ВИСОКОЧЕСТОТНО ФЛУИДНО ТЕЧЕНИЕ, ПРЕДИЗВИКАНО ОТ ОСЦИЛИРАЩА ПОРЕСТА СФЕРА

Запрян Запрянов, Соня Стоянова

През 1831 г. Фарадей [1] открива експериментално съществуването на стационарно течение около вибрираща пластина в безкраен визкозен флуид. През 1874 г. Дворак [2] описва това явление при колебателно течение в тръба, а през 1884 г. Релей [3] прави опит за теоретична обосновка на явлението, наблюдавано в горните експерименти, без да се използват идеите на теорията на граничния слой. В работите на Кариер [4], Андрейд [5] и Шлихтинг [6] отново се проявява интерес към проблема за индуцирането на стационарна част в някои нестационарни течения, породени от колебаещи се твърди тела във флуид. Изследванията на Шлихтинг предизвикват смут, защото резултатите, получени от него, в известен смисъл противоречат на тези, получени от Кариер. По-късно се установява, че резултатите на Кариер съответствуват на малки числа на Рейнолдс ($Re \sim 10$), докато при Шлихтинг $Re \sim 1000$. Теорията на граничния слой, приложена от Шлихтинг, е валидна само при големи стойности на Re и не е приложима за течението, описано от Кариер. Излизайки от уравненията на нестационарния граничен слой, Шлихтинг пресмята функцията на точка в приближенията ψ_{00}, $\psi_{10}^{(a)}$ и $\psi_{10}^{(s)}$ в случая на осцилиращ кръгов цилиндър в безкраен флуид. Естествената постановка на задачата изисква нулеви гранични условия за второто приближение на тази тангенциална компонента на скоростта (стационарна и нестационарна част) в края на граничния слой. Но той установява, че стационарната част на тангенциалната компонента на скоростта не се анулира на края на граничния слой, което свидетелствува за появата на вторично стационарно течение и във външната област на флуидното течение. В своите изследвания Шлихтинг изхожда от класическата постановка на задачата от граничен слой, като не взема пред вид влиянието на членовете от по-висок ред на външното течение върху течението в граничния слой. Аналогично постъпва и Рой [7], която разглежда индуцираното вторично стационарно течение в ососиметричния случай.

В изследванията си относно появата и развитието на нестационарния периодичен граничен слой Стюарт [8, 9] разкрива важността на един нов параметър Re_s, имащ пряко отношение към изясняване на физическия механизъм, ръководещ вторичното стационарно течение. Съществен принос в цялостното изследване на този проблем внасят работите на Райли [10, 11, 12], които се основават на съвременното асимптотично третиран

на теорията на граничния слой. В [10] Райли, излизайки от уравненията на Навие — Стокс, изследва структурата на стационарното вторично течение, породено от малкоамплитудните високо- и нискочестотни колебания на твърда сфера в неограничен флуид.

В настоящата работа се изследва вторичното течение, индуцирано от малкоамплитудни високочестотни колебания на пориста сфера в безкраен вискозен флуид.

1. ПОСТАНОВКА НА ЗАДАЧАТА

Да разгледаме флуидно течение, което в безкрайност осцилира със скорост $U_\infty \cos\omega t$, където U_∞ е характерна скорост и ω — честота на трептене. Нека в това течение е потопена пориста сфера, имаща радиус a, с която неподвижно е свързана сферична координатна система (r, θ, φ), така че началото на координатната система да съвпада с центъра на сферата и линията $\theta=0$ да съвпада с оста на трептене. Излизайки от уравненията на Навие—Стокс, като изключим налягането и вземем пред вид, че уравнението на непрекъснатостта се удовлетворява автоматично, като положим

$$u' = \frac{1}{r'^2 \sin^2\theta}\frac{\partial\psi'}{\partial\theta}, \quad v' = -\frac{1}{r'\sin\theta}\frac{\partial\psi'}{\partial r'}, \tag{1.1}$$

за функцията на тока ψ на разглежданото течение получаваме уравнението

$$\frac{\partial}{\partial t}(D^2\psi') + \left[\frac{1}{r'^2}\frac{\partial(\psi', D^2\psi')}{\partial(r', \mu)} + \frac{2}{r'^2}D^2\psi' . L\psi'\right] = \nu D^4\psi', \tag{1.2}$$

където

$$D^2 = \frac{\partial^2}{\partial r'^2} + \frac{1-\mu^2}{r'^2}\frac{\partial^2}{\partial\mu^2}, \quad L = \frac{\mu}{1-\mu^2}\frac{\partial}{\partial r'} + \frac{1}{r'}\frac{\partial}{\partial\mu},$$

$\mu = \cos\theta$; ν — кинематичният вискозитет на флуида.

Обезразмеряваме уравнението, като положим

$$u' = uU_\infty, \quad v' = vU_\infty, \quad \psi' = a^2 U_\infty \psi, r' = ra, \quad t = \tau/\omega,$$

и получаваме

$$|M|^2 \frac{\partial(D^2\psi)}{\partial\tau} + \mathrm{Re}\left[\frac{1}{r^2}\frac{\partial(\psi, D^2\psi)}{\partial(r,\mu)} + \frac{2}{r^2}D^2\psi . L\psi\right] = D^4\psi, \tag{1.3}$$

където $|M|^2 = \frac{a^2\omega}{\nu}$, $\mathrm{Re} = \frac{U_\infty a}{\nu}$.

При формулиране на граничните условия използуваме подхода на Леонов [13], т. е. търсим скоростта на проницаемост на флуида през обвивката на сферата, като наложим изискването за непрекъснатост на скоростта по контура на тялото, а именно:

(1.4) $$u|_{r=1+0} = \hat{u}|_{r=1-0} \; (\psi = \hat{\psi} \text{ при } r=1),$$

(1.5) $$v|_{r=1+0} = \hat{v}|_{r=1-0} \left(\frac{\partial\psi}{\partial r} = \frac{\partial\hat{\psi}}{\partial r} \text{ при } r=1\right).$$

Тук $\hat{u}$, $\hat{v}$ са компонентите на скоростта на течението вътре в сферата, а u, v — компонентите на скоростта на течението вън от сферата.

Граничното условие, което удовлетворява ψ при $r\to\infty$, е

(1.6) $$\psi \sim \frac{1}{2} r^2 \sin^2\theta \,.\, e^{i\tau}.$$

Единствеността на решението за функцията на тока се осигурява от условието скоростта да бъде крайна в центъра на сферата $r=0$:

(1.7) $$\hat{\psi} = \frac{\partial\hat{\psi}}{\partial r} = 0.$$

Ще предполагаме, че амплитудата на осцилациите U_∞/ω е малка в сравнение с радиуса на сферата a, т. е. величината $U_\infty/\omega a = \varepsilon$ ще разглеждаме като малък параметър. Освен това ще предполагаме, че за честотния параметър $|M|$ имаме $|M|^2 = a^2\omega/\nu \gg 1$. Понеже $\varepsilon = \mathrm{Re}/|M|^2$, то $\mathrm{Re} \ll |M|^2$. В тази задача се оказва, че за числото на Рейнолдс на стационарното флуидно течение имаме $\mathrm{Re}_s = \varepsilon\,\mathrm{Re}$. За да не разглеждаме „вторичен“ стационарен граничен слой, тук ще се ограничим с подслучая $\mathrm{Re}_s \ll 1$. От уравнението (1.3) и условието $|M|^2 \gg 1$ следва, че вън от сферата има граничен слой с дебелина $O(|M|^{-1})$. По същите причини следва, че и вътре в сферата ще има граничен слой със същата дебелина $O(|M|^{-1})$. Следователно задачата се състои в намирането на „вътрешно“ и „външно“ решение както вън, така и вътре в сферата. Решенията ще търсим във вид на асимптотични редове по степените на ε.

2. ПОСТРОЯВАНЕ НА РЕШЕНИЕТО

2.1. Първо приближение вън от сферата. Тъй като $\varepsilon = \mathrm{Re}/|M|^2$ и $\mathrm{Re}_s = \varepsilon\,\mathrm{Re}$, уравнението (1.13) може да се запише и така:

(2.1) $$\mathrm{Re}_s \frac{\partial(D^2\Psi)}{\partial\tau} + \varepsilon\,\mathrm{Re}_s\left[\frac{1}{r^2}\frac{\partial(\Psi, D^2\Psi)}{\partial(r,\mu)} + \frac{2}{r^2} D^2\Psi \,.\, L\Psi\right] = \varepsilon^2 D^4\Psi.$$

Определянето на функцията на тока за течението вън от сферата ще търсим във вид на асимптотични редове съответно вън и вътре за граничния слой

(2.2) $$\Psi = \Psi_1 + \varepsilon\Psi_2 + \cdots,$$

(2.3) $$\psi = \psi_1 + \varepsilon\psi_2 + \cdots$$

Като заместим функцията на точка Ψ от (2.2) в уравнението (2.1) и приравним коефициентите пред ε^0, получаваме, че Ψ_1 удовлетворява уравнението

(2.4) $$\frac{\partial}{\partial\tau}(D^2\Psi_1)=0.$$

Освен това функцията Ψ_1 трябва да удовлетворява при $r\to\infty$ граничното условие

(2.5) $$\Psi_1\sim\frac{1}{2}r^2(1-\mu^2)e^{i\tau}.$$

Тъй като Ψ_1 е периодична функция на времето, от (2,4) следва, че

(2.6) $$D^2\Psi_1=0.$$

Решението на (2.6), което удовлетворява (2.5), има вида

(2.7) $$\Psi_1=\frac{1}{2}\left(r^2+\frac{2C}{r}\right)(1-\mu^2)e^{i\tau},$$

където C е константа, която ще бъде определена от условието за срастване с решението в областта на граничния слой. Дебелината на този граничен слой съгласно (2.1) е равна на $\varepsilon/\sqrt{\mathrm{Re}}$, затова въвеждаме нова „разтягаща“ променлива $\eta=(r-1)\sqrt{\mathrm{Re}_s}/\varepsilon\sqrt{2}=(r-1)|M|/\sqrt{2}$. Като направим смяна на променливата r' в равенствата (1.1) от условието, че u и v не трябва да се анулират при $M\to\infty$, получаваме, че функцията на тока ψ вътре в граничния слой трябва да се мащабира така: $\psi=|M|\Psi/\sqrt{2}$. От (2.1) получаваме следното уравнение, валидно в граничния слой вън от сферата:

(2.8) $$\frac{\partial}{\partial\tau}\left(\frac{\partial^2\psi}{\partial\eta^2}\right)+\varepsilon\left[\frac{\partial\left(\psi,\frac{\partial^2\psi}{\partial\eta^2}\right)}{\partial(\eta,\mu)}+2\frac{\partial^2\psi}{\partial\eta^2}\frac{\mu}{1-\mu^2}\frac{\partial\psi}{\partial\eta}\right]=\frac{1}{2}\frac{\partial^4\psi}{\partial\eta^4}.$$

От (2.3) и (2.8) следва, че ψ_1 удовлетворява уравнението

(2.9) $$\frac{\partial}{\partial\tau}\left(\frac{\partial\psi_1}{\partial\eta^2}\right)-\frac{1}{2}\frac{\partial^4\psi_1}{\partial\eta^4}=0.$$

Граничните условия на сферата за ψ_1 съгласно (1.4) и (1.5) имат вида

(2.10) $$\frac{\partial\psi}{\partial\eta}=0 \quad \text{при } \eta=0,$$

(2.11) $$\psi_1=\hat{\psi}_1 \quad \text{при } \eta=0.$$

Освен това от условието за срастване на решението в граничния слой с решението извън него получаваме, че

(2.12) $$\lim_{\eta\to\infty}\frac{\partial\psi_1}{\partial\eta}=\lim_{r\to1}\frac{\partial\Psi_1}{\partial r}.$$

От условието за порьозност на сферата имаме

(2.13) $$\psi_1|_{r=1}=\frac{m_0}{2}(1-\mu^2)e^{i\tau},$$

където m_0 е параметър на порьозността, който се задава в определен интервал. Границите на този интервал ще бъдат намерени по-долу. Въз основа на (2.13) функцията ψ_1 търсим във вида

$$\psi_1 = f(\eta)(1-\mu^2)e^{i\tau}. \tag{2.14}$$

Тогава $f(\eta)$ ще удовлетворява уравнението

$$f^{IV} - 2if'' = 0,$$

чието общо решение е

$$f(\eta) = C_1 + C_2\eta + C_3 e^{(1+i)\eta} + C_4 e^{-(1+i)\eta}.$$

След определяне на константите получаваме

$$\Psi_1 = \frac{1}{2}\left[r^2 + (m_0 - 1)\frac{1}{r}\right](1-\mu^2)e^{i\tau}, \tag{2.15}$$

$$\psi_1 = \left\{\frac{m_0}{2} - \frac{(3-m_0)}{4}(1-i) + \frac{(3-m_0)}{2}\left[\eta + \frac{1-i}{2}e^{-(1+i)\eta}\right]\right\}(1-\mu^2)e^{i\tau}. \tag{2.16}$$

2.2. Първо приближение вътре в сферата. Както бе отбелязано по-горе, течението вътре в сферата също можем да определим, като разгледаме две подобласти — граничен слой близо до повърхността на сферата и потенциално течение в останалата част вътре в сферата. В рамките на граничния слой използуваме променливите $\zeta = \frac{(1-r)|\hat{M}|}{\sqrt{2}}$, $\hat{\psi} = \frac{\sqrt{\mathrm{Re}_s}}{\varepsilon\sqrt{2}}\hat{\Psi}$.

Функцията на тока в съответните подобласти ще търсим във вида

$$\hat{\psi} = \hat{\psi}_1 + \varepsilon\hat{\psi}_2 + \cdots, \tag{2.17}$$

$$\hat{\Psi} = \hat{\Psi}_1 + \varepsilon\hat{\Psi}_2 + \cdots \tag{2.18}$$

Уравненията, които удовлетворяват $\hat{\Psi}_1$ и $\hat{\psi}_1$, са аналогични на (2.6) и (2.9), а за граничните условия имаме

$$\left.\frac{\partial\hat{\Psi}_1}{\partial r}\right|_{r=0} = \hat{\Psi}_1|_{r=0} = 0, \tag{2.19}$$

$$\left.\frac{\partial\hat{\psi}_1}{\partial\zeta}\right|_{\zeta=0} = 0, \quad \hat{\psi}_1|_{\zeta=0} = \psi_1|_{\eta=0}, \tag{2.20}$$

$$\left.\frac{\partial\hat{\Psi}_1}{\partial r}\right|_{r\to 1} = -\left.\frac{\partial\hat{\psi}_1}{\partial\zeta}\right|_{\zeta\to\infty}. \tag{2.21}$$

След пресмятания, аналогични на по-горните, получаваме

$$\hat{\Psi}_1 = \frac{m_0}{2}\cdot r^2(1-\mu^2)e^{i\tau}, \tag{2.22}$$

$$\hat{\psi}_1 = -\frac{m_0}{2}\left[i - 2 + 2\zeta + (1-i)e^{-(1+i)\zeta}\right](1-\mu^2)e^{i\tau}. \tag{2.23}$$

2.3. Второ приближение вън от сферата. От (2.1) и (2.3) след приравняване на коефициентите пред ε^1 получаваме следното уравнение за ψ_2

$$(2.24)\qquad \frac{\partial}{\partial\tau}\left(\frac{\partial^2\psi_2}{\partial\eta^2}\right)-\frac{1}{2}\frac{\partial^4\psi_2}{\partial\eta^4}=-\left[\frac{\partial\left(\psi_1,\frac{\partial^2\psi_1}{\partial\eta^2}\right)}{\partial(\eta,\mu)}+\frac{2\mu}{(1-\mu^2)}\cdot\frac{\partial^2\psi_1}{\partial\eta^2}\frac{\partial\psi_1}{\partial\eta}\right].$$

Тъй като само реалната част на ψ_2 има физичен смисъл, преработваме дясната страна, като вземаме пред вид, че реалната част на произведението на две комплексни числа не е равно на произведението на реалните части на множителите. Получаваме

$$\frac{\partial}{\partial\tau}\left(\frac{\partial^2\psi_2}{\partial\eta^2}\right)-\frac{\partial^4\psi_2}{\partial\eta^4}=(3-m_0)^2\mu(1-\mu^2)e^{-\eta}\left[i\left(\eta+\frac{m_0}{(3-m_0)}-\frac{1}{2}\right)\left(e^{-i\eta}+e^{i(2\tau-\eta)}\right)\right.$$

$$(2.25)\qquad \left.-\frac{e^{i(2\tau-\eta)}-e^{-i\eta}}{2}+\frac{e^{-\eta}}{2}\left(-1+e^{2i\tau}e^{-2i\eta}+ie^{2i\tau}e^{-2i\eta}\right)\right].$$

Тъй като в дясната страна на това уравнение има чисто стационарни членове и нестационарните притежават множителя $e^{2i\tau}$, функцията ψ_2 търсим във вида

$$(2.26)\qquad \psi_2=\frac{1}{2}\left(\xi_{20}(\eta)+e^{2i\tau}\xi_{22}(\eta)\right)\mu(1-\mu^2).$$

Тогава лесно получаваме, че $\xi_{20}(\eta)$ удовлетворява уравнението

$$(2.27)\qquad \xi_{20}^{IV}=-2(3-m_0)^2e^{-\eta}\left[i\left(\eta+\frac{m_0}{3-m_0}\right)e^{-i\eta}-\frac{e^{-\eta}}{2}+\frac{(1-i)}{2}e^{-i\eta}\right],$$

граничните условия

$$(2.28)\qquad \xi'_{20}(0)=0,$$

$$(2.29)\qquad \mu(1-\mu^2)\xi_{20}(0)=\lim_{\zeta\to 0}\hat{\psi}_2^{(s)}$$

и условията за срастване

$$(2.30)\qquad \lim_{\eta\to\infty}[\xi_{20}\cdot\mu(1-\mu^2)]=\lim_{r\to 1}\Psi_3^{(s)},$$

$$(2.31)\qquad \lim_{\eta\to\infty}[\xi'_{20}\mu(1-\mu^2)]=\lim_{r\to 1}\frac{\partial\Psi_2^{(s)}}{\partial r}.$$

Общото решение на (2.27) има вида

$$(2.32)\qquad \xi_{20}(\eta)=B_1+B_2\eta+B_3\eta^2+B_4\eta^3+\frac{(3-m_0)^2}{2}i\eta e^{-(1+i)\eta}$$

$$+\frac{(3-m_0)}{2}\left[m_0 i+\frac{3-m_0}{2}(5+3i)\right]e^{-(1+i)\eta}+\frac{3-m_0}{16}e^{-2\eta}.$$

От условието (2.28) имаме

$$B_2 = \frac{5(3-m_0)^2}{8} - \frac{m_0(3-m_0)}{2}.$$

Аналогично получаваме, че $\xi_{22}(\eta)$ удовлетворява уравнението

$$4i\xi_{22}^{II} - \xi_{22}^{IV} = 2(3-m_0)^2 e^{-\eta}\left[i\left(\eta + \frac{m_0}{3-m_0} - \frac{1}{2}\right)e^{-i\eta} - \frac{e^{-i\eta}}{2} + \frac{1+i}{2}e^{-(1+2i)\eta}\right], \tag{2.33}$$

граничните условия

$$\xi_{22}^{I}(0) = 0, \tag{2.34}$$

$$\mu(1-\mu^2)\xi_{22}(0) = \lim_{\zeta\to 0}\hat{\psi}_2^{(\alpha)} \tag{2.35}$$

и условията за срастване

$$\lim_{\eta\to\infty}[\xi_{22}\cdot\mu(1-\mu^2)] = \lim_{r\to 1}\Psi_3^{(\alpha)}, \tag{2.36}$$

$$\lim_{\eta\to\infty}[\xi'_{22}\cdot\mu(1-\mu^2)] = \lim_{r\to 1}\frac{\partial\Psi_2^{(\alpha)}}{\partial r}. \tag{2.37}$$

Общото решение на (2.33) се дава с израза

$$\xi_{22}(\eta) = a_1 + a_2\eta + a_3 e^{-(1+i)\eta\sqrt{2}} + a_4 e^{(1+i)\eta\sqrt{2}} - \frac{(3-m_0)^2}{2} i\eta e^{-(1+i)\eta} - \frac{(3-m_0)^2}{2}\left[\frac{im_0}{3-m_0} - \frac{i}{2} - \frac{1}{2}\right]e^{-(1+i)\eta} + \frac{(3-m_0)^2}{32}(1+i)e^{-2(1+i)\eta}. \tag{2.38}$$

От (2.34) намираме зависимостта

$$A_2 = (1+i)\sqrt{2}(A_3 - A_4) + \frac{(3-m_0)^2 i}{2} - \frac{(3-m_0)^2}{2}(1+i)\left[\frac{im_0}{3-m_0} - \frac{1+i}{2}\right] + \frac{(3-m_0)^2}{8}i; \tag{2.39}$$

като заместим (2.2) в (2.1) и приравним коефициентите пред ε^1, получаваме

$$\frac{\partial}{\partial\tau}(D^2\Psi_2) = 0. \tag{2.40}$$

Граничните условия за Ψ_2 са

$$\Psi_2 \sim o(r^2) \text{ при } r\to\infty \tag{2.41}$$

и

(2.42) $$\lim_{r\to 1}\Psi_2=\lim_{\eta\to\infty}\frac{\psi_1\sqrt{2}}{Re_s^{1/2}}.$$

Функцията Ψ_2 търсим във вида

(2.43) $$\Psi_2=F(r,\mu)+\Phi(\tau)\,G(r,\mu),$$

където G удовлетворява уравнението

(2.44) $$D^2G=0.$$

От условието за срастване (2.42) намираме

(2.45) $$\Psi_2=-\frac{(3-m_0)}{2\,\mathrm{Re}_s^{1/2}}\left[\cos\left(\tau-\frac{\pi}{4}\right)-\frac{m_0\sqrt{2}}{3-m_0}\cos\tau\right](1-\mu^2).$$

Това показва, че

$$\Phi(\tau)=-\frac{(3-m_0)}{2\,\mathrm{Re}_s^{1/2}}\left[\cos\left(\tau-\frac{\pi}{4}\right)-\frac{m_0\sqrt{2}}{3-m_0}\cos\tau\right]$$

и

(2.46) $$G(r,\mu)\to(1-\mu^2)\ \text{при}\ r\to 1.$$

Като вземем пред вид (2.44), (2.41) и (2.46), намираме

(2.47) $$G(r,\mu)=(1-\mu^2)/r.$$

След приравняване на коефициентите пред ε^2 в уравнението (2.1) и вземайки под внимание (2.6), получаваме следното уравнение за Ψ_3:

(2.48) $$\frac{\partial}{\partial\tau}(D^2\Psi_3)+\frac{1}{r^2}\left[\frac{\partial\Psi_1}{\partial r}\frac{\partial}{\partial\mu}(D^2\Psi)-\frac{\partial\Psi_1}{\partial\mu}\frac{\partial}{\partial r}(D^2\Psi_2)+2D^2\Psi_2L\Psi_1\right]=0.$$

Но тъй като $D^2\Psi_2$ не зависи от τ (вж. (2.40)), а Ψ_1 е функцията на $\cos\tau$ то

(2.49) $$D^2\Psi_3=F_1(r,\mu)+G_1(r,\mu)\sin\tau,$$

където $G_1(r,\mu)$ можем да намерим, ако ни е известна функцията $F(r,\mu)$.

Уравнението за Ψ_4 се намира от (2.1), като се използува (2.6) след приравняване коефициентите пред ε^3:

(2.50) $$\mathrm{Re}_s\frac{\partial}{\partial\tau}(D^2\Psi_4)+\frac{\mathrm{Re}_s}{r^2}\left\{\frac{\partial\Psi_1}{\partial r}\frac{\partial}{\partial\mu}(D^2\Psi_3)-\frac{\partial\Psi_1}{\partial\mu}\frac{\partial}{\partial r}(D^2\Psi_3)+2D^2\Psi_3L\Psi_1\right\}$$
$$+\frac{\mathrm{Re}_s}{r^2}\left\{\frac{\partial\Psi_2}{\partial r}\frac{\partial}{\partial\mu}(D^2\Psi_2)-\frac{\partial\Psi_2}{\partial\mu}\frac{\partial}{\partial\tau}(D^2\Psi_2)+2D^2\Psi_2\,2\Psi_2\right\}=D^4\Psi_2.$$

Знаем, че Ψ_1 е функция на $\cos\tau$, $D^2\Psi_2$ не зависи от τ и $D^2\Psi_3$ има вида (2.49). Аналогично, както в (11), предполагаме, че $\frac{\partial}{\partial\tau}(D^2\Psi_4)$ не съдържа

стационарна част. По такъв начин след приравняване в членовете, независещи от времето, получаваме

$$\frac{\mathrm{Re}_s}{r^2}\left[\frac{\partial F}{\partial r}\cdot\frac{\partial}{\partial\mu}(D^2F)-\frac{\partial F}{\partial\mu}\cdot\frac{\partial}{\partial r}(D^2F)+2D^2F.LF\right]=D^4F. \tag{2.51}$$

Тъй като по предположение $\mathrm{Re}_s\ll 1$, то в първо приближение по Re_s уравнението за F придобива по-простия вид

$$D^4F=0. \tag{2.52}$$

Граничните условия за $F(r,\mu)$ имат вида

$$F(r,\mu)\sim o(r^2) \quad \text{при } r\to\infty \tag{2.53}$$

и

$$\lim_{r\to 1} F(r,\mu)=0 \tag{2.54}$$

$$\lim_{r\to 1}\frac{\partial F}{\partial r}=\left[\frac{5(3-m_0)}{16}-\frac{(3-m_0)m_0}{4}+3B_4\eta^2\right]\mu(1-\mu^2). \tag{2.55}$$

Следователно $B_4=0$.

Решението на (2.52) с условията (2.53), (2.54) и (2.55) е

$$F(r,\mu)=\frac{3(3-m_0)}{32}(3m_0-5)\left(\frac{1}{r^2}-1\right)\mu(1-\mu^2). \tag{2.56}$$

Следователно за функцията Ψ_2 намираме

$$\Psi_2=\frac{3(3-m_0)}{32}(3m_0-5)\left(\frac{1}{r^2}-1\right)\mu(1-\mu^2)$$
$$-\frac{(3-m_0)}{2r\mathrm{Re}_s^{1/2}}\left[\cos\left(\tau-\frac{\pi}{4}\right)-\frac{m_0\sqrt{2}}{3-m_0}\cos\tau\right]\mu(1-\mu^2). \tag{2.57}$$

Съгласно (2.37) $C_2=C_4=0$, т. е.

$$\begin{aligned}\Psi_2=\frac{1}{2}\Bigg\{&B_1+\left[\frac{5(3-m_0)^2}{8}-\frac{(3-m_0)m_0}{2}\right]\eta+\frac{(3-m_0)^2}{2}\eta e^{-\eta}\sin\eta\\&+\frac{(3-m_0)}{2}e^{-\eta}\left[m_0\sin\eta+\frac{(3-m_0)}{2}(5\cos\eta+3\sin\eta)\right]+\frac{(3-m_0)^2}{16}e^{-2\eta}\\&+e^{2i\tau}\Bigg[A_1+\left(\frac{(3-m_0)^2}{2\sqrt{2}}\left(\frac{i\,m_0}{3-m_0}-\frac{i+1}{2}\right)-\frac{5(3-m_0)^2(1+i)}{16\sqrt{2}}\right)e^{-(1+i)\eta\sqrt{2}}\\&-\frac{(3-m_0)^2}{2}i\eta e^{-(1+i)\eta}-\frac{(3-m_0)^2}{2}\left(\frac{im_0}{3-m_0}-\frac{i+1}{2}\right)e^{-(1+i)\eta}\\&+\frac{(3-m_0)^2}{32}(1+i)e^{-2(1+i)\eta}\Bigg]\Bigg\}\mu(1-\mu^2).\end{aligned} \tag{2.58}$$

2.4. Второ приближение вътре в сферата. Функцията $\hat{\psi}_2$ удовлетворява уравнението

$$\frac{\partial}{\partial\tau}\left(\frac{\partial^2\hat{\psi}_2}{\partial\zeta^2}\right)-\frac{1}{2}\frac{\partial^4\hat{\psi}_2}{\partial\zeta^2}=2m_0^2\mu(1-\mu^2)[2ie^{-(1+i)\zeta}e^{2i\tau}+e^{-(1+i)\zeta}-2\zeta ie^{-(1+i)\zeta}$$
$$+e^{-2\zeta}+2ie^{-(1+i)\zeta}-e^{-(1+i)\zeta}-2\zeta ie^{-(1+i)\zeta}e^{2i\tau}-ie^{-2(1+i)\zeta}e^{2i\tau}-e^{-2(1+i)\zeta}e^{2i\tau}].$$

Полагаме

$$\hat{\psi}_2=\frac{1}{2}[\hat{\xi}_{20}(\zeta)+e^{2i\tau}(\hat{\xi}_{22}(\zeta)].$$

Тогава за $\hat{\xi}_{20}$ и $\hat{\xi}_{22}$ получаваме уравненията

$$\hat{\xi}_{20}^{IV}=4m_0^2[-2\zeta ie^{-(1+i)\zeta}+e^{-2\zeta}+(2i-1)e^{-(1+i)\zeta}], \tag{2.59}$$

$$4i\hat{\xi}_{22}^{II}-\hat{\xi}_{22}^{IV}=-4m_0^2[2\zeta ie^{-(1+i)\zeta}+(1+i)e^{-2(1+i)\zeta}-(2i+1)e^{-(1+i)\zeta}]. \tag{2.60}$$

Общото решение на (2.59) има вида

$$\hat{\xi}_{20}=b_1+b_2\zeta+b_3\zeta^2+b_4\zeta^3+(5+2i)m_0^2e^{-(1+i)\zeta}+2im_0^2\zeta e^{-(1+i)\zeta}$$
$$+\frac{m_0}{4}e^{-2\zeta},$$

където b_1, b_2, b_3 и b_4 са константи.
Общото решение на (2.60) се написва така:

$$\hat{\xi}_{22}=a_1+a_2e^{\sqrt{2}(1+i)\zeta}+a_3e^{-\sqrt{2}(1+i)\zeta}+a_4\zeta-(2i+1)m_0^2e^{-(1+i)\zeta}$$
$$+2m_0^2i\zeta e^{-(1+i)\zeta}-\frac{(1+i)}{8}m_0^2e^{-2(1+i)\zeta},$$

където a_1, a_2, a_3 и a_4 са константи.

Въвеждаме два нови параметъра на пропускливост на сферата $B_1=m_1$ и $A_1=m_2$.

Функцията $\hat{\Psi}_2$ удовлетворява уравнението

$$\frac{\partial}{\partial\tau}(D^2\hat{\Psi}_2)=\frac{1}{r^2}\left[\frac{\partial(\hat{\Psi}_1,D^2\hat{\Psi}_1)}{\partial(r,\mu)}+2D^2\hat{\Psi}_1.L\hat{\Psi}_1\right].$$

Тъй като $D^2\hat{\Psi}_1=0$, то

$$\frac{\partial}{\partial\tau}(D^2\hat{\Psi}_1)=0.$$

Решението на това уравнение търсим, както при намирането на второто приближение вън от сферата, във вида

$$\hat{\Psi}_2=\hat{F}(r,\mu)+\hat{\Phi}(\tau)\hat{G}(r,\mu),$$

където
$$\hat{\Phi}(\tau)=\frac{m_0}{\mathrm{Re}_s^{1/2}}\left[\cos\left(\tau-\frac{\pi}{4}\right)+\sqrt{2}\cos\tau\right].$$

Използувайки граничните условия на сферата, условията за срастване на решението в граничния слой вътре в сферата и потенциалното течение извън около центъра на сферата, намираме

$$\hat{G}(r,\mu)=r^2(1-\mu^2)$$

и

$$\hat{F}(r,\mu)=-\frac{7}{4}m_0^2r^3(r^2-1)\mu(1-\mu^2).$$

Следователно

$$\hat{\Psi}_2=-\frac{7}{4}m_0^2r^3(r^2-1)\mu(1-\mu^2)+\frac{m_0}{\mathrm{Re}_s^{1/2}}r^2(1-\mu^2)\left[\cos\left(\tau-\frac{\pi}{4}\right)+\sqrt{2}\cos\tau\right] \tag{2.61}$$

и

$$\hat{\psi}_2=\frac{\mu(1-\mu^2)}{2}\Big\{m_1+\frac{63(3-2m_0-m_0^2)}{16}+\frac{7m_0^2}{2}\zeta+(5+2i)m_0e^{-(1+i)\zeta}$$

$$+2m_0^2i\zeta e^{-(1+i)\zeta}+\frac{m_0^2}{4}e^{-2\zeta}+\Big[m_2+\frac{(3-m_0)^2}{16\sqrt{2}}\Big(\frac{8(1-\sqrt{2})im_0}{3-m_0} \tag{2.62}$$

$$-9(1+i)-\frac{9\sqrt{2}}{2}(1+i)\Big)-\frac{m_0^2}{4\sqrt{2}}(9+13i)+\frac{17i+9}{8}m_0^2$$

$$+\frac{m_0^2}{4\sqrt{2}}(9+13i)e^{-\sqrt{2}(1+i)\zeta}-(2i+1)m_0^2e^{-(1+i)\zeta}+2im_0^2\zeta e^{-(1+i)\zeta}$$

$$-\frac{(1+i)}{8}m_0^2e^{-2(1+i)\zeta}\Big]e^{2i\tau}\Big\}.$$

3. ОПРЕДЕЛЯНЕ НА ГРАНИЦИТЕ НА ИЗМЕНЕНИЕ ЗА ПАРАМЕТЪРА НА ПОРЬОЗНОСТ

Границите на изменение за параметъра на порьозност дават кога е възможно физически преминаването на флуид през сферата. Едната граница получаваме, когато скоростите на флуида върху сферата са нули, а другата — когато наляганията вътре и вън от сферата се изравняват. Следователно $u_1|_{r=1+0}=\hat{u}_1|_{r=1-0}$ ни дава едното ограничение за m_0, а именно $m_0=0$. За да намерим другата граница на интервала, в който може да се мени m_0, изчисляваме наляганията в първо приближение вън и вътре в сферата. Обезразмерявайки налягането посредством полагането $p'=p\rho U_\infty^2\mathrm{Re}^{-1}$, от уравнението на Навие—Стокс получаваме

$$(3.1)\quad \frac{\mathrm{Re}_s}{r^2\sin\theta}\cdot\frac{\partial^2\Psi}{\partial\tau\,\partial\theta}+\varepsilon\,\mathrm{Re}_s\left[\frac{1}{r^4\sin^2\theta}\cdot\frac{\partial^2\Psi}{\partial\theta\partial r}\cdot\frac{\partial\Psi}{\partial\theta}-\frac{2}{r^5\sin^2\theta}\left(\frac{\partial\Psi}{\partial\theta}\right)^2\right.$$

$$\left.+\frac{\cos\theta}{r^4\sin^3\theta}\cdot\frac{\partial\Psi}{\partial r}\frac{\partial\Psi}{\partial\theta}-\frac{1}{\varphi^4\sin^2\theta}\frac{\partial^2\Psi}{\partial\theta}\frac{\partial\Psi}{\partial r}-\frac{1}{r^3\sin^2\theta}\left(\frac{\partial\Psi}{\partial r}\right)^2\right]$$

$$=-\mathrm{Re}_s\frac{\partial p}{\partial r}+\frac{\varepsilon^2}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(D^2\Psi),$$

$$(3.2)\quad \frac{\mathrm{Re}_s}{\sin\theta}\frac{\partial^2\Psi}{\partial\tau\,\partial\theta}-\varepsilon\,\mathrm{Re}_s\left[\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2\Psi}{\partial r\partial\theta}\frac{\partial\Psi}{\partial\tau}-\frac{\cos\theta}{r^2\sin^3\theta}\left(\frac{\partial\Psi}{\partial r}\right)^2\right.$$

$$\left.-\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial\Psi}{\partial\theta}\frac{\partial^2\Psi}{\partial r^2}\right]=\mathrm{Re}_s\frac{\partial p}{\partial r}+\frac{\varepsilon^2}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial r}(D^2\Psi).$$

Чрез смяна на променливите вътре в сферата $\zeta=(1-r)\frac{\mathrm{Re}_s^{1/2}}{\varepsilon\sqrt{2}}$, $\hat{\psi}=\frac{\mathrm{Re}_s^{1/2}}{\varepsilon\sqrt{2}}\hat{\Psi}$ и вън от сферата $\eta=(r-1)\frac{\mathrm{Re}_s^{1/2}}{\varepsilon\sqrt{2}}\psi=\frac{\mathrm{Re}_s^{1/2}}{\varepsilon\sqrt{2}}\Psi$, получаваме следните две системи уравнения:

а) вътре в сферата

$$(3.3)\quad \frac{\mathrm{Re}_s}{\sin\theta}\frac{\partial^2\hat{\psi}}{\partial\tau\partial\theta}-\varepsilon\,\mathrm{Re}_s\left\{\frac{1}{\sin^2\theta}\cdot\frac{\partial^2\hat{\psi}}{\partial\theta\partial\zeta}\cdot\frac{\partial\hat{\psi}}{\partial\theta}+\frac{2\sqrt{2}\,\varepsilon}{\mathrm{Re}_s^{1/2}}\left(\frac{\partial\hat{\psi}}{\partial\theta}\right)^2+\frac{\cos\theta}{\sin^3\theta}\frac{\partial\hat{\psi}}{\partial\zeta}\frac{\partial\hat{\psi}}{\partial\theta}\right.$$

$$\left.-\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial^2\hat{\psi}}{\partial\theta^2}\frac{\partial\hat{\psi}}{\partial\zeta}+\frac{\mathrm{Re}_s^{1/2}}{\sin^2\theta\,.\,\varepsilon\sqrt{2}}\left(\frac{\partial\hat{\psi}}{\partial\zeta}\right)^2\right\}=\frac{\mathrm{Re}_s^2}{2\varepsilon^2}\frac{\partial p}{\partial\zeta}+\frac{\mathrm{Re}_s}{2\sin\theta}\frac{\partial(D^2\hat{\psi})}{\partial\theta},$$

$$(3.4)\quad \frac{\mathrm{Re}_s}{\sin\theta}\frac{\partial^2\hat{\psi}}{\partial\tau\partial\zeta}+\varepsilon\,\mathrm{Re}_s\left\{\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2\hat{\psi}}{\partial\theta\partial\zeta}\frac{\partial\hat{\psi}}{\partial\zeta}-\frac{\cos\theta}{\sin^3\theta}\left(\frac{\partial\hat{\psi}}{\partial\zeta}\right)^2\right.$$

$$\left.-\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial\hat{\psi}}{\partial\theta}\frac{\partial^2\psi}{\partial\zeta^2}\right\}=-\mathrm{Re}_s\frac{\partial p}{\partial\theta}+\frac{\mathrm{Re}_s}{2\sin\theta}\frac{\partial(D^2\hat{\psi})}{\partial y};$$

б) вън от сферата

$$(3.5)\quad \frac{\mathrm{Re}_s}{\sin\theta}\frac{\partial^2\psi}{\partial\tau\partial\theta}+\varepsilon\,\mathrm{Re}_s\left\{\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2\psi}{\partial\theta\partial\eta}\frac{\partial\psi}{\partial\theta}-\frac{2\sqrt{2}\,\varepsilon}{\mathrm{Re}_s^{1/2}\sin^2\theta}\left(\frac{\partial\psi}{\partial\theta}\right)^2\right.$$

$$\left.+\frac{\cos\theta}{\sin^3\theta}\frac{\partial\psi}{\partial\eta}\frac{\partial\psi}{\partial\theta}-\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial^2\psi}{\partial\theta^2}\frac{\partial\psi}{\partial\eta}-\frac{\mathrm{Re}_s^{1/2}}{\varepsilon\sqrt{2}\sin^2\theta}\left(\frac{\partial\psi}{\partial\eta}\right)^2\right\}$$

$$=-\frac{\mathrm{Re}_s^2}{2\varepsilon^2}\frac{\partial p}{\partial\eta}+\frac{\mathrm{Re}_s}{2}\frac{\partial(D^2\psi)}{\partial\theta},$$

$$(3.6)\quad \frac{\mathrm{Re}_s}{\sin\theta}\cdot\frac{\partial^2\psi}{\partial\tau\partial\eta}-\varepsilon\,\mathrm{Re}_s\left\{\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2\psi}{\partial\eta\partial\theta}\frac{\partial\psi}{\partial\eta}-\frac{\cos\theta}{\sin^3\theta}\left(\frac{\partial\psi}{\partial\eta}\right)^2\right.$$

$$-\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial\psi}{\partial\theta}\frac{\partial^2\psi}{\partial\eta^2}\Big\}=\mathrm{Re}_s\frac{\partial p}{\partial\theta}+\frac{\mathrm{Re}_s}{2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\eta}(D^2\psi).$$

Използувайки разложенията (2.3) и (2.17), в първо приближение получаваме:

а) вътре в сферата

$$\frac{\partial p}{\partial\zeta}=0, \tag{3.7}$$

$$\frac{\partial p}{\partial\theta}=-\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial^2\hat{\psi}_1}{\partial\tau\partial\zeta}+\frac{1}{2\sin\theta}\frac{\partial^3\hat{\psi}_1}{\partial\zeta^3}; \tag{3.8}$$

б) вън от сферата

$$\frac{\partial p}{\partial\eta}=0, \tag{3.9}$$

$$\frac{\partial p}{\partial\theta}=\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial^2\psi_1}{\partial\tau\partial\eta}-\frac{1}{2\sin\theta}\frac{\partial^3\psi_1}{\partial\eta^3}. \tag{3.10}$$

По такъв начин за разликата $\Delta p=p|_{r=1+0}-p|_{r=1-0}$ в първо приближение получаваме

$$\Delta p=-\frac{1}{2}(m_0+3)\,i\,e^{i\tau}\cos\theta, \tag{3.11}$$

откъдето се вижда, че втората граница е $m_0=-3$. Следователно за величината m_0 може да бъде зададена стойност, удовлетворяваща неравенствата $-3\leqq m_0\leqq 0$. Границите на изменение на параметрите на порьозност от втори ред m_1 и m_2 се определят по аналогичен начин.

Ще отбележим, че участието на константите m_0, m_1 и m_2 във формулите (2.58) и (2.62) дава ефекта на порьозност на сферата при осцилационното ѝ движение върху разпределението на функцията на тока, а оттам и върху разпределението на другите хидродинамични величини. От тези формули се вижда ясно също, че порьозността влияе по напълно определен начин и върху стационарната част на флуидното течение. При конкретно зададени стойности $m_0=0$, $m_1=-189/16$ и $m_2=81(2-\sqrt{2})/32\sqrt{2}$ получаваме резултатите на Райли [11] като частен случай при твърда непориста сфера.

ЛИТЕРАТУРА

1. Faraday, M.: On a peculiar class of acoustical figures and on certain forms assumed by groups of particles upon vibrating elastic surfaces. Trans. Roy. Soc. (London), 121 (1831), p. 229.
2. Dvorak, V.: Ann. Phys., Lpz., 1874, p. 151.
3. Rayleigh, L.: On the circulations of air observed in Kundt's tubes and on some allied acoustical problems. Phil. Trans. A, **175** (1883), 1—71.

4. Carrière, Z.: J. Phys. Radium, 1929, 10.
5. Andrade, E. N.: On the circulations caused by vibrations of air in a tube. Proc. Roy. Soc. A, **134** (1931), 445-470.
6. Schlichting, H.: Berechnung ebener periodischer Grenzschichtströmmungen. Phys. Z., **33** (1932), 327 — 335.
7. Roy, D.: Non-Steady Periodic Boundary Layer. ZAMP, **12** (1961), 4, 363 — 366.
8. Stuart, J.: Laminar boundary layers. Chapter 7, Oxford, 1963.
9. Stuart, J.: Double boundary layers in oscillatory viscous flow. J. Fluid Mech., **24** (1966), 4, 673 — 687.
10. Riley, N.: Oscillating viscous flows, Mathematika, **12** (1965), 2, 161 — 176.
11. Riley, N.: On a sphere oscillating in a viscous fluid. Quart. J. Mech. Appl. Math., **19** (1966), 4, 461 — 472.
12. Riley, N.: Oscillatory viscous flows. Review and extension. J. Inst. Maths. Appl., **3** (1967), 419—434.
13. Леонов, А. И.: Медленное стационарное обтекание пористой сферы вязкой жидкостью. Прикл. мат. и мех., **26** (1962), 3, 564 — 566.

Постъпила на 24. XII. 1976 г.

HIGH FREQUENCY FLOW INDUCED BY AN OSCILLATING POROUS SPHERE

Z. Zapryanov, S. Stoyanova

(SUMMARY)

The flow field induced by a porous sphere performing translational periodic oscillations in a fluid which is otherwise at rest is investigated. The purpose of this paper is to examine the effect of the permeability of the sphere on the acoustic streaming. The method of inner and outer expansions is applied to the case of $M \gg 1$. The entire velocity field is determined to the second order.