ВЪРХУ ЗАДАЧАТА НА ДИРИХЛЕ ЗА ЕДИН КЛАС КВАЗИЛИНЕЙНИ УРАВНЕНИЯ ОТ ВТОРИ РЕД С НЕОТРИЦАТЕЛНА ХАРАКТЕРИСТИЧНА ФОРМА

Георги И. Чобанов

В работата [1] е разгледана задачата на Коши за уравнението

$$a^{ij}(x, t, u)u_{ij}+b^i(x, t, u)u_i-u_t=f(x, t, u)$$

(както обикновено, повтарящи се индекси означават сумиране от 1 до n и $u_i=u_{x_i}$, $u_{ij}=u_{x_ix_j}$), където във всяка точка от дефиниционната област на коефициентите $a^{ij}(x, t, y)$ е изпълнено условието $a^{ij}(x, t, y)\xi_i\xi_j\geqq 0$ за неотрицателност на характеристичната форма при произволни реални ξ_i и са доказани теореми за съществуване и единственост на решението, като е използувана комбинирана версия на методите на последователните приближения и на параболичната регуляризация.

В настоящата работа са разгледани гранични задачи за уравнението

$$a^{ij}(x, u)u_{ij}+a^i(x, u)u_i-a(x, u)u=f(x), \tag{1}$$

където във всяка точка от дефиниционната област на коефициентите $a^{ij}(x, y)$ е изпълнено условието $a^{ij}(x, y)\xi_i\xi_j\geqq 0$ $(\xi_i\in R)$ и са доказани теореми за съществуване и единственост на решението, като е използувана комбинирана версия на методите на последователните приближения и на елиптичната регуляризация.

В работата [2] е дадена коректната постановка на граничните задачи за линейните уравнения

$$a^{ij}(x)u_{ij}+a^i(x)u_i-a(x)u=f(x) \tag{2}$$

с неотрицателна характеристична форма. Нека областта Ω в R^n има контур $\Sigma=\bigcup_{\nu=0}^{3}\Sigma_\nu$, където Σ_3 е множеството на точките $x\in\Sigma$, в които $a^{ij}(x)\nu_i(x)\nu_j(x)>0$ (тук $\nu(x)=(\nu_1(x), \ldots, \nu_n(x))$ е единичен вектор на външната нормала към Σ), а Σ_2, Σ_1 и Σ_0 са съответно онези подмножества на $\Sigma\backslash\Sigma_3$, за които $b(x)>0$, $b(x)<0$ и $b(x)=0$ при $b(x)=(a^i(x)-a^{ij}_j(x))\nu_i(x)$; тогава коректната постановка на граничните задачи за уравненията (2) се състои в задаване на условия върху $\Sigma_2\bigcup\Sigma_3$.

По аналогия при граничните задачи за квазилинейните уравнения (1), които се разглеждат тук, S означава множеството на точките $x\in\Sigma$ с $a^{ij}(x, y)\nu_i(x)\nu_j(x)=0$ за всяко y от някакъв интервал $(-M, M)$, а S_2 —

множеството на точките $x \in S$, за които $(a^i(x, y) - a^{ij}_j(x, y))\nu_i(x) > 0$ (разбира се, може да се окаже S, а с него и S_2 да е празното множество, но в настоящата работа се разглежда случаят $S_2 = \Sigma$).

Възприети са следните традиционни означения. Ако $f(x)$ и $g(x, y)$ са диференцируеми функции с дефиниционни области съответно в R^n и R^{n+1}, по дефиниция

$$D^\alpha f(x) = \frac{\partial^\alpha f(x_1, \ldots, x_n)}{\partial x_1^{\alpha_1} \ldots \partial x_n^{\alpha_n}}, \tag{3}$$

$$D^{\alpha+p} g(x, y) = \frac{\partial^{\alpha+p} g(x_1, \ldots, x_n, y)}{\partial x_1^{\alpha_1} \ldots \partial x_n^{\alpha_n} \partial y^p}, \tag{4}$$

където $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ е наредена n-орка от неотрицателни цели числа и $\alpha = \sum_{\nu=1}^{n} \alpha_\nu$; ако k е неотрицателно цяло число и $f(x)$ е k пъти непрекъснато диференцируема в G, то

$$f_{C_0(\bar{G})} = \max_{G} f(x), \tag{5}$$

$$f^2_{C_k(G)} = \sum_{\alpha \leq k} D^\alpha f(x)^2_{C_0(G)}. \tag{6}$$

В настоящата работа се използва следният вариант на принципа за максимум.

Принцип за максимум. Нека операторът

$$L(u) = a^{ij}(x) u_{ij} + a^i(x) u_i - a(x) u$$

е дефиниран в $G \subset R^n$ и $a^{ij}\xi_i\xi_j \geq 0$, $a > 0$. Тогава от $u \in C^2(G) \cap C(G)$, $L(u) \geq 0$ $(L(u) \leq 0)$ в G и $u_{\partial G} \leq 0$ $(u_{\partial G} \geq 0)$ следва $u \leq 0$ $(u \geq 0)$ в G.

Използва се и неравенството

$$(a^{ij}_k u_{ij})^2 \leq (c(n) \max_{\alpha=2} |D^\alpha a^{ij}|) a^{ij} u_{ik} u_{jk} \tag{7}$$

[3], където $c(n)$ е константа, която зависи само от размерността n.

От доказателството на (7) се вижда, че за всяка двукратно гладка неотрицателна финитна функция φ е в сила

$$(\operatorname{grad} \varphi)^2 \leq 2n \max_{\alpha=2} |D^\alpha \varphi| \varphi. \tag{8}$$

Ще използуваме известните оценки на Шаудер. По-точно за всеки равномерно елиптичен оператор L, дефиниран в областта $\{x : x \in R^n, x_n > 0\}$, е в сила

$$|u|_{C_{2+\gamma}(\Sigma_r)} \leq C \left(1 - \frac{r}{R}\right)^{-(2+\gamma)^2} (|L(u)|_{C_\gamma(\Sigma_R)} + |u|_{C_0(\Sigma_R)}), \tag{9}$$

където $0<\gamma<1$, $\Sigma_r=\{x: x<r,\ x_n>0\}$, $0<r<R\leqq R_0$ за всяко u от $C_{2+\gamma}(\Sigma_R)$ с $u_{x_n=0}=0$, константата C зависи от γ и n, от нормите на коефициентите на оператора L в $C_\gamma(\Sigma_R)$ и от константата на елиптичност, а R_0 се определя от коефициентите на оператора ([4], § 5.6). От (9) се извежда лесно неравенството

$$(10)\qquad \|u\|_{C_{3+\gamma}(\Sigma_r)}\leqq C'\left(1-\frac{r}{R}\right)^{-(3+\gamma)^2}\left(\|L(u)\|_{C_{1+\gamma}(\Sigma_R)}+\|u\|_{C_0(\Sigma_R)}\right)$$

за функции $u\in C_{3+\gamma}(\Sigma_R)$, където C' сега зависи от нормите на коефициентите в $C_{1+\gamma}(\Sigma_R)$, а R_0 има посочения по-горе смисъл. От дадената в [4] дефиниция на хьолдерови норми при $R=R_0$ и $r=\frac{R_0}{2}$ от (10) следва

$$(11)\qquad \sum_{\alpha\leqq 3}\sup_{\Sigma_r}|D^\alpha u|\leqq C'\,2^9\left(\frac{2}{R_0}\right)^4\left(\|L(u)\|_{C_{1+\gamma}(\Sigma_{R_0})}+\|u\|_{C_0(\Sigma_{R_0})}\right).$$

Нека $G\subset R^n$ е област с контур от класа $C_{3+\gamma}$ и за всяко x_0 от ∂G нека частта от контура $\partial G\cap\{x: |x-x_0|<1\}$ се задава с функции, чиито хьолдерови норми до ред $3+\gamma$ не надминават някоя фиксирана константа. Такива области са например всички кълба с достатъчно голям радиус; по-долу G ще означава само области, които притежават горното свойство по отношение на една и съща константа.

Да разгледаме в област G оператор от вида

$$(12)\qquad L(u)=K\Delta u-a_0 u,$$

където K и a_0 са константи с $\frac{1}{4}\leqq K\leqq\frac{1}{3}$ и $a_0>1$. Като изправим локално контура на областта G и приложим неравенството (11), получаваме, че за всяка точка x_0 от контура ∂G съществуват такива околности G' и G'' с $G'\subset G''\subset G$ (а именно прообразите на $\Sigma_{\frac{R_0}{2}}$ и Σ_{R_0}), че да е в сила

$$(13)\qquad \sum_{|\alpha|\leqq 3}\sup_{G'}|D^\alpha u|\leqq\frac{C_1}{R_0^4}\left(\|L(u)\|_{C_{1+\gamma}(G'')}+\|u\|_{C_0(G'')}\right)$$

за всички u с $u_{\partial G}=0$. Сега константата C_1 зависи само от a_0, а от доказателството на (9) се вижда, че в този случай R_0 зависи само от $\frac{1}{a_0}$, т. е. с евентуално засилване на неравенството (13) може да се осигури валидността на

$$(14)\qquad \sum_{\alpha\leqq 3}\sup_{G'}|D^\alpha u|\leqq C_2\,a_0^4\left(\|L(u)\|_{C_{1+\gamma}(G'')}+\|u\|_{C_0(G'')}\right).$$

Теорема 1. Нека Ω е ограничена област в R^n с частично гладък контур Σ, а операторът

(15) $$L(u)\equiv a^{ij}(x,\ u)\,u_{ij}+a^{i}(x,\ u)\,u_i-a(x,\ u)\,u$$

е дефиниран в $\Omega'\supset\bar{\Omega}$ и коефициентите му са поне трикратно гладки в $\Omega'\times(-M,\ M)\,(M>0)$. При $\xi=(\xi_1,\ldots,\ \xi_n)$ нека

(16) $$a^{ij}(x,\ y)\,\xi_i\xi_j\geqq 0\ \ [\xi\in R^n,\ (x,\ y)\in\Omega'\times(-M,\ M)],$$

$\Sigma=S_2$ за оператора L, $a(x,\ y)=c(x,\ y)+a_0\geqq a_0$,

(17) $$a_0>1+n^3 m_3+(6n^2+12n+3)\,c(n)\,m_2+(6n+3)\,m_1$$

при

(18) $$\varphi\in C_0^3(\Omega'),\ 0\leqq\varphi\leqq 1,\ \varphi(x)=1\ \ (x\in\Omega),$$

(19) $$m_k=\max_{\Omega'\times(-M,\ M)}\{|D^{\alpha+p}(\varphi\,a^{ij})|,\ |D^{\alpha+p}(\varphi\,a^{i})|,\ |D^{\alpha+p}(\varphi\,c)|\}$$

($|\alpha|+p=k,\ k=1,\ 2,\ 3$). Тогава уравнението

(20) $$L(u)=f$$

в Ω с

(21) $$u|_{\Sigma}=0$$

притежава класическо решение за всяка $f\in C^3(\Omega')$ с

(22) $$f(x)=0\quad(x\in\Omega'\backslash\Omega)$$

при

(23) $$\eta_0=\frac{1}{a_0}\,|f|_{C_0(\bar{\Omega}')}<M,$$

(24) $$a_0\geqq 1+n^3(m_3(1+\eta_1+\eta_1^2+\eta_1^3)+m_2\,\eta_2(1+\eta_1)+m_1\,\eta_3)$$
$$+(6n^2+12n+3)\,c(n)(m_2(1+\eta_1+\eta_1^2)+m_1\,\eta_2)+(6n+3)\,m_1(1+\eta_1),$$

където

(25) $$\eta_k=\frac{1}{\sqrt{a_0}}\,|f|_{C_k(\Omega')}\quad(k=1,\ 2,\ 3).$$

Доказателството на теорема 1 се основава на леми 1—5, следващи по-долу. Да отбележим, че поради (17) съществуват функции f, които удовлетворяват условията на теоремата.

Нека D е едносвързана област, $D\supset\Omega'$, и

(26) $$M(u)\equiv b^{ij}(x,\ u)\,u_{ij}+b^{i}(x,\ u)\,u_i-b(x,\ u)\,u$$

е оператор, дефиниран в D и съвпадащ с L в Ω, като

(27) $$b^{ij}(x,\ y)\,\xi_i\xi_j\geqq 0\ \ [\xi\in R^n,\ (x,\ y)\in D\times(-M,\ M)],$$

(28) $$b(x,\ y)\geqq a_0\ \ [(x,\ y)\in D\times(-M,\ M)],$$

(29) $$\max_{\bar{D}\times(-M,\ M)}\{|D^{\alpha+p}b^{ij}|,\ |D^{\alpha+p}b^{i}|,\ |D^{\alpha+p}b|\}\leqq m_k$$

($|\alpha|+p=k,\ k=1,\ 2,\ 3$). Нека освен това съществува околност на ∂D, в която

(30) $$M(u) = K\Delta u - a_0 u,$$

където K е константа с $\frac{1}{4} \leqq K < \frac{1}{3}$. Поради (18) и (19) е възможно да се дефинира оператор (26) с (27)—(30), например с

$$b^{ij}(x, u) = \varphi(x) a^{ij}(x, u) + K \delta_i^j \psi(x),$$

$$b(x, u) = \varphi(x) c(x, u) + a_0,$$

където δ_i^j са символите на Кронекер, а $\psi(x)$ е подходяща трикратно гладка функция в R^n с $\psi(x) = 0$ $(x \in \Omega)$.

Нека G е такава подобласт на R^n, че $\bar{D} \subset G$ и съществуват m двукратно гладки финитни в R^n функции $\varphi_1, \ldots, \varphi_m$, които удовлетворяват условията

(31) $$0 \leqq \varphi_\mu \leqq 1,$$

(32) $$\max_{|\alpha|=2} |D^\alpha \varphi_\mu| < \frac{1}{2n},$$

(33) $$\{x : \varphi_\mu(x) \neq 0\} \cap \bar{D} = \emptyset \quad (\mu = 1, \ldots, m),$$

(34) $$\{x : \varphi_{\mu+1}(x) \neq 0\} \subset \{x : \varphi_\mu(x) = 1\} \qquad (\mu = 1, \ldots, m-1),$$

(35) $$\{x : x \in G, \operatorname{dist}(\partial G, x) < 1\} \subset \{x : \varphi_m(x) = 1\},$$

(36) $$a_0^{\frac{m-7}{2}} \geqq C_2$$

при (14). Такова m съществува поради (24). Поради (30) операторът M може да бъде продължен в G, като $M(u) \equiv K\Delta u - a_0 u$. Полученото продължение отново означаваме с M.

Ако $u \in C^3(\bar{G})$, нека по дефиниция

(37) $$|D^k u| = \max_{|\alpha|=k} |D^\alpha u|_{C_0(G)} \qquad (k = 1, 2, 3),$$

(38) $$C_1(u) = m_1(1 + |D^1 u|),$$

(39) $$C_2(u) = c(n)\{m_2(1 + |D^1 u| + |D^1 u|^2) + m_1 |D^2 u|\},$$

(40) $$C_3(u) = m_3(1 + |D^1 u| + |D^1 u|^2 + |D^1 u|^3)$$
$$+ m_2 |D^2 u|(1 + |D^1 u|) + m_1 |D^3 u|.$$

Да разгледаме в G оператора

(41) $$M_\varepsilon(u; v) = \varepsilon \Delta v + b^{ij}(x, u) v_{ij} + b^i(x, u) v_i - b(x, u) v$$

$\left(\varepsilon > 0,\ K + \varepsilon \leqq \frac{1}{3}\right)$, където u е фиксирана функция, удовлетворяваща

(42) $$|u|_{C_0(\bar{G})} \leqq \eta_0, \quad |D^k u| \leqq \eta_k \qquad (k = 1, 2, 3)$$

при (23), (25). Ще изведем някои априорни оценки за решението v на граничната задача

(43) $$M_\varepsilon(u;\ v)=f$$

с

(44) $$v|_{\partial G}=0.$$

Поради (22) считаме, че

(45) $$f(x)=0 \qquad (x\in G\backslash\Omega).$$

Тъй като (43) е линейно и равномерно елиптично уравнение, то притежава единствено решение v с необходимата гладкост.

Лема 1. Ако v е решение на граничната задача (43), (44), то

(46) $$\|v\|_{C_0(G)}\leqq\frac{1}{a_0}\|f\|_{C_0(G)}.$$

Доказателство. При $N=\frac{1}{a_0}\|f\|_{C_0(G)}$ е в сила

(47) $$M_\varepsilon(u;\ \pm v-N)=\pm f+b\,N\geqq-\|f\|_{C_0(G)}+N a_0=0.$$

От принципа за максимум и от (47) и (44) следва $\pm v(x)-N\leqq 0\ (x\in G)$, откъдето непосредствено следва (46).

Често ще използуваме тъждеството

(48) $$M_\varepsilon(u;\ vw)=v\,M_\varepsilon(u;\ w)+w\,M_\varepsilon(u;\ v)+2\varepsilon\,v_i w_i$$
$$+b^{ij}(x;\ u)(v_i w_j+v_j w_i)+b(x,\ u)\,vw$$

и неравенството

(49) $$2ab\leqq\delta a^2+\frac{1}{\delta}b^2 \qquad (\delta>0).$$

Ще изведем някои оценки за $\varphi_\mu v^2$. Нека $v^2(x)\leqq M_1\ (\varphi_\mu(x)\neq 0)$. От (48) и (41) следва

$$M_\varepsilon(u;\ \varphi_\mu v^2-N)=a_0 N+\varphi_\mu M_\varepsilon(u;\ v^2)$$
$$+v^2 M_\varepsilon(u;\ \varphi_\mu)+4(K+\varepsilon)\frac{\partial\varphi_\mu}{\partial x_i}v_i v+a_0\varphi_\mu v^2$$
$$=a_0 N+\varphi_\mu(2v\,M_\varepsilon(u;\ v)+4(K+\varepsilon)(\operatorname{grad} v)^2+a_0 v^2)$$
$$+v^2((K+\varepsilon)\Delta\varphi_\mu-a_0\varphi_\mu)+4(K+\varepsilon)\frac{\partial\varphi_\mu}{\partial x_i}v_i v+a_0\varphi_\mu v^2.$$

От (43), (45) и (33) следва $2\varphi_\mu v\,M_\varepsilon(u;\ v)=0$. От (49) с $\delta=1$ и (8) и (32) следва

$$\left|4(K+\varepsilon)\frac{\partial\varphi_\mu}{\partial x_i}v_i v\right|\leqq 2(K+\varepsilon)v^2+K\varphi_\mu(\operatorname{grad} v)^2.$$

От (41) и (32) следва

$$(K+\varepsilon)(2+\Delta\varphi_\mu)\leqq(K+\varepsilon)\frac{5}{2}<1\,.$$

Следователно

(50) $$M_\varepsilon(u;\ \varphi_\mu v^2-N)\geqq a_0 N-M_1=0$$

при $N=\frac{M_1}{a_0}$. От (50), (33), (44) и принципа за максимум следва, че върху множеството $\{x:\varphi_\mu(x)=1\}$ е в сила $v^2(x)\leqq\frac{M_1}{a_0}$. От лема 1 от горните разсъждения, приложени за $\mu=1,\ldots,m$, и от (34), (35) следва, че върху множеството $\{x:x\in G,\ \mathrm{dist}(\partial G,\ x)<1\}$ е в сила

(51) $$v^2(x)\leqq\|f\|^2_{C_0(G)}\,a_0^{-(m+2)}\,.$$

От (14), (43), (45), (35), (36) и (51) следва

$$\|v\|_{C_3(G')}\leqq\frac{C_2\,a_0^4\,\|f\|_{C_0(\overline{G})}}{a_0^{\frac{m+1}{2}}\,a_0^{\frac{1}{2}}}\leqq\frac{1}{\sqrt{a_0}}\,\|f\|_{C_0(G)}\,.$$

Тъй като последното неравенство е в сила в околност на произволна точка от контура ∂G, то

(52) $$\|v\|^2_{C_3(\partial G)}\leqq\frac{1}{a_0}\,\|f\|^2_{C_0(\overline{G})}\,.$$

Лема 2. Ако v е решение на граничната задача (43), (44) и

(53) $$Z=\sum_{i=1}^{n}v_i^2\,,$$

то

(54) $$\|Z\|_{C_0(G)}\leqq\frac{1}{a_0}\,\|f\|^2_{C_1(\overline{G})}\,.$$

Доказателство. При

(55) $$S(Z)=b^{ij}v_{ki}v_{kj}$$

от (48) следва

(56) $$M_\varepsilon(u;\ Z)=2v_k M_\varepsilon(u;\ v_k)+2\varepsilon\sum_{i,\,k=1}^{n}v_{ik}^2+2S(Z)+b\,Z\,.$$

От (43) чрез диференциране спрямо x_k $(k=1,\ldots,n)$ следва

(57) $$2v_k M_\varepsilon(u;\ v_k)=2v_k\,(f_k-\overline{b}_k^{ij}v_{ij}-b_k^i v_i+\overline{b}_k v)\,,$$

където с черти са означени пълни производни, като например $b_k^{ij}=b_k^{ij}+b_y^{ij}u_k$; този съкратен начин за означаване често се използува по-долу. От (7), (39) и (55) следва

$$(b_k^{ij}v_{ij})^2 \leqq C_2(u)\, b^{ij} v_{ki} v_{kj} = C_2(u)\, S(Z). \tag{58}$$

От (58) и (49) следва

$$2\,|v_k b_k^{ij} v_{ij}| \leqq n\,\delta\, C_2(u) S(Z) + \frac{1}{\delta} Z \qquad (\delta>0). \tag{59}$$

От (49) с $\delta=1$ и от (38) се получават непосредствено неравенствата

$$2\, b_k^{ij} v_i v_{k\nu} \leqq 2n\, C_1(u)\, Z, \tag{60}$$

$$2\,|b_k v_k v| \leqq C_1(u)\, v^2 + C_1(u)\, Z. \tag{61}$$

От (28), (56), (57) и (59)—(61) следва

$$M_\varepsilon(u;\, Z) \geqq (2 - n\,\delta\, C_2(u))\, S(Z) + 2\varepsilon \sum_{i,\,k=1}^{n} v_{ik}^2 \tag{62}$$

$$+ \left(a_0 - 1 - \frac{1}{\delta} - (2n+1)\, C_1(u)\right) Z - C_1(u)\, v^2 - \sum_{\alpha=1} |D^\alpha f|^2_{C_0(G)}.$$

От (24), (38), (39), (42) и (46) следва

$$C_1(u)\, v^2 \leqq \frac{1}{a_0^2} C_1(u)\, |f|^2_{C_0(G)} \leqq |f|^2_{C_0(G)}. \tag{63}$$

От (62), (63) при $\delta = \dfrac{2}{n\, C_2(u)}$ следва

$$M_\varepsilon(u;\, Z) \geqq \left(a_0 - 1 - \frac{n}{2} C_2(u) - (2n+1)\, C_1(u)\right) Z \tag{64}$$

$$- \sum_{\alpha=1} |D^\alpha f|^2_{C_0(\overline{G})} - |f|^2_{C_0(G)}.$$

Поради (24), (38), (39) и (42) коефициентът на Z в дясната страна на (64) е неотрицателен. Ето защо от (64) и (6) следва

$$M_\varepsilon(u;\, Z) \geqq -|f|^2_{C_1(\overline{G})}. \tag{65}$$

От (65) и (41) при $N_1 = \dfrac{1}{a_0} \|f|^2_{C_1(\overline{G})}$ следва

$$M_\varepsilon(u;\, Z - N_1) \geqq a_0 N_1 - |f|^2_{C_1(\overline{G})} = 0. \tag{66}$$

От (52) и (53) следва

$$Z_{\partial G} \leqq \frac{1}{a_0} \| f \|^2_{C_1(G)}. \tag{67}$$

Сега (54) следва от (66), (67) и от принципа за максимум.

Тъй като следващите две леми се доказват аналогично, някои подробности в доказателствата им са съкратени.

Лема 3. Ако v е решение на граничната задача (43), (44) и

$$E = \sum_{k,\, l=1}^{n} v_{kl}^2, \tag{68}$$

то

$$\| E \|_{C_0(G)} \leqq \frac{1}{a_0} \| f \|^2_{C_2(\overline{G})}. \tag{69}$$

Доказателство. При

$$S(E) = b^{ij} v_{kli} v_{klj} \tag{70}$$

от (48) следва

$$M_\varepsilon(u;\, E) = 2 v_{kl} M_\varepsilon(u;\, v_{kl}) + 2\varepsilon \sum_{i,\, k,\, l=1}^{n} v_{kli}^2 + 2S(E) + bE. \tag{71}$$

От (43) чрез диференциране спрямо x_k и x_l $(k,\, l = 1, \ldots, n)$ следва

$$M_\varepsilon(u;\, v_{kl}) = f_{kl} - \overline{b}_l^{ij} v_{kij} - \overline{b}_k^{ij} v_{lij} - \overline{b}_{kl}^{ij} v_{ij} - \overline{b}_k^i v_{li}$$
$$- \overline{b}_l^i v_{ki} - \overline{b}_{kl}^i v_i + \overline{b}_k v_l + \overline{b}_l v_k + \overline{b}_{kl} v. \tag{72}$$

От (7), (38), (39) и (70) следва

$$2 \left| v_{kl} (\overline{b}_k^{ij} v_{lij} + \overline{b}_l^{ij} v_{kij}) \right| \leqq 4\delta n C_2(u) S(E) + \frac{1}{\delta} E. \tag{73}$$

От (70)—(73) с пресмятания, аналогични на онези от доказателството на лема 2, се получава

$$M_\varepsilon(u;\, E) \geqq (2 - 4\delta n C_2(u)) S(E) + 2\varepsilon \sum_{i,\, k,\, l=1}^{n} v_{kli}^2$$
$$+ \left(a_0 - 1 - \frac{1}{\delta} - 2n C_1(u) - (2n^2 + n + 1) C_2(u)\right) E$$
$$- (n^2 C_2(u) + 2n C_1(u)) Z - n^2 C_2(u) v^2 - \sum_{|\alpha|=2} \| D^\alpha f \|^2_{C_0(\overline{G})}. \tag{74}$$

От (17), (38), (39), (42), (46) и (54) следва

(75)
$$(n^2 C_2(u)+2n C_1(u))Z+n^2 C_2(u)v^2$$
$$\leqq \frac{1}{a_0}(n^2 C_2(u)+2n C_1(u))\|f\|^2_{C_1(\overline{G})}$$
$$+\frac{1}{a_0} n^2 C_2(u)\|f\|^2_{C_0(G)} \leqq \|f\|^2_{C_1(\overline{G})}.$$

От (75) и (74) с $\delta=\frac{1}{2n C_2(u)}$ и пренебрегнати неотрицателни събираеми следва

(76)
$$M_\varepsilon(u;\ E) \geqq -\sum_{\alpha=2} D^\alpha f\|^2_{C_0(G)} - \|f\|^2_{C_1(G)} = -\|f\|^2_{C_2(G)}.$$

От (76) с $N_2=\frac{1}{a_0}\|f\|^2_{C_2(\overline{G})}$ следва

(77)
$$M_\varepsilon(u;\ E-N_2) \geqq 0.$$

От (52) и (68) следва

(78)
$$E|_{\partial G} \leqq \frac{1}{a_0}\|f\|^2_{C_2(G)}.$$

Сега (69) следва от (77), (78) и от принципа за максимум.

Лема 4. Ако v е решение на граничната задача (43), (44) и

(79)
$$P=\sum_{k,l,m=1}^{n} v^2_{klm},$$

то

(80)
$$P\|_{C_0(G)} \leqq \frac{1}{a_0}\|f\|^2_{C_3(\overline{G})}.$$

Доказателство. При

(81)
$$S(P)=b^{ij} v_{klmi} v_{klmj}$$

от (48) следва

(82)
$$M_\varepsilon(u;\ P)=2v_{klm} M_\varepsilon(u;\ v_{klm})+2\varepsilon \sum_{i,k,l,m=1}^{n} v^2_{kilm}+2S(P)+bP.$$

От (43) чрез диференциране спрямо x_k, x_l и x_m следва

(83)
$$M_\varepsilon(u;\ v_{klm})=f_{klm}-b^{ij}_k v_{lmij}-b^{ij}_l v_{kmij}-b^{ij}_m v_{klij}$$
$$-\bar{b}^{ij}_{kl} v_{mij}-b^{ij}_{lm} v_{kij}-\bar{b}^{ij}_{km} v_{lij}-b^i_k v_{lml}-\bar{b}^i_l v_{kmi}-b^i_m v_{kli}$$
$$-\bar{b}^{ij}_{klm} v_{ij}-b^i_{kl} v_{mi}-b^i_{im} v_{ki}-b^i_{km} v_{li}+\bar{b}_k v_{lm}+b_l v_{km}$$
$$+b_m v_{kl}-b^i_{klm} v_i+\bar{b}_{km} v_l+\bar{b}_{kl} v_m+b_{ml} v_k+b_{klm} v.$$

От (7), (38)—(40) и (81) следва

$$(84)\qquad 2\,v_{klm}\,(b_k^{ij}\,v_{lmij}+\bar{b}_l^{ij}\,v_{kmij}+\bar{b}_m^{ij}\,v_{klij})\leqq 9\delta\, n\, C_2(u)\, S(P)+\frac{1}{\delta}\,P.$$

От (81)—(84) чрез пресмятания, аналогични на онези от доказателството на лема 2, се получава

$$(85)\qquad M_\varepsilon(u;\ P)\geqq(2-9\delta\, n\, C_2(u))\, S(P)+2\varepsilon.\sum_{i,k,l,m=1}^{n} v_{klmi}^2$$

$$+\Big(a_0-1-\frac{1}{\delta}-(n^2+n+1)\,C_3(u)-(6n^2+3n+3)\,C_2(u)$$

$$-(6n+3)\,C_1(u)\Big)P-(n^3\,C_3(u)+3n^2\,C_2(u)+3n\,C_1(u))\,E$$

$$-(n^3\,C_3(u)+3n\,C_2(u))\,Z-n^3\,C_3(u)\,v^2-\sum_{|\alpha|=3}\|D^\alpha f\|^2_{C_0(\bar{G})}.$$

От (24), (38)—(40), (42), (46), (54) и (69) следва

$$(86)\qquad (n^3\,C_3(u)+3n^2\,C_2(u)+3n\,C_1(u))\,E$$

$$+(n^3\,C_3(u)+3n\,C_2(u))\,Z+n^3\,C_3(u)\,v^2\leqq\|f\|^2_{C_2(\bar{G})}.$$

От (86) и (85) с $\delta=\dfrac{2}{9n\,C_2(u)}$ и пренебрегване на неотрицателните събираеми следва

$$(87)\qquad M_\varepsilon(u;\ P)\geqq-\sum_{\alpha=3}\|D^\alpha f\|^2_{C_0(\bar{G})}-\|f\|^2_{C_2(\bar{G})}=-\|f\|^2_{C_3(\bar{G})}.$$

От (87) с $N_3=\dfrac{1}{a_0}\|f\|^2_{C_3(\bar{G})}$ следва

$$(88)\qquad M_\varepsilon(u;\ P-N_3)\geqq 0.$$

От (52) и (79) следва

$$(89)\qquad P_{\partial G}\leqq\frac{1}{a_0}\|f\|^2_{C_3(\bar{G})}.$$

Сега (70) следва от (88), (89) и от принципа за максимум.

Нека $\{\varepsilon_\nu\}_{\nu=0}^\infty$ е произволна редица от реални числа с $0<\varepsilon_{\nu+1}<\varepsilon_\nu$ ($\nu=0,1,\ldots$) и $\lim\limits_{\nu\to\infty}\varepsilon_\nu=0$, а $\{u_\nu\}_{\nu=0}^\infty$ е редица от функции, дефинирани в $\bar{G}$ с

$$(90)\qquad u_0(x)=0\qquad(x\in\bar{G}),$$

(91) $$M_{\varepsilon_{\nu+1}}(u_\nu,\ u_{\nu+1})=f \qquad (\nu=0,\ 1,\ldots),$$

(92) $$u_{\nu+1}\,{}_{\partial G}=0 \qquad (\nu=0,\ 1,\ldots).$$

Тогава са в сила неравенствата

(93) $$|u|_{C_0(G)}\leqq\eta_0 \qquad (\nu=0,\ 1,\ldots),$$

(94) $$|D^k u_\nu|\leqq\eta_k \qquad (k=1,\ 2,\ 3;\ \nu=0,\ 1,\ldots),$$

(95) $$a_0\geqq 1+n^3 C_3(u_\nu)+(6n^2+12n+3)\,C_2(u_\nu)$$
$$+(6n+3)\,C_1(u_\nu) \qquad (\nu=0,\ 1,\ldots).$$

Наистина при $\nu=0$ твърдението е очевидно поради (90), (38)—(40) и (17). Поради (23)—(25), (37)—(40) и (42) неравенствата (95) са следствия от (93) и (94). Що се отнася до последните, (93) следва от лема 1, а (94) — от леми 2—4. Действително нека (94) е в сила за някое ν; тогава (95) показва, че леми 2—4 са приложими за $\nu+1$ и дават $\sum\limits_{\alpha=k}(D^\alpha u_{\nu+1})^2\leqq\eta_k^2$ ($k=1,\ 2,\ 3$), откъдето (94) следва непосредствено.

Лема 5. Редицата $\{u_\nu\}_{\nu=1}^{\infty}$ е равномерно сходяща в $\bar{G}$.

Доказателство. От (91) следва

(96) $$M_{\varepsilon_{\nu+1}}(u_\nu;\ u_{\nu+1})-M_{\varepsilon_\nu}(u_{\nu-1};\ u_\nu)=0 \qquad (\nu=1,\ 2,\ldots).$$

От (41) следва

(97) $$M_{\varepsilon_{\nu+1}}(u_\nu;\ u_{\nu+1})-M_{\varepsilon_\nu}(u_{\nu-1};\ u_\nu)=M_{\varepsilon_{\nu+1}}(u_\nu;\ u_{\nu+1}-u_\nu)$$
$$+(\varepsilon_{\nu+1}-\varepsilon_\nu)\,\Delta u_\nu+(b^{ij}(x,\ u_\nu)-b^{ij}(x,\ u_{\nu-1}))\,\frac{\partial^2 u_\nu}{\partial x_i\,\partial x_j}$$
$$+(b^i(x;\ u_\nu)-b^i(x;\ u_{\nu-1})\,\frac{\partial u_\nu}{\partial x_i}-(b(x,\ u_\nu)-b(x,\ u_{\nu-1}))\,u_\nu \qquad (\nu=1,\ 2,\ldots).$$

От (29), (93), (94) и теоремата за крайните нараствания следва

(98) $$b^{ij}(x,\ u_\nu)-b^{ij}(x,\ u_{\nu-1})\,\left|\frac{\partial^2 u_\nu}{\partial x_i\,\partial x_j}\right|$$
$$\leqq\max_G\left|\frac{\partial^2 u_\nu}{\partial x_i\,\partial x_j}\right|\max_{G\times(-M,\,M)} b^{ij}_u\,.\,|u_\nu-u_{\nu-1}|$$
$$\leqq n^3 m_1\eta_2\,|u_\nu-u_{\nu-1}| \qquad (\nu=1,\ 2,\ldots).$$

Аналогично се заключава, че

(99) $$b^i(x,\ u_\nu)-b^i(x,\ u_{\nu-1})\,.\,\left|\frac{\partial u_\nu}{\partial x_i}\right|\leqq n m_1\eta_1\,|u_\nu-u_{\nu-1}|,$$

(100) $$b(x,\ u_\nu)-b(x,\ u_{\nu-1})\,.\,u_\nu\leqq m_1\eta_0\,|u_\nu-u_{\nu-1}| \qquad (\nu=1,\ 2,\ldots).$$

Ако $F(x)$ означава дясната страна на (97) без първото събираемо, от лема 1 и (92) следва

$$(101)\qquad \|u_{\nu+1}-u_\nu\|_{C_0(G)} \leqq \frac{1}{a_0}\max_G F(x) \qquad (\nu=1,\ 2,\ldots).$$

От (96)—(101) следва

$$(102)\qquad \|u_{\nu+1}-u_\nu\|_{C_0(G)} \leqq \frac{1}{a_0}(\varepsilon_\nu-\varepsilon_{\nu+1})\, n\,\eta_2$$

$$+\frac{m_1}{a_0}(n^2\eta_2+n\eta_1+\eta_0)\,\|u_\nu-u_{\nu-1}\|_{C_0(\overline{G})} \qquad (\nu=1,\ 2,\ldots).$$

Редът

$$(103)\qquad \sum_{\nu=1}^{\infty}(u_\nu-u_{\nu-1})$$

е равномерно сходящ. Наистина от (102) следва

$$(104)\qquad \|u_{\nu+1}-u_\nu\|_{C_0(G)} \leqq \left(\frac{m_1}{a_0}(n^2\eta_2+n\eta_1+\eta_0)\right)^\nu \left\{\|u_1\|_{C_0(G)}\right.$$

$$\left.+\frac{\varepsilon_0\, n\,\eta_2}{m_1(n^2\eta_2+n^2\eta_1+\eta_0)}\right\} \qquad (\nu=1,\ 2,\ldots).$$

От (24) следва

$$(105)\qquad \frac{m_1}{a_0}(n^2\eta_2+n\eta_1+\eta_0)<1.$$

От (104), (105) следва, че редът (103) се мажорира от геометрична прогресия, с което лемата е доказана.

Доказателство на теорема 1. От теоремата на Арцела — Асколи и неравенствата (93), (94) следва, че от редицата $\{u_\nu\}_{\nu=0}^{\infty}$ може да се избере подредица $\{u_{\nu_\mu}\}_{\mu=1}^{\infty}$, сходяща заедно с вторите си производни равномерно в $\overline{G}$. Нека $u=\lim\limits_{\mu\to\infty} u_{\nu_\mu}$. Тогава

$$(106)\qquad \lim_{\mu\to\infty}\frac{\partial u_{\nu_\mu}}{\partial x_i}=\frac{\partial u}{\partial x_i} \qquad (\nu=1,\ldots,n),$$

$$(107)\qquad \lim_{\mu\to\infty}\frac{\partial^2 u_{\nu_\mu}}{\partial x_i\,\partial x_j}=\frac{\partial^2 u}{\partial x_i\,\partial x_j} \qquad (i,\ j=1,\ldots,n).$$

От лема 5 следва, че и редицата $\{u_{\nu_\mu-1}\}_{\mu=1}^{\infty}$ е равномерно сходяща в $\overline{G}$ и $\lim\limits_{\mu\to\infty} u_{\nu_\mu-1}=u$. Чрез граничен преход в равенствата $M_{\varepsilon_{\nu_\mu}}(u_{\nu_\mu-1};\ u_{\nu_\mu})=f$ $(\mu=1,\ 2,\ldots)$ от (41) и (26) следва, че u удовлетворява в G уравнението

(108) $$M(u)=f,$$

а от (92) и лема 5, че

(109) $$u|_{\partial G}=0.$$

Тъй като L и M съвпадат в Ω, остава да се покаже, че

(110) $$u|_{\Sigma}=0.$$

От (108) поради $f=0$ в $\Omega^*=G\backslash\bar{\Omega}$ следва

(111) $$0=\int_{\Omega^*} M(u)\,u\,dx=\int_{\Omega^*}(b^{ij}u_{ij}u+b^i u_i u-bu^2)\,dx.$$

След двукратно интегриране по части в дясната страна на (111) се получава

(112) $$\int_{\Omega^*}(b^{ij}u_i u_j+\frac{1}{2}(2b+\bar{b}^i_i-\bar{b}^{ij}_{ij})u^2)\,dx$$

$$-\int_{\partial\Omega^*}(b^{ij}u_i u\,\nu_j\,ds-\frac{1}{2}\int_{\partial\Omega^*}(b^i-b^{ij}_j)u^2\nu_i\,ds=0.$$

Първият контурен интеграл в (112) е нула поради (109) и $\Sigma=S_2$. Пак от (109) следва

$$\int_{\partial G}(b^i-b^{ij}_j)\,u^2\nu_i\,ds=0.$$

От $\Sigma=S_2=S$ следва $b^{ij}\nu_i=0\,(j=1,\ldots,n)$, което след диференциране спрямо y дава $b^{ij}_y\nu_i=0$ $(j=1,\ldots,n)$. Тъй като $\nu=(\nu_1,\ldots,\nu_n)$ е външна нормала към Ω^* и следователно вътрешна за Ω, от дефиницията на S_2 следва

$$-\frac{1}{2}\int_{\partial\Omega}(b^i-\bar{b}^{ij}_j)\,u^2\nu_i\,ds\geqq 0.$$

От (24), (28), (94), (106) и (107) следва $\frac{1}{2}(2b+\bar{b}^i_i-\bar{b}^{ij}_{ij})\geqq 1$. Най-после от (27) следва $b^{ij}u_i u_j\geqq 0$. Сега от (112) следва $\int_{\Omega^*}u^2\,dx\leqq 0$, т. е. $u\equiv 0$ в Ω^*, откъдето в частност следва (110). С това теоремата е доказана.

Теорема 2. При условията на теорема 1 граничната задача (20), (21) има точно едно решение.

Доказателство. Нека u е построеното в доказателството на теорема 1 решение на граничната задача (20), (21), а v е произволно решение на същата задача. Тогава

(113) $$L(u)-L(v)=0$$

в Ω и

(114) $$(u-v)_{\partial\Omega}=0.$$

От (15), (113), (114), $w=u-v$ и

$$\Phi(x)=-(a^{ij}(x,\ u)-a^{ij}(x,\ v))\,u_{ij}$$
$$-(a^{i}(x,\ u)-a^{i}(x,\ v))\,u_i+(a(x,\ u)-a(x,\ v))\,u$$

следва

(115) $$a^{ij}(x,\ v)\,w_{ij}+a^{i}(x,\ v)\,w_i-a(x,\ v)\,w=\Phi(x),$$

(116) $$w|_{\partial\Omega}=0.$$

Лема 1, приложена към (115), (116), дава

(117) $$|w|_{C_0(\Omega)}\leqq\frac{1}{a_0}\max_{\overline{\Omega}}|\Phi(x)|.$$

Както в доказателството на лема 5, теоремата за крайните нараствания в известните оценки за функцията u и производните ѝ водят до

(118) $$|a^{ij}(x,\ u)-a^{ij}(x,\ v)|\,.\,|u_{ij}|\leqq n^2 m_1\eta_2\,\|w|_{C_0(\Omega)},$$

(119) $$|a^{i}(x,\ u)-a^{i}(x,\ v)|\,.\,|u_i|\leqq n m_1\eta_1\,|w|_{C_0(\Omega)},$$

(120) $$|a(x,\ u)-a(x,\ v)|\,.\,|u|\leqq m_1\eta_0\,\|w|_{C_0(\overline{\Omega})}.$$

От (117)—(120) следва

(121) $$\left(1-\frac{m_1}{a_0}(n^2\eta_2+n\eta_1+\eta_0)\right)|w|_{C_0(\overline{\Omega})}\leqq 0.$$

Съгласно (24) първият множител в лявата страна на (121) е положителен, откъдето $|w|_{C_0(\overline{\Omega})}=0$, с което теоремата е доказана.

В теореми 3 и 4 по-долу символите $D^{\alpha}f(x)$ и $D^{\alpha+p}g(x,\ y)$ се дефинират аналогично на (3) и (4), но с $\alpha=(\alpha_1,\ldots,\ \alpha_n,\ \alpha_{n+1})$ и $x_{n+1}=t$, а H и H_δ са съответно ивиците $R^n_x\times(0,\ T)$ и $R^n_x\times(-\delta,\ T+\delta)\,(T>0,\ \delta>0)$.

Теорема 3. Нека операторът

(122) $$L(u)\equiv a^{ij}(x,\ t,\ u)\,u_{ij}+2a^{i}(x,\ t,\ u)\,u_{it}+a(x,\ t,\ u)\,u_{tt}$$
$$+b^{i}(x,\ t,\ u)\,u_i+b(x,\ t,\ u)\,u_t-c(x,\ t,\ u)\,u$$

е дефиниран в H_δ и коефициентите му са поне трикратно гладки и ограничени заедно с производните си до трети ред в $H_\delta\times(-M,\ M)$ $(M>0)$. При $\xi=(\xi_0,\ \xi_1,\ldots,\ \xi_n)$ нека

(123) $$a^{ij}(x,\ t,\ y)\,\xi_i\xi_j+2a^{i}(x,\ t,\ y)\,\xi_i\xi_0+a(x,t,y)\,\xi_0^2\geqq 0$$

при $(x,\ y)\in H_\delta\times(-M,\ M)$,

(124) $$a(x,\ 0,\ y)=a(x,\ T,\ y)=0$$

и

(125) $$b(x,\ 0,\ y)<0,\ b(x,\ T,\ y)<0$$

при $(x, y) \in R_x^n \times (-M,\ M)$, $c(x,\ t,\ y)=c_0+d(x,\ t,\ y)\geqq c_0$,
при $(x,\ t,\ y) \in H_\delta \times (-M,\ M)$,

(126) $$c_0>1+(n+1)^3 m_3+(6n^2+24n+12)\,c\,(n+1)\,m_2+(6n+9)\,m_1$$

при

(127) $$\varphi \in C_0^3(-\delta,\ T+\delta),\ 0\leqq\varphi\leqq 1,\ \varphi(t)=1\ (t\in[0,\ T]),$$

(128) $$m_k=\max_{H_\delta\times(-M,\ M)}\{D^{\alpha+p}(\varphi\, a^{ij}),\ D^{\alpha+p}(\varphi\, a^i),$$

$$D^{\alpha+p}(\varphi\, a),\ D^{\alpha+p}(\varphi\, b^i),\ D^{\alpha+p}(\varphi\, b),\ D^{\alpha+p}(\varphi\, d)\}$$

($\alpha+p=k$, $k=1,\ 2,\ 3$). Тогава уравнението

(129) $$L(u)=f$$

в H с

(130) $$u|_{t=0}=0$$

притежава класическо решение за всяка функция $f\in C^3(H)$ с

(131) $$f(x,\ 0)=\frac{\partial f}{\partial t}(x,\ 0)=\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}(x,\ 0)=\frac{\partial^3 f}{\partial t^3}(x,\ 0)=0\ \ (x\in R_x^n)$$

и с достатъчно малка норма в $C^3(H)$.

Доказателство. Нека

(132) $$Q_{r,\ T+\frac{\delta}{2}}=\{x:\ |x|\leqq r\}\times\left[0,\ T+\frac{\delta}{2}\right]\ (r>0),$$

а G_2 е област в R^{n+1} с поне трикратно гладък контур, за която

(133) $$Q_{r,\ T+\frac{\delta}{2}}\subset G_r,$$

(134) $$\{x:\ |x|\leqq r\}\times\{0\}\subset\partial G_2,$$

като всички други гранични точки на $Q_{r,\ T+\frac{\delta}{2}}$ са вътрешни за G_2. Ако $\{r_\nu\}_{\nu=1}^\infty$ е редица от положителни числа с $\lim\limits_{\nu\to\infty} r_\nu=\infty$, нека $Q_{\nu,\ T+\frac{\delta}{2}}$ и G_ν ($\nu=1,\ 2,\ldots$) са дефинирани със (132)—(134) при $r=r_\nu$ ($\nu=1,\ 2,\ldots$). При $\bar G_\nu\subset G_\nu'$ ($\nu=1,\ 2,\ldots$) нека операторите

$$M_\nu(u)\quad A_\nu^{ij}(x,\ t,\ u)\,u_{ij}+2A_\nu^i(x,\ t,\ u)\,u_{it}$$

$$+A_\nu(x,\ t,\ u)\,u_{tt}+B_\nu^i(x,\ t,\ u)\,u_i+B_\nu(x,\ t,\ u)\,u_t-C(x,\ t,\ u)\,u$$

($\nu=1,\ 2,\ldots$) са дефинирани в G_ν' и

$$A_\nu^{ij}\xi_i\xi_j+2A_\nu^i\xi_i\xi_0+A_\nu\xi_0^2\geqq 0,\ C_\nu(x,\ t,\ u)\geqq c_0$$

в G_ν' $(\nu=1, 2, \ldots)$, коефициентите на L и M_ν съвпадат в $Q_{\nu, T+\frac{\delta}{2}}$, константите (128) мажорират модулите на коефициентите на M_ν в дефиниционните им области и $\partial G_\nu = S_2$ за операторите M_ν $(\nu=1, 2, \ldots)$. Съществуването на оператори M_ν с изброените свойства се осигурява от условията на теоремата.

Нека $F_\nu(x, t)$ са трикратно гладки функции, дефинирани в G_ν' и удовлетворяващи условията

(135) $$F_\nu(x, t) = f(x, t) \quad [(x, t) \in Q_{\nu, T+\frac{\delta}{2}}],$$

(136) $$F_\nu(x, t) = 0 \quad [(x, t) \bar{\in} G_\nu] \quad (\nu=1, 2, \ldots).$$

Такива функции съществуват поради (131)—(134). Ако областите G_ν' се изберат достатъчно големи, ще бъдат осигурени неравенствата

$$\|F_\nu\|_{C_k(\bar{G}_\nu')} \leqq \|f\|_{C_k(\bar{H})} \quad (k=1, 2, 3;\ \nu=1, 2, \ldots).$$

Всичко това показва, че към граничната задача

(137) $$M_\nu(u) = F_\nu$$

в G_ν с

(138) $$u|_{\partial G_\nu} = 0 \qquad (\nu=1, 2, \ldots)$$

са приложими теореми 1 и 2. По-точно за всяко $\nu=1, 2, \ldots$ съществува единствено решение $u_\nu(x, t)$ на граничната задача (137), (138). От доказателството на теорема 1 се вижда, че са в сила неравенствата

$$\|u_\nu\|_{C_0(\bar{G}_\nu)} \leqq \frac{1}{c_0} \|F_\nu\|_{C_0(G_\nu)} \leqq \frac{1}{c_0} \|f\|_{C_0(\bar{H})},$$

$$\max_{\alpha=k} |D^\alpha u_\nu|^2_{C_k(G_\nu)} \leqq \frac{1}{c_0} |F_\nu|^2_{C_k(G_\nu)} \leqq \frac{1}{c_0} |f|^2_{C_k(H)} \quad (k=1, 2)$$

$(\nu=1, 2, \ldots)$, а функциите $D^\alpha u_\nu$ $(\alpha=2, \nu=1, 2, \ldots)$ са липшицови с константа, която не зависи от ν. Ето защо теоремата на Арцела — Асколи позволява да се твърди, че от редицата $\{u_\nu\}_{\nu=1}^\infty$ може да се избере подредица $\{u_{\nu_\mu}\}_{\mu=1}^\infty$, която заедно с производните си до втори ред включително е равномерно сходяща върху всяко компактно подмножество на H. Нека

(139) $$u = \lim_{\mu\to\infty} u_{\nu_\mu}.$$

Тогава

(140) $$\lim_{\mu\to\infty} D^\alpha u_{\nu_\mu} = D^\alpha u \qquad (\alpha=1, 2).$$

От (135) следва

(141) $$\lim_{\nu\to\infty} F_\nu = f.$$

От (139)—(141) се заключава, че граничен преход в $M_{\nu_\mu}(u_{\nu_\mu})=F_{\nu_\mu}$ и в $u_{\nu_\mu}|_{\partial G_{\nu_\mu}}=0\,(\mu=1, 2, \ldots)$ дава (129), (130), с което теоремата е доказана.

Теорема 4. При условията на теорема 3 граничната задача (129), (130) има точно едно ограничено решение.

Доказателство. Нека u е построеното в доказателството на теорема 3 решение на граничната задача (129), (130), а v е произволно ограничено решение на същата задача. Тогава

$$L(u)-L(v)=0 \tag{142}$$

в H и

$$(u-v)_{t=0}=0. \tag{143}$$

От (122), (142), (143)

$$w=u-v \tag{144}$$

и теоремата за крайните нараствания следва

$$\begin{aligned}\tilde{L}(w)=&\,a^{ij}(x, t, v)\,w_{ij}+2a^i(x, t, v)\,w_{it}+a(x, t, v)\,w_{tt}\\&+b^i(x, t, v)\,w_i+b(x, t, v)\,w_t-\{c(x, t, v)-a^{ij}_y(x, t, \xi^{ij})\,u_{ij}\\&-2a^i_y(x, t, \xi^i)\,u_{it}-a_y(x, t, \xi)\,u_{tt}-b^i_y(x, t, \eta^i)\,u_i\\&-b_y(x, t, \eta)\,u_t+c_y(x, t, \zeta)\,u\}\,w=0,\end{aligned} \tag{145}$$

където ξ, η, ζ и т. н. означават междинни стойности. Нека $d(x, t)$ означава израза в скобите в (145). Поради установената в доказателството на теорема 3 ограниченост на функцията u и на производните ѝ до втори ред включително и неравенството (126) за c_0 е в сила

$$d(x, t)\geqq\lambda+1 \qquad (\lambda>0). \tag{146}$$

При

$$g(x, t)=e^{\beta t}(r^2+N) \qquad \left(\beta,\ N>0,\ r^2=\sum_{\nu=1}^{n}x_\nu^2\right) \tag{147}$$

е в сила

$$\begin{aligned}\tilde{L}(g)=&\,2e^{\beta t}\sum_{i=1}^{n}a^{ii}+4\beta\,e^{\beta t}a^i x_i+\beta^2 e^{\beta t}ar^2\\&+2e^{\beta t}b^i x_i+\beta e^{\beta t}br^2-e^{\beta t}d(r^2+N)\\\leqq&\,e^{\beta t}\left\{\left(\sum_{i=1}^{n}(2a^{ii}+2\beta\,(a^i)^2+(b^i)^2)-dN\right)\right.\\&\left.+r^2(2\beta+\beta^2 a+\beta b+1-N)\right\}.\end{aligned} \tag{148}$$

При достатъчно малко β и достатъчно голямо N от (146), (148) следва

(149) $$\tilde{L}(g)<0.$$

От (145), (149) следва

(150) $$\tilde{L}(\varepsilon g+w)=\varepsilon\,\tilde{L}(g)<0$$

за произволно $\varepsilon>0$. От (143), (144) следва

(151) $$(\varepsilon g+w)_{t=0}\geqq 0$$

за произволно $\varepsilon>0$. Нека $(x_0, t_0)\in H$. Тогава от (147) следва, че за всяко $\varepsilon>0$ съществува такова R_ε, че при $|x|=R_\varepsilon$ да е в сила

(152) $$\varepsilon g+w\geqq 0.$$

От (150)—(152) и принципа за максимум следва $(\varepsilon g+w)(x, t)\geqq 0$ $(x\leqq R_\varepsilon$ $0\leqq t\leqq T)$ и в частност

(153) $$(\varepsilon g+w)(x_0, t_0)\geqq 0.$$

Чрез граничен преход в (153) при $\varepsilon\to 0$ се получава

(154) $$w(x_0, t_0)\geqq 0.$$

Аналогични разглеждания за функцията $\varepsilon g-w$ дават

(155) $$-w(x_0, t_0)\leqq 0.$$

От (154), (155) следва $w(x_0, t_0)=0$, с което теоремата е доказана.

Основаната на приложение на теорема 1 и 2 идея на доказателството на теорема 3 може да се използува и за изучаване на гранични задачи за оператори от вида

(156) $$L(u)=a^{ij}(x, y, u)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i\partial x_j}+a^i(x, y, u)\frac{\partial u}{\partial x_i}$$
$$+b^k(x, y, u)\frac{\partial u}{\partial y_k}-c(x, y, u)u$$

с дефиниционни области в R^{n+m}.

Нека $0<\beta_k\in R\,(k=1,\ldots, m)$, $0<\delta\in R$, и

$$P=\{y: y\in R^m,\ |y_k|<\beta_k\ (k=1,\ldots, m)\},$$
$$P_\delta=\{y: y\in R^m,\ |y_k|<\delta+\beta_k\ (k=1,\ldots, m)\},$$
$$H=R^n_x\times P,\ H_\delta=R^n_x\times P_\delta.$$

Ще разглеждаме оператори (156), чиито коефициенти $b^k(x, y, u)$ имат постоянни знаци върху хиперравнините $y_k=\pm\beta_k$ $(k=1,\ldots, m)$. Нека границата S на областта H е разделена на части S_1 и S_2 по следния начин. Частта от границата с $y_k=-\beta_k$ причисляваме към S_1 при $b^k>0$ и към S_2 при $b^k<0$; частта от границата с $y_k=\beta_k$ причисляваме към S_1 при $b^k<0$ и към S_2 при $b^k>0$. Непосредствено се вижда, че тези дефиниции се съгласуват с дадените в началото на работата дефиниции за частите S_1 и S_2 на границата.

Теорема 5. Ако операторът (156) е дефиниран в H, коефициентите му заедно с производните си по трети ред включително са поне трикратно гладки и ограничени в $H_\delta \times (-M, M)$ $(M>0)$ и при $\xi=(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ са в сила неравенствата $a^{ij}(x, y, u)\xi_i\xi_j \geqq 0$ и $c(x, y, u)>c_0>0$ в $H_\delta \times (-M, M)$, където c_0 е достатъчно голяма константа, уравнението $L(u)=f$ в H с $u_{S_2}=0$ притежава единствено класическо решение за всяка функция $f \in C^3(H)$ с достатъчно малка норма, удовлетворяваща условия за съгласуваност върху S_2 (аналогични на условията (131) в теорема 3).

Доказателството за съществуване в теорема 5 е напълно аналогично на доказателството на теорема 3 и се основава на прилагане на теореми 1 и 2 за редица от разширяващи се области и подходящи модификации на оператора (156).

Задачата от теорема 5 може да се формулира и реши и в случая, когато паралелепипедът P е неограничен по някои (но не всички) от променливите y_k. Разбира се, тогава съответните гранични условия се изпускат. Така например, ако $P=\{y: y \in R^n, 0<y_1<\beta_1\}$, теорема 5 става частният случай $a^i(x, t, u) \equiv a(x, t, u) \equiv 0$ на теорема 3.

Доказателството за единственост в теорема 5 е аналогично на доказателството на теорема 4, като се използува следната модификация на принципа за максимум. При $R>0$ нека Q_R е множеството $\{(x, y): |x|<R, |y_k|<\beta_k\}$. Ако за оператора

$$\tilde{L}(w)=a^{ij}(x, y)\frac{\partial^2 w}{\partial x_i \partial x_j}+a^i(x, y)\frac{\partial w}{\partial x_i}+b^k(x, y)\frac{\partial w}{\partial y_k}-c(x, y)w$$

с $a^{ij}(x, y)\xi_i\xi_j \geqq 0$, $c(x, y)>0$, е в сила $\tilde{L}(w)<0$ в $Q_R \cup S_1$ и $w_{\partial Q_R \setminus S_1} \geqq 0$, то $w \geqq 0$ в Q_R. Този вариант на принципа за максимум се доказва аналогично на предложените в [6] и [7] варианти на същия принцип.

Да отбележим, че горните разглеждания запазват валидността си и когато коефициентите на операторите (15), (122) и (156) не зависят от неизвестната функция u, при което доказателствата се опростяват; така например необходимостта от лема 5 отпада. В този случай поради линейността на операторите съществуват решения независимо от нормата на десните страни на съответните уравнения $L(u)=f$, а ограниченията (22), (131) и аналогичните им за теорема 5 се преодоляват, както това е направено в [5, (9.2)].

Авторът изразява благодарност на доцент Т. Генчев за предложената тема и за непрекъснатия интерес при изпълнението ѝ.

ЛИТЕРАТУРА

1. Генчев, Т.: Върху задачата на Коши за един клас квазилинейни уравнения с неотрицателна характеристична форма. Год. Соф. унив., Мат. фак., 60 (1965/66), 113—137.
2. Fichera, G.: On a unified theory of boundary value problems for elliptic-parabolic equations of second order, Boundary Value Problems in Differential Equations. Univ. of Wisconsin Press, Madison, 1960, 97—120.

3. Олейник, О. А.: О линейных уравнениях второго порядка с неотрицательной характеристической формой. Мат. сб., 69 (111), 1 (1966), 111—139.
4. Bers, L., John, F., Schechter, M.: Partial differential equations. New York — London — Sydney, 1964.
5. Kohn, J. J., Nirenberg, L.: Non-coercive boundary value problems. Comm. Pure Appl. Math., 18 (3) (1965), 443—492.
6. Генчев, Т.: Върху задачата на Коши за един клас от ултрапараболични уравнения. Год. Соф. унив., Мат. фак., 58 (1963/64), 141—169.
7. Илын, А. М., Калашников, А. С., Олейник, О. А.: Линейные уравнения второго порядка параболического типа. Усп. мат. наук, 17 (1962), 3 (105), 3—146.

Постъпила на 9. I. 1976 г.

ON THE DIRICHLET PROBLEM FOR A CLASS OF SECOND ORDER QUASI-LINEAR EQUATIONS WITH NON-NEGATIVE CHARACTERISTIC FORM

G. I. Chobanov

(SUMMARY)

The existence and uniqueness of a classical solution of the differential equation

$$a^{ij}(x, u)\, u_{x_i x_j} + a^i(x, u)\, u_{x_i} - a(x, u)\, u = f(x)$$

with

$$u_{\partial\Omega} = 0$$

in a region Ω are proved (theorems 1 and 2), where

$$a^{ij}(x, u)\, \xi_i \xi_j \geqq 0\,, \quad a(x, u) > a_0 > 0$$

in a region $\Omega' \supset \Omega$ with sufficiently large constant a_0; it is assumed that on $\partial\Omega$

$$a^{ij}(x, u)\, \nu_i(x)\, \nu_j(x) = 0$$

and

$$(a^i(x, u) - a^{ij}_{x_j}(x, u))\, \nu_i(x) > 0$$

hold. The proof is carried out using a combination of the methods of successive iterations and elliptic regularization; the necessary a priori estimates are obtained by the Bernstein method.

Applications are made (theorems 3 and 4) on the Cauchy problem for equations of the form

$$a^{ij}(x, t, u)u_{x_i x_j}+2a^i(x, t, u)u_{x_i t}+a(x, t, u)u_{tt}$$
$$+b^i(x, t, u)u_{x_i}+b(x, t, u)u_t-c(x, t, u)u=f(x, t)$$

in a region $H=R_x^n\times(0, T)$ $(T>0)$ and (theorem 5) for ultraparabolic equations of the form

$$a^{ij}(x, y, u)u_{x_i x_j}+a^i(x, y, u)u_{x_i}+b^k(x, y, u)u_{y_k}$$
$$-c(x, y, u)u=f(x, y)$$

in a region $H=R_x^n\times P$, where

$$P=\{y: y\in R^m, |y_k|<\beta_k \ (k=1, \ldots, m)\}.$$