ВЪЗСТАНОВЯВАНИЯ ПРИ ЛОГАРИТМИЧНО ВДЛЪБНАТО ДИСКРЕТНО ОСТАТЪЧНО РАЗПРЕДЕЛЕНИЕ

Апостол Обретенов

Нека $p_0, p_1, \cdots, p_n, \cdots$ е вероятностно разпределение, т. е. нека ξ е случайна величина, за която

$$p_n = P(\xi = n), \quad n = 0, 1, 2, \cdots \tag{1}$$

Разпределението (1) се нарича [1] дискретно разпределение с растяща интензивност на отказите (d-РФИ разпределение), ако отношението

$$\lambda(k) = p_k / \sum_{j=k}^{\infty} p_j \tag{2}$$

не намалява с растенето на k. Класа на тези разпределения ще означаваме с R_d.

Нека разпределението $\{p_k\} \in R_d$. Да образуваме чрез него разпределението $\{\tilde{p}_k\}$, полагайки

$$\tilde{p}_k = \mu_1^{-1}(p_{k+1} + p_{k+2} + \cdots), \; k = 0, 1, \cdots, \; \mu_1 = \sum_{k=1}^{\infty} k p_k. \tag{3}$$

Лесно се показва, че разпределението (1) е от R_d тогава и само тогава, когато $\tilde{p}_k^2 \geq \tilde{p}_{k-1}\tilde{p}_{k+1}$, т. е. когато редицата $\tilde{p}_0, \tilde{p}_1, \cdots$ е логаритмично вдлъбната. Разпределението (3) ще наричаме остатъчно (или итерационно) на разпределението (1). Чрез $\{\tilde{p}_k\}$ по (3), като вместо p_k вземем вероятностите $\tilde{p}_k$, може да получим второ итерационно разпределение $\{\tilde{\tilde{p}}_k\}$ и т. н. Ако $p_k = pq^k$, то $\tilde{p}_k = p_k$, $k = 0, 1, 2, \cdots$, т. е. при последователно итериране геометричното разпределение се запазва. Както ще видим, това свойство характеризира напълно геометричното разпределение. Итерирането (3) не ни извежда от класа R_d. Следната лема дава това свойство.

Лема. Разпределението $\{\tilde{p}_k\}$ е d-РФИ разпределение, щом $\{p_k\} \in R_d$.

Доказателство. Трябва да докажем, че отношението $\tilde{\lambda}(k) = \tilde{p}_k / \sum_{j=k}^{\infty} \tilde{p}_j$

расте заедно с k. Тъй като $\{p_k\} \in R_d$, то за всяко $i \geqq k+1$ имаме

$$\lambda(i) = p_i / \sum_{j=i}^{\infty} p_j \geqq p_{k+1} / \sum_{j=k+1}^{\infty} p_j. \tag{4}$$

Като използуваме неравенството (4), последователно получаваме

$$\mu_1 \tilde{p}_k = \sum_{i \geqq k+1} p_i = \sum_{i \geqq k+1} p_i \left(\sum_{\nu=i}^{\infty} p_\nu / \sum_{\nu=i}^{\infty} p_\nu \right)$$

$$\geqq \sum_{i \geqq k+1} p_{k+1} \sum_{\nu \geqq k+1} p_\nu / \sum_{\nu \geqq k+1} p_\nu = \lambda(k+1) \sum_{i \geqq k+1} \tilde{p}_{i-1} \mu_1,$$

или

$$\tilde{\lambda}(k) \geqq \lambda(k+1). \tag{5}$$

Понеже $\lambda(k)$ не намалява, от неравенството (5) следва

$$\tilde{\lambda}(k) \geqq \lambda(k), \quad k = 0, 1, 2, \ldots \tag{6}$$

Ще покажем, че разликата $\Delta = \tilde{\lambda}(k+1) - \tilde{\lambda}(k)$ е неотрицателна. С тъждествени преобразувания разликата Δ се написва така:

$$\Delta = \left[(\tilde{p}_{k+1} - \tilde{p}_k) \sum_{i \geqq k} \tilde{p}_i + \tilde{p}_k^2 \right] / \sum_{i \geqq k+1} \tilde{p}_i \sum_{i \geqq k} \tilde{p}_i;$$

разделяме двете страни на горното равенство на $\tilde{\lambda}(k+1)$ и намираме

$$\tilde{\lambda}^{-1}(k+1) \Delta = [\tilde{\lambda}(k) - \lambda(k+1)] \tilde{p}_k / \tilde{p}_{k+1} \geqq 0;$$

като сме взели пред вид неравенството (5). С това лемата е доказана.

Сега ще използуваме само факта

$$\tilde{\lambda}(k) \geqq \tilde{\lambda}(0), \quad k = 0, 1, 2, \ldots, \tag{7}$$

който ни дава възможност да получим едно неравенство между функциите на разпределение F и F_1:

$$F(k+1) = \sum_{i=0}^{k} p_i, \quad F_1(k+1) = \sum_{i=0}^{k} \tilde{p}_i.$$

Неравенството (7), изразено чрез вероятностите $\tilde{p}_k$, е

$$\tilde{p}_k / \sum_{i \geqq k} \tilde{p}_i \geqq \tilde{p}_0, \text{ или } \sum_{i \geqq k+1} p_i \geqq (1 - p_0) \sum_{i \geqq k} \tilde{p}_i.$$

Допълвайки сумите в последното неравенство до единица, получаваме

$$F(k+1) \leqq p_0 + (1 - p_0) \sum_{i=0}^{k-1} \tilde{p}_i = p_0 + (1 - p_0) F_1(k). \tag{8}$$

Да разгледаме уравнението

$$u_n = p_n + \sum_{i=0}^{n} p_i u_{n-i}, \quad n=0, 1, 2, \cdots, \tag{9}$$

когато $\{p_n\}$ е дадено разпределение от класа R_d. Уравнението (9) е известно като уравнение на възстановяването и играе роля в теорията на вериги на Марков, в частен случай от нея. Нашата главна цел е да дадем някои оценки за решението $u_0, u_1, u_2, \cdots$ на (9). При $n=0$ от уравнението (9) намираме $u_0=p_0/(1-p_0)$. После при $n=1$ намираме u_1 и т. н., така че съществува единствено решение $\{u_n\}$. От същия вид, както (9), е и уравнението

$$\tilde{u}_n = \tilde{p}_n + \sum_{i=0}^{n} \tilde{p}_i \, \tilde{u}_{n-i}, \quad n \geqq 0, \tag{10}$$

където вероятностите $\tilde{p}_n$ са определени чрез (3). Решението $\{\tilde{u}_n\}$ на (10) $\tilde{u}_n = \mu_1^{-1}$, $n=0, 1, \cdots$ Наистина да означим с $\tilde{U}(z)$ пораждащата функция на $\{\tilde{u}_n\}: \tilde{U}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \tilde{u}_n z^n$ и с $f(z)$ и $\tilde{f}(z)$ пораждащите функции съответно на p_n и $\tilde{p}_n$:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n z^n, \quad \tilde{f}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \tilde{p}_n z, \quad 0 \leqq z < 1.$$

Понеже $\tilde{p}_n$ се определя от разпределението $\{p_n\}$, то $\tilde{f}(z)$ се изразява чрез $f(z)$:

$$\tilde{f}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{\nu=n+1}^{\infty} p_\nu \mu_1^{-1} z^n = \mu_1^{-1} \sum_{\nu=1}^{\infty} p_\nu \frac{1-z^n}{1-z} = \frac{1-f(z)}{\mu_1(1-z)}. \tag{11}$$

От (10) с умножаване на z^n и сумиране по n получаваме $\tilde{U}(z) = \tilde{f}(z)/(1-f(z))$ или като заместим $\tilde{f}(z)$ с равното му по (11), намираме $\tilde{U}(z) = [\mu_1 \times (1-z)]^{-1}$. Следователно всички $\tilde{u}_n$ са равни на μ_1^{-1}. Използвайки връзката (11) между $f(z)$ и $\tilde{f}(z)$, лесно получаваме, че ако $\tilde{p}_k = p_k$, то $p_k = pq^k$. С други думи, ако при итерирането (3) разпределението се запазва, то $\{p_k\}$ е геометрично разпределение. Видяхме, че при уравнение (10) всички $\tilde{u}_n$ са μ_1^{-1} и сумата $\tilde{u}_0 + \tilde{u}_1 + \cdots + \tilde{u}_n$ ще е $(n+1)/\mu_i$. Ще докажем, че геометричното разпределение по отношение на тази сума има максимално свойство. Вярно е следното твърдение.

Теорема 1. Ако $\{p_k\} \in R_d$ и u_n, $n=0, 1, \cdots$, е решение на уравнението на възстановяване (9), то

(12) $$u_0+u_1+\cdots+u_n\leqq\frac{n+1}{\mu_1},\ n=0,\ 1,\ 2,\cdots$$

Доказателство. От уравнението (9) със сумиране по n получаваме уравнение относно сумите $U_n=u_0+u_1+\cdots+u_n$:

(13) $$U_n=\sum_{k=0}^{n}p_k+\sum_{\nu=0}^{n}p_\nu U_{n-\nu},\ n=0,\ 1,\ 2,\cdots$$

Равенствата (13) можем да запишем символично като едно:

$$\{U_n\}=\{F(n+1)\}+\{p_n*U_n\},$$

където $*$ означава композицията на редиците $\{p_n\}$ и $\{U_n\}$. Замествайки U_n последователно в дясната страна на горното равенство, ще имаме

(14) $$\{U_n\}=\{F(n+1)\}+\{p_n*F(n+1)\}+\{p_n*p_n*F(n+1)\}+\cdots$$

В равенството (14) да заместим навсякъде $F(n+1)$ с нещо по-голямо; използувайки неравенството (8), ще получим

(15) $$\{U_n\}_n<\text{“}\ \{p_0+(1-p_0)F_1(n)\}+\{p_n*(p_0+(1-p_0)F_1(n))\}+\cdots$$

Символът „$<$“ означава неравенство в същата посока за сравнените членове от лявата и дясната страна на (15). С прегрупиране на изразите отдясно на (15) намираме

(16) $$\{U_n\}_n<\text{“}\{p_0[1+U_n]\}+\{(1-p_0)[F_1(n)+p_n*F_1(n)+\cdots\}.$$

Тъй като $F_1(n)+p_n*F_1(n)+p_n*p_n*F_1(n)+\cdots=F_1(n)+p_n*\tilde{U}_{n-1}$, където $\tilde{U}_{n-1}=\tilde{u}_0+\tilde{u}_1+\cdots+\tilde{u}_{n-1}$. Видяхме обаче, че решението на (10) е $\tilde{u}=\mu_1^{-1}$, така че $\tilde{U}_{n-1}=n/\mu_1$ и (16) ще ни даде

(17) $$u_0+u_1+\cdots+u_n\leqq p_0(1+u_0+u_1+\cdots+u_n)+(1-p_0)n/\mu_1.$$

Като вземем пред вид $u_0=p_0/(1-p_0)$, от неравенството (17) получаваме

(18) $$u_1+u_2+\cdots+u_n\leqq n/\mu_1.$$

Но от (6) при $k=0$ следва $\tilde{p}_0=\tilde{\lambda}(0)\geqq\lambda(0)=p_0$, или $(1-p_0)\geqq\mu_1 p_0$. Последното неравенство в същност е

(19) $$u_0\leqq\mu_1^{-1}.$$

От (18) и (19) следва (12). Доказаната теорема ни показва, че разликата $\frac{n+1}{\mu_1}-\sum_{k=0}^{n}u_k$ е винаги неотрицателна.

Сега ще дадем оценка на $f(z)$ отдолу. За тази цел да определим случайна величина Y_n чрез разпределението $\{p_k\}$ по следния начин:

$$\tilde{p}_k=P(Y_n=k)=p_{n+k}\Big|\sum_{i=n}^{\infty}p_i,\ k=0,\ 1,\cdots$$

Лесно се проверява, че разпределението $\{\tilde{p}_k\}$ е d-РФИ. Нека $\varphi_n(z)$ е пораждащата функция на Y_n:

$$\varphi_n(z)=Ez^{Y_n}=[\bar{F}(n)]^{-1}\sum_{i=0}^{\infty}p_{n+i}\,z^i. \tag{20}$$

От равенството (20) получаваме за пораждащата функция $f(z)$ на X следното представяне:

$$f(z)=\varphi_n(z)\bar{F}(n)z^n+\sum_{k=0}^{n-1}p_k\,z^k,$$

откъдето

$$f(z)\geqq\varphi_n(z)\,z^n\,\bar{F}(n)+F(n)\,z^n. \tag{21}$$

Тъй като $\varphi_n(z)\,z^n\leqq z^n$ и $\bar{F}+F=1$, то неравенството (21) може да се усили:

$$f(z)\geqq\varphi_n(z)\,z^n. \tag{22}$$

Неравенството (22) показва, че разпределенията $F(n)$, при които пораждащата функция $f(z)$ се минимизира, трябва да са такива, че пораждащата им функция да е от вида

$$f(z)=\varphi_n(z)\,z^n. \tag{23}$$

Нека μ_1 и μ_2 са първите два момента на X. Да разгледаме съвкупността R_2 от всички функции $f(z)$, съответстващи на d-РФИ разпределенията с фиксирани μ_1 и μ_2. От равенство (23) чрез диференциране намираме

$$n=\mu_1-\varphi_n'(1), \tag{24}$$

така че, ако $f(z)$ е от вида (23), разликата (24) трябва да е цяло неотрицателно число. Ще докажем следното твърдение.

Теорема 2. Ако X е произволно разпределена d-РФИ случайна величина, $EX=\mu_1$ и $EX^2=\mu_2$, то за пораждащата ѝ функция $f(z)=Ez^X$ имаме оценката

$$f(z)\geqq\frac{p}{1-q\,z}\,z^{\mu_1-\tilde{\mu}_1}, \tag{25}$$

където $\tilde{\mu}_1=q/p=2^{-1}(-1+\sqrt{1+4\sigma^2})$.

Доказателство. Нека X_0 е случайна величина, за която пораждащата функция е

$$f_0(z)=Ez^{X_0}=\frac{p}{1-qz}\,z^{\mu_1-\tilde{\mu}_1}.$$

С непосредствена проверка се вижда, че $EX_0=\mu_1$, $EX_0^2=\mu_2$. Да предположим отначало, че μ_1 и μ_2 са такива числа, че разликата $n=\mu_1-\tilde{\mu}_1$ е цяло

неотрицателно число. Тогава очевидно $f_0(z) \in R_2$. Да означим с $\varphi_0(z)$ пораждащата функция $\varphi_0(z)=p(1-qz)^{-1}$ и с $G_0(k)$ — съответната ѝ функция на разпределение.

Тъй като функцията $\varphi_n(z)$ от (23) е пораждаща функция на едно d-РФИ разпределение $\Phi_n(k)$, то редицата $a_k=\lg \bar{\Phi}_n(k)$ е вдлъбната. Начупената линия Г с върхове в точките $(n+k, a_k)$, $k=0, 1, \cdots$, ще е също вдлъбната. Тогава точките $(n+k, \lg \bar{G}_0(k))$, $k=0, 1, \cdots$, ще лежат на една права, която, ако пресича Г, ще я пресича само веднъж. Тъй като $EX=EX_0$, то Г и тази права се пресичат. Абсцисата на пресечната точка да означим с x_0. Нека ν е най-голямото k, при което $n+k \leq x_0$. Понеже точките $(n+k, \lg G_0)$ са под тези от линията Г за $k=0, 1, \cdots, \nu$, то

$$\bar{\Phi}_0(k)-\bar{G}_0(k) \geq 0, \quad k=0, 1, \cdots, \nu, \tag{26}$$

а за $k>\nu$ са над и следователно

$$\bar{\Phi}_0(k)-\bar{G}_0(k)<0, \quad k>\nu. \tag{27}$$

Да определим правата $r(x)=ax+b$ от условията $r(n)=z^n$, $r(n+\nu)=z^{n+\nu}$. Тогава разликата $\Delta(i)=z^i-r(i)$ мени знака си по следния начин:

$$\Delta(i) \begin{cases} \geq 0, & i=0, 1, \cdots, n-1, \\ \leq 0, & i=n, n+1, \cdots, n+\nu, \\ >0, & i>n+\nu. \end{cases} \tag{28}$$

От неравенствата (26), (27) и (28) следва

$$(z^{n+k}-r(n+k))\,[\bar{\Phi}_0(k)-\bar{G}_0(k)] \leq 0 \tag{29}$$

за всяко k. От съвпадението на първите два момента на X и X_0 се получава, че

$$\sum_{k=0}^{\infty} r(n+k)\,[\bar{\Phi}_0(k)-\bar{G}_0(k)]=0. \tag{30}$$

Като използуваме (30), след сумиране на неравенствата (29) намираме

$$\sum z^{n+k}\bar{\Phi}_0(k) \leq \sum z^{n+k}\bar{G}_0(k),$$

откъдето следва $\varphi_n(z)\,z^n \geq \varphi_0(z)\,z^{\mu_1-\tilde{\mu}_1}$, т. е. неравенството (25).

Тъй като за едно d-РФИ разпределение винаги имаме $\mu_2 \leq 2\mu_1^2+\mu_1$, то с непосредствена проверка се вижда, че $\mu_1-\tilde{\mu}_1 \geq 0$. При дадени μ_1 и μ_2 числото $n=\mu_1-\tilde{\mu}_1$ може да не е цяло. В такъв случай вместо случайната величина X с пораждаща функция $\varphi_n(z)\,z^n$ ще разгледаме случайната величина $X+\theta$, където $\theta=1-\{\mu_1-\tilde{\mu}_1\}$. Величината $X+\theta$ не принадлежи на класа R_d, но неравенството $f(z)+Ez^X \geq Ez^{X+\theta}$ ни дава възможност да оценим $f(z)$ отдолу по същия начин. Да отбележим, че при изменяне на μ_1 в $\mu_1+\theta$ средната $\tilde{\mu}_1$ не се изменя, тъй като зависи само от σ^2. Доказаното неравенство (25) е точно, понеже се достига, когато разпределението $\{p_k\}$ е $p_k=0$ при $k<n$ и $pq^{k-n}=p_k$ при $k \geq n$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Барлоу, Р., Прошан, Ф.: Математическая теория надежности. М., Сов. радио, 1969.

Постъпила на 21. XII. 1976 г.

RENEWALS FOR DISCRETE DISTRIBUTIONS WITH LOGCONCAVE TAILS

A. Obretenov

(SUMMARY)

Discrete distributions $\{p_n\}$, $p_n=P(\xi=n)$, for which $q_k^2 \geqq q_{k-1}\, q_{k+1}$, $q_k = p_{k+1}+p_{k+2}+\cdots$, are considered. If $\{u_n\}$ is the solution of the well known renewal equation, it is shown that $\sum_{k=0}^{n} u_k \leqq \mu_1^{-1}\,(n+1)$, where μ_1 is the first moment of $\{p_n\}$. The inequality is sharp. Let $f(s)=\sum_{n=0}^{\infty} p_n\, s^n$ be the generating function of $\{p_n\}$. Then the inequality $f(s) \geqq p\,(1-qs)^{-1}\, s^{\mu_1-\tilde{\mu}_1}$ is true. Here $\tilde{\mu}_1=p/q=2^{-1}(-1+\sqrt{1+4\sigma^2})$, σ^2—variation of $\{p_n\}$. The last inequality is reached, when $p_n=0$, $n<\mu_1-\tilde{\mu}_1$ and $p_n=pq^n$, $n \geqq \mu_1-\tilde{\mu}_1$. Some elementary properties for this class of distributions are obtained.