$$(53)\qquad R_\nu(z)=-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{-\lambda^2-i\infty}^{-\lambda^2+i\infty}\frac{\Delta_{\nu+1}^{(\alpha)}(z,\ \zeta)f(\zeta)}{\zeta-z}\,d\zeta\,.$$

Ако установим, че $\lim\limits_{\nu\to+\infty} R_\nu(z)=0$, щом $z\in\Delta(\lambda)$, от (52) ще следва твърдението, което искаме да докажем. Преди всичко

$$(54)\qquad R_\nu(z)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\Delta_{\nu+1}^{(\alpha)}(z,\ -\lambda^2+i\tau)+(-\lambda^2+i\tau)}{\lambda^2+z-i\tau}\,d\tau$$

$$=\frac{(\nu+1)\,L_\nu^{(\alpha)}(z)}{2\pi\,I_\nu^{(\alpha)}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{M_{\nu+1}^{(\alpha)}(-\lambda^2+i\tau)\,f(-\lambda^2+i\tau)}{\lambda^2+z-i\tau}\,d\tau$$

$$-\frac{(\nu+1)\,L_{\nu+1}^{(\alpha)}(z)}{2\pi\,I_\nu^{(\alpha)}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{M_\nu^{(\alpha)}(-\lambda^2+i\tau)f(-\lambda^2+i\tau)}{\lambda^2+z-i\tau}\,d\tau=R_\nu^{(1)}(z)+R_\nu^{(2)}(z)\,.$$

Като имаме пред вид формулата на Стирлинг, асимптотичната формула (22) за полиномите на Лагер, а също така и условието на теоремата, ще получим, че

$$R_\nu^{(1)}(z)=O\Big(\nu^{-\frac{\alpha}{2}+\frac{3}{4}}\exp\left[2\,\mathrm{Re}\,(-z)^{1/2}\sqrt{\nu+1}\right]\int\limits_{-\infty}^{\infty}M_\nu^{(\alpha)}(-\lambda^2+i\tau)\;d\tau\Big).$$

От определението на функциите на Лагер от втори род чрез равенствата (5) следва неравенството

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}M_\nu^{(\alpha)}(-\lambda^2+i\tau)\;d\tau\leqq\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left\{\int\limits_0^\infty\frac{t^{\nu+\alpha}e^{-t}\,dt}{[(t+\lambda^2)^2+\tau^2]^{(\nu+1)/2}}\right\}d\tau\,,$$

от което чрез смяна на интеграционната променлива τ $(\tau=(t+\lambda^2)u)$ получаваме, че за $\nu\geqq1$

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}M_\nu^{(\alpha)}(-\lambda^2+i\tau)\;d\tau\leqq\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left\{\int\limits_0^\infty\frac{t^{\nu+\alpha}e^{-t}\,dt}{(t+\lambda^2)^\nu}\right\}\frac{du}{(1+u^2)^{(\nu+1)/2}}$$

$$\leqq\pi\int\limits_0^\infty\frac{t^{\nu+\alpha}e^{-t}}{(t+\lambda^2)^\nu}\,dt=-\pi\,M_{\nu-1}^{(\alpha+1)}(-\lambda^2)\,.$$

Тогава от асимптотичната формула (3) за функциите на Лагер от втори род получаваме, че

$$R_\nu^{(1)}(z) = O\{\nu \exp[-2\lambda\sqrt{\nu-1} + 2\,\mathrm{Re}\,(-z)^{1/2}\sqrt{\nu+1}]\}$$

и понеже $\mathrm{Re}\,(-z)^{1/2} < \lambda$, тъй като $z \in \Delta(\lambda)$, следва, че $\lim\limits_{\nu\to+\infty} R_\nu^{(1)}(z) = 0$. По аналогичен начин установяваме, че и $\lim\limits_{\nu\to+\infty} R_\nu^{(2)}(z) = 0$ за $z \in \Delta(\lambda)$, а тогава от (54) следва, че $\lim\limits_{\nu\to+\infty} R_\nu(z) = 0$.

Теорема 7. Нека $0 < \lambda_0 < +\infty$, $\alpha > -1$ и $f(z)$ е комплексна функция, дефинирана и непрекъсната върху затворената полуравнина $\overline{H}(\lambda_0)$ и аналитична в $H(\lambda_0)$. Да допуснем освен това, че $f(z)$ удовлетворява следните изисквания:

(а) $f(z) = o(1)$ при $z \to \infty$ и $z \in H(\lambda_0)$;

(б) $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(-\lambda_0^2 + i\tau)\, d\tau < +\infty$.

Тогава функцията $f(z)$ се представя в областта $\Delta(\lambda_0)$ чрез ред от вида (48) по полиномите на Лагер $\{L_n^{(\alpha)}(z)\}_{n=0}^{\infty}$ и този ред е сходящ със сума $f(z_0)$ за всяка точка $z_0 \in p(\lambda_0)$, отлична от $-\lambda_0^2$.

Доказателство. Първата част от твърдението на теоремата е непосредствено следствие от теорема 6. Нещо повече, в случая за коефициентите на реда (48) ще бъдат в сила равенствата

$$a_n = -\frac{1}{2\pi i\, I_n^{(\alpha)}} \int\limits_{-\lambda_0^2 - i\infty}^{-\lambda_0^2 + i\infty} M_n^{(\alpha)}(\zeta) f(\zeta)\, d\zeta \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots).$$

Ако положим по определение

$$S_\nu(f;\, z) = \sum_{n=0}^{\nu} a_n L_n^{(\alpha)}(z),$$

като имаме пред вид, че съгласно условията на теоремата функцията $f(z)$ е представима в полуравнината $H(\lambda_0)$ чрез съответен интеграл на Коши (50) с $\lambda = \lambda_0$, от формулата на Кристофел — Дарбу, която вече няколко пъти използувахме, ще получим, че ако $z_0 \in p(\lambda_0)$ и $z_0 \neq -\lambda_0^2$,

$$S_\nu(f;\, z_0) = f(z_0) + \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{-\lambda_0^2 - i\infty}^{-\lambda_0^2 + i\infty} \frac{\Delta_{\nu+1}^{(\alpha)}(z_0, \zeta)}{\zeta - z_0} f(\zeta)\, d\zeta. \tag{55}$$

Следователно, за да установим втората част от твърдението на теоремата, трябва да покажем, че

$$\lim_{\nu\to+\infty}\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{-\lambda_0^2-i\infty}^{-\lambda_0^2+i\infty}\frac{\Delta_{\nu+1}^{(\alpha)}(z_0,\zeta)}{\zeta-z_0}f(\zeta)\,d\zeta=0. \tag{56}$$

От определението (5) на функциите на Лагер от втори род получаваме, че за $-\infty<\tau<+\infty$ ще бъде изпълнено неравенството

$$|M_n^{(\alpha)}(-\lambda_0^2+i\tau)|\leqq\int\limits_0^\infty\frac{t^{n+\alpha}e^{-t}}{[(t+\lambda_0^2)^2+\tau^2]^{(n+1)/2}}\,dt \tag{57}$$

$$\leqq\int\limits_0^\infty\frac{t^{n+\alpha}e^{-t}}{(t+\lambda_0^2)^{n+1}}\,dt=-M_n^{(\alpha)}(-\lambda_0^2).$$

Като имаме пред вид (19), асимптотичната формула (23) за полиномите на Лагер, неравенството (57), асимптотичната формула (3) за функциите на Лагер от втори род, а също така и условието (б) на теоремата, не е трудно да се убедим, че равномерно по ν

$$\lim_{\rho\to+\infty}\int\limits_{-\lambda_0^2-i\infty}^{-\lambda_0^2-i\rho}\frac{\Delta_{\nu+1}^{(\alpha)}(z_0,\zeta)}{\zeta-z_0}f(\zeta)\,d\zeta=0$$

и

$$\lim_{\rho\to+\infty}\int\limits_{-\lambda_0^2+i\rho}^{-\lambda_0^2+i\infty}\frac{\Delta_{\nu+1}^{(\alpha)}(z_0,\zeta)}{\zeta-z_0}f(\zeta)\,d\zeta=0.$$

За да установим (56), остава да покажем, че за всяко $\rho>0$ е в сила равенството

$$\lim_{\nu\to+\infty}\int\limits_{-\lambda_0^2-i\rho}^{-\lambda_0^2+i\rho}\frac{\Delta_{\nu+1}^{(\alpha)}(z_0,\zeta)}{\zeta-z_0}f(\zeta)\,d\zeta=0. \tag{58}$$

За целта да обърнем внимание, че редицата $\{\Delta_{\nu+1}^{(\alpha)}(z_0,\zeta)\}_{\nu=0}^{\infty}$ е равномерно ограничена върху всяко ограничено подмножество на областта $\Delta^*(\lambda_0)$. Това следва от (23), като имаме пред вид, че $\mathrm{Re}[\eta(z_0,\zeta)]\leqq 0$ за всяко $\zeta\in\Delta^*(\lambda_0)$ и освен това, че затворената обвивка на ограничено подмножество на $\Delta^*(\lambda_0)$ е компактно подмножество на $C-[0,+\infty)$. Освен това е в сила равенството $\lim\limits_{\nu\to+\infty}\Delta_{\nu+1}^{(\alpha)}(z_0,\zeta)=0$ равномерно върху всяко

компактно подмножество на $\Delta^*(\lambda_0)$. Наистина, ако $K \subset \Delta^*(\lambda_0)$ е компактно' съществува $\theta = \theta(K) > 0$, такова, че $\mathrm{Re}(-\zeta)^{1/2} \leqq -(\lambda_0 + \theta)$ за всяко $\zeta \in K$. Следователно $E_\nu(z_0, \zeta) = \exp[2\sqrt{\nu+1}\,\eta(z_0, \zeta)] \leqq \exp(-2\theta\sqrt{\nu+1})$ за всяко $\zeta \in K$ и $\nu = 0, 1, 2, \ldots$ и нашето твърдение следва пак от (23).

Да изберем сега произволно $\varepsilon > 0$ и да определим $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ по такъв начин, че да е в сила неравенството

$$\left| \int_{-\lambda_0^2 - i\delta}^{-\lambda_0^2 + i\delta} \frac{\Delta_{\nu+1}^{(\alpha)}(z_0, \zeta)}{\zeta - z_0} f(\zeta)\, d\zeta \right| < \frac{\varepsilon}{3}$$

равномерно по ν. Това е възможно да се направи, като се има пред вид казаното по-горе за редицата $\{\Delta_{\nu+1}^{(\alpha)}(z_0, \zeta)\}_{\nu=0}^{\infty}$ и освен това, че функцията $f(z)$ е непрекъсната.

По-нататък, при фиксирано δ можем да изберем $N = N(\delta)$ така, че за $\nu > N$ да бъдат изпълнени неравенствата $(\rho > \delta)$

$$\left| \int_{-\lambda_0^2 + i\delta}^{-\lambda_0^2 + i\rho} \frac{\Delta_{\nu+1}^{(\alpha)}(z_0, \zeta)}{\zeta - z_0} f(\zeta)\, d\zeta \right| < \frac{\varepsilon}{3},$$

$$\left| \int_{-\lambda_0^2 - i\rho}^{-\lambda_0^2 - i\delta} \frac{\Delta_{\nu+1}^{(\alpha)}(z_0, \zeta)}{\zeta - \zeta_0} f(\zeta)\, d\zeta \right| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Това е възможно, понеже всяка от отсечките $[-\lambda_0^2 + i\delta, -\lambda_0^2 + i\rho]$ и $[-\lambda_0^2 - i\rho, -\lambda_0^2 - i\delta]$ е компактно подмножество на областта $\Delta^*(\lambda_0)$.

От горните неравенства следва, че за същите стойности на ν ще бъде изпълнено неравенството

$$\left| \int_{-\lambda_0^2 - i\rho}^{-\lambda_0^2 + i\rho} \frac{\Delta_{\nu+1}^{(\alpha)}(z_0, \zeta)}{\zeta - z_0} f(\zeta)\, d\zeta \right| < \varepsilon,$$

с което равенството (58) е установено.

При допълнителни предположения за функцията $f(z)$ редът (48) ще бъде сходящ и в точката $-\lambda_0^2$. Преди да приведем съответния резултат обаче, ние ще формулираме твърдение, аналогично на теорема 1, но отнасящо се до редове по полиномите на Лагер.

Теорема 8. Ако редът (48) е сходящ в точката $z_0 \in \mathbf{C} - [0, +\infty)$, то в сила е равенството $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = f(z_0)$ при условие, че z принадлежи на областта $\Delta(\lambda_0)$ и $|z - z_0| = O\{\lambda_0 - \mathrm{Re}(-z)^{1/2}\}$.

Доказателството на теорема 8 е напълно аналогично на това на теорема 1. То се опира на асимптотичната формула (23) за полиномите на Лагер, а също така и на съотношението $L_n^{(\alpha)}(z)=L_{n+1}^{(\alpha)}(z)-L_{n+1}^{(\alpha-1)}(z)$.

Теорема 9. Нека $0<\lambda_0<+\infty$, $\alpha>-1$ и $f(z)$ е комплексна функция, дефинирана и непрекъсната върху затворената полуравнина $\overline{H(\lambda_0)}$ и аналитична в $H(\lambda_0)$. Да допуснем, че $f(z)$ удовлетворява условията (а) и (б) на теорема 7 и освен това още следните изисквания:

$$\int\limits_{p(\lambda_0)} \frac{f(\zeta)}{\zeta}\, ds<+\infty \tag{59}$$

и

$$\int\limits_{-\lambda_0^2-i\rho}^{-\lambda_0^2+i\rho} \frac{f(\zeta)-f(-\lambda_0^2)}{\zeta+\lambda_0^2}\, ds<+\infty \qquad (\rho>0). \tag{60}$$

Тогава редът (48) е сходящ в точката $-\lambda_0^2$ със сума $f(-\lambda_0^2)$.

Доказателство. Без да се спираме подробно върху съответните изводи, ще отбележим, че с помощта на асимптотичните формули за полиномите и функциите на Лагер от втори род, а също така и на неравенството (57) за парциалните суми $\{S_\nu(f;\ -\lambda_0^2)\}$ може да бъде получено следното представяне:

$$S_\nu(f;\ -\lambda_0^2)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{-\lambda_0^2-i\infty}^{-\lambda_0^2+i\infty} \frac{E_\nu(-\lambda_0^2,\ \zeta)-1}{\zeta+\lambda_0^2}\, f(\zeta)\, d\zeta+o(1).$$

Като имаме пред вид обаче, че за всяко $\nu=0, 1, 2, \ldots$ функцията $E_\nu(-\lambda_0^2,\ \zeta)$ е ограничена в затворената област $\overline{\Delta^*(\lambda_0)}$ и вземем под внимание условията, които функцията $f(z)$ удовлетворява, от горното представяне не е трудно да получим, че

$$S_\nu(f;\ -\lambda_0^2)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{p(\lambda_0)} \frac{E_\nu(-\lambda_0^2,\ \zeta)-1}{\zeta+\lambda_0^2}\, f(\zeta)\, d\zeta+o(1). \tag{61}$$

Наистина, ако означим с $\gamma(\rho)$ частта от окръжността $\zeta+\lambda_0^2=\rho$ (ориентирана в отрицателна посока), която лежи вън от параболата $p(\lambda_0)$ и в полуравнината $H(\lambda_0)$, от интегралната теорема на Коши следва, че

$$\int\limits_{-\lambda_0^2-i\rho}^{-\lambda_0^2+i\rho} \frac{E_\nu(-\lambda_0^2,\ \zeta)-1}{\zeta+\lambda_0^2}\, f(\zeta)\, d\zeta=-\int\limits_{\Gamma(\lambda_0,\ \rho)} \frac{E_\nu(-\lambda_0^2,\ \zeta)-1}{\zeta+\lambda_0^2}\, f(\zeta)\, d\zeta$$

$$-\int\limits_{\gamma(\rho)} \frac{E_\nu(-\lambda_0^2, \zeta)-1}{\zeta+\lambda_0^2} f(\zeta)\, d\zeta.$$

Обаче като имаме пред вид, че $f(z)=o(1)$ при $z\to\infty$ в полуравнината $\overline{H(\lambda_0)}$, ще получим, че

$$\lim_{\rho\to+\infty} \int\limits_{\gamma(\rho)} \frac{E_\nu(\ \lambda_0^2, \zeta)-1}{\zeta+\lambda_0^2} f(\zeta)\, d\zeta=0,$$

с което равенството (61) е установено.

По-нататък частта от доказателството, която се отнася до установяването на сходимостта на реда (48) в точката $-\lambda_0^2$, продължава така, както и съответната част от доказателството на теорема 2. Специално условието (59) е достатъчно, за да твърдим, че равномерно по ν е в сила равенството

$$\lim_{\rho\to+\infty} \int\limits_{\Gamma^*(\lambda_0, \rho)} \frac{E_\nu(-\lambda_0^2, \zeta)-1}{\zeta+\lambda_0^2} f(\zeta)\, d\zeta=0.$$

Най-сетне фактът, че сумата на реда (48) в разглеждания случай е $f(-\lambda_0^2)$, следва от теорема 8.

В заключение ще формулираме, без да привеждаме доказателство, резултат, който е аналогичен на теорема 5.

Теорема 10. Нека $0<\lambda_0<+\infty$, $\alpha>-1$, и $f(z)$ е комплексна функция, която удовлетворява условията на теорема 7 и условието (59) на теорема 9. Тогава редът (48), чрез който $f(z)$ се представя в областта $\Delta(\lambda_0)$, е $(C, 1)$-сумируем в точката $-\lambda_0^2$ със сума $f(-\lambda_0^2)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Русев, П.: Сходимост на редове по полиномите на Лагер, Год. Соф. унив., Мат. фак., 67 (1972/73), 249—267.
2. Русев, П.: Функции на Лагер от втори род. Год. Соф. унив., Мат. фак., 67 (1972/73), 269—281.
3. Русев, П.: Развитие на аналитични функции в редове на Лагер. Год. Соф. унив., Фак. мат. и мех., 68 (1973/74).
4. Русев, П.: Сходимост на редове по полиномите на Якоби и Бесел върху границите на областите им на сходимост. Изв. Мат. инст. БАН, 9 (1966), 73—83.
5. Байчев, Ив.: Сходимост и сумируемост на редове по обобщените полиноми на Бесел. Изв. Мат. инст. БАН, 10 (1969), 17—26.
6. Маркушевич, А. И.: Теория аналитических функций. М., 1950.
7. Сеге. Г.: Ортогональные многочлены. М., 1962.
8. Смирнов, В. И.: Курс высшей математики, т. III, ч. 2, М., 1957.
9. Зигмунд, А.: Тригонометрические ряды. I. М., 1965.

Постъпила на 29. XII. 1975 г.

CONVERGENCE AND (C, 1)-SUMMABILITY OF LAGUERRE SERIES ON THE BOUNDARIES OF THEIR REGIONS OF CONVERGENCE

P. Rusev

(SUMMARY)

Under Laguerre series we consider a series of the kind

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n L_n^{(\alpha)}(z), \tag{1}$$

resp.

$$\sum_{n=0}^{\infty} b_n M_n^{(\alpha)}(z), \tag{2}$$

where $\{L_n^{(\alpha)}(z)\}_{n=0}^{\infty}$ are Laguerre polynomials with parameter α and $\{M_n^{(\alpha)}(z)\}_{n=0}^{\infty}$ are the corresponding functions of second kind.

If $\lambda_0 := -\lim_{n\to\infty}(2\sqrt{n})^{-1}\ln a_n$ and $0<\lambda_0\leqq+\infty$, the series (1) is absolutely uniformly convergent on every compact subset of the region $\Delta(\lambda_0)=\{z \in \mathbf{C}: \mathrm{Re}(-z)^{1/2}<\lambda_0\}$. Respectively, the series (2) has this property in the region $\Delta^*(\mu_0)=\{z \in \mathbf{C}: \mathrm{Re}(-z)^{1/2}>\mu_0\}$ where $\mu_0=\overline{\lim_{n\to+\infty}}(2\sqrt{n})^{-1}\ln|b_n|$ provided that $0\leqq\mu_0<+\infty$.

In the paper some results are given about the behaviour of the series (1) and (2) at points of the boundaries of their regions of convergence.

Theorem 1. Let $z_0 \in p(\mu_0)=\partial\Delta^*(\mu_0)$ and $F(\zeta)$ $(\zeta \in p(\mu_0))$ be a complex function satisfying the following conditions:

(a) for every $\rho>\max(1, 2\mu_0^2)$

$$\int_{\Gamma(\mu_0,\rho)} F(\zeta)\,ds<+\infty,$$

where $\Gamma(\mu_0, \rho)=p(\mu_0)\cap\{z\leqq\rho\}$;

(b) $F(\zeta)=O\{|\zeta|^{\beta}\exp(-\zeta)\}$ for some $\beta<\alpha/2-3/4$, if $\zeta \in p(\mu_0)$ and $\zeta\to\infty$

(c) $$\int_{\Gamma(\mu_0,\rho)} \frac{F(\zeta)-F(z_0)}{\zeta-z_0}\,ds<+\infty,\quad \rho>\max(1, 2\mu_0^2, |z_0|).$$

Then, the function

$$f(z)=-\frac{1}{2\pi i}\int_{p(\mu_0)}\frac{F(\zeta)}{\zeta-z}\,d\zeta \tag{3}$$

can be represented in the region $\Delta^*(\mu_0)$ by a series of the kind (2), this series is convergent at the point z_0 and its sum is

$$(4)\qquad \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{p(\mu_0)}\frac{F(\zeta)}{\zeta-z_0}\,d\zeta+\frac{1}{2}F(z_0).$$

The proof of this theorem is based on the asymptotic formula for the partial sums $\{S_\nu(f;\ z_0)\}_{\nu=0}^{\infty}$ of the series (2), namely

$$(5)\qquad S_\nu(f;\ z_0)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{p(\mu_0)}\frac{\exp\{2[(-\zeta)^{1/2}-(-z_0)^{1/2}]\sqrt{\nu+1}\}-1}{\zeta-z_0}F(\zeta)\,d\zeta+o(1).$$

By using (5) and also Euler-Maclorain summation formula we derive for the corresponding Cesaro means $\{\sigma_\nu(f;\ z_0)\}_{\nu=0}^{\infty}=\left\{(\nu+1)^{-1}\sum\limits_{n=0}^{\nu}S_n(f;\ z_0)\right\}_{\nu=0}^{\infty}$ the following asymptotic formula

$$(6)\qquad \sigma_\nu(f;\ z_0)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{p(\mu_0)}K_\nu(\zeta,\ z_0)\,F(\zeta)\,d\zeta+o(1),$$

where the kernel $K_\nu(\zeta,\ z_0)$ is given by the equality

$$(\zeta-z_0)\,K_\nu(\zeta,\ z_0)=(\nu+1)^{-1}\left\{\int\limits_0^{\nu}\exp\left(2\,[(-\zeta)^{1/2}-(-z_0)^{1/2}]\sqrt{t+1}\right)dt\right.$$

$$\left.+\frac{1}{2}(2\,(-\zeta)^{1/2}-(-z_0)^{1/2}]\sqrt{\nu+1})+\frac{1}{2}\exp\left[2\,(-\zeta)^{1/2}-(-z_0)^{1/2}]\right)\right\}-1.$$

Having (6) in view, one can prove

Theorem II. Let $F(\zeta)$ be a complex function satisfying the conditions (a) and (b) of theorem I. Suppose further that $F(\zeta)$ is continuous on an arc $l\ni z_0$ of the parabola $p(\mu_0)$. If in (4) the integral exists in the sense of Cauchy, then the series (2) is $(C,\ 1)$-summable at the point z_0 to the sum (4).

Further some results about series in Laguerre polynomials are given namely

Theorem III. Let $0<\lambda_0<+\infty$, $\alpha>-1$ and $f(z)$ be a complex function continuous on the closed half-plane $\overline{H(\lambda_0)}=\{z\in\mathbf{C}:\operatorname{Re}z\geqq-\lambda_0^2\}$, analytic in $H(\lambda_0)$ and satisfying the following conditions:

(a) $f(z)=o(1)$ if $z\to\infty$ and $z\in\overline{H(\lambda_0)}$.

(b) $\int\limits_{-\infty}^{\infty}|f(-\lambda_0^2+i\tau)\,d\tau<+\infty$.

Then the function $f(z)$ can be represented in the region $\Delta(\lambda_0)$ by a series of the kind (1) and this series is convergent with sum $f(z_0)$ at every point $z_0\in p(\lambda_0)$ different from $-\lambda_0^2$.

Theorem IV. Let $0<\lambda_0<+\infty$, $\alpha>-1$ and $f(z)$ be a complex function continuous on the closed half-plane $\overline{H(\lambda_0)}$, analytic in $H(\lambda_0)$, satisfying (a) and (b) of theorem 3 and also the following conditions:

$$\int\limits_{p(\lambda_0)} \left|\frac{f(\zeta)}{\zeta}\right| ds<+\infty; \tag{7}$$

$$\int\limits_{-\lambda_0^2-i\rho}^{-\lambda_0^2-i\rho} \left|\frac{f(\zeta)-f(\lambda_0^2)}{\zeta-\lambda_0^2}\right| ds<+\infty \qquad (\rho>0). \tag{8}$$

Then the series (1) converges at the point $-\lambda_0^2$ with sum $f(-\lambda_0^2)$.

Theorem V. Let $0<\lambda_0<+\infty$, $\alpha>-1$, and $f(z)$ be a complex function satisfying the conditions of theorem 3 and also the condition (7) of theorem 4. Then the series (1) is $(C, 1)$-summable at the point $-\lambda_0^2$ to the sum $f(-\lambda_0^2)$.