НОВОЕ ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ОДНОЙ ТЕОРЕМЫ О МАКСИМУМЕ ЧИСЛА p-КЛИК ГРАФОВ

Недялко Ненов, Николай Хаджииванов

1. **Введение.** В этой работе под графом всюду будем подразумевать неориентированный граф, без петель и кратных ребер. Через $V(G)$ и $E(G)$ будем обозначать соответственно множество вершин и множество ребер графа G.

Определение 1. Совокупность вершин $v_1, v_2, \cdots, v_p$ графа G будем называть p-кликой, если любые две из них смежны.

Ясно, что 1-клика — это вершина графа G, а 2-клика — ребро графа G. Число всех p-клик графа G, содержащих данную вершину v, будем называть p-степенью вершины v и обозначать через $d(v, G; p)$. Число всех p-клик графа G будем обозначать через $t(G; p)$.

Определение 2. Будем говорить, что вершины v_1 и v_2 графа G p-смежны, если существует p-клика графа G, содержащая эти вершины.

Определение 3. Кликовое число $k(G)$ графа G — это такое натуральное число s, для которого $t(G; s) > 0$ и $t(G; s+1) = 0$.

Очевидно, кликовое число графа равно максимальному числу его вершин, образующих клику.

Определение 4. Если графы G_1 и G_2 имеют непересекающиеся множества вершин, то соединением $G_1 + G_2$ называется граф G, для которого $V(G) = V(G_1) \cup V(G_2)$ и $E(G) = E(G_1) \cup E(G_2) \cup E_{1,2}$, где $E_{1,2}$ состоит из всех неупорядоченных пар (v_1, v_2), $v_1 \in V(G_1)$ и $v_2 \in V(G_2)$.

Эта операция введена Зыковым в работе [9]. Очевидно эта операция коммутативна и ассоциативна. Ввиду этого, если имеется множество графов $G_1, \cdots, G_k$, неимеющих общих вершин, то соединение $G = G_1 + \cdots + G_k$, $k > 2$, определяется индуктивно

$$G = (G_1 + \cdots + G_{k-1}) + G_k.$$

Введем еще следующие обозначения: $0 . G = \varnothing$, $mG = (m-1)G + G$, где m — натуральное число.

Определение 5. Граф G называется s-хроматическим, если множество его вершин можно разбить на s дизъюнктных подмножеств так, что в любом из этих множеств нет смежных вершин. Любое из этих s подмножеств называется хроматическим классом. Если любые две вершины, принадлежащие разным хроматическим классам в G, смежны, будем говорить, что G является полным s-хроматическим графом.

Обозначим через K_p граф, имеющий p вершин, образующих p-клику-

Граф K_p принято еще называть полным графом с p вершинами. Через $\bar{K}_p$ обозначим граф с p вершинами, который не имеет ребер. $\bar{K}_p$ будем еще называть дискретным графом с p вершинами.

Пусть $p_1, p_2, \cdots, p_s$ — натуральные числа. Тогда очевидно

$$G=\bar{K}_{p_1}+\bar{K}_{p_2}+\cdots+\bar{K}_{p_s}$$

является полным s-хроматическим графом, имеющий p_i вершин i-ого хроматического класса.

Определение 6. Пусть n, s, k и ν — целые неотрицательные числа, для которых

$$n=sk+\nu,\ 0\leq\nu<s. \tag{1}$$

Полный s-хроматический граф с n вершинами, который имеет ν хроматических классов с $k+1$ вершинами в каждом и $s-\nu$ хроматических классов с k вершинами в каждом, назовем графом Турана и обозначим через $T(n, s)$. Ясно, что

$$T(n, s)=\nu\bar{K}_{k+1}+(s-\nu)\bar{K}_k.$$

Положим $t(n, s; p)=t(T(n, s); p)$.

П. Тураном было доказана в [1]

Теорема 1. Если $k(G)\leq s$ и $s\geq 2$, то

$$t(G;2)\leq t(n, s; 2), \tag{2}$$

$$t(G;2)=t(n, s;2)\Rightarrow G=T(n, s),\ \text{где}\ n=|V(G)|. \tag{3}$$

В этой теореме предполагается, что $s\geq 2$, поскольку при $s=1$ неравенство (2) тривиально переходит в равенство, а импликация (3) в этом случае неверна. Другие доказательства и обобщения теоремы Турана содержатся в работах [4], [5], [6], [7].

В [9, 2, 3] доказана следующая

Теорема 2. Если $k(G)\leq s$ и $2\leq p\leq s$, то

$$t(G;p)\leq t(n, s; p), \tag{4}$$

$$t(G;p)=t(n, s;p)\Rightarrow G=T(n, s),\ \text{где}\ n=|V(G)|. \tag{5}$$

В [8] содержится обобщение этой теоремы.

Обозначим класс всех графов G, для которых $|V(G)|=n$ и $k(G)\leq s$ через $H(n, s)$.

Определение 7. Будем говорить, что граф G_0 является p-экстремальным графом класса $H(n, s)$, $2\leq p\leq s$, если $G_0\in H(n, s)$ и $t(G;p)\leq t(G_0;p)$ для любого графа $G\in H(n, s)$.

Цель настоящей статьи дать новое доказательство теоремы 2. Мы будем доказывать эту теорему в следующей эквивалентной формулировке:

Теорема. Граф G_0 является p-экстремальным графом класса $H(n, s)$, $2\leq p\leq s$, тогда и только тогда, когда $G_0=T(n, s)$.

Пусть $A\subset V(G)$.

Определение 8. Подграф графа G, порожденный множеством его

вершин A — это граф $\langle A\rangle$, для которого $V(\langle A\rangle)=A$ и $E(\langle A\rangle)$ состоит из всех ребер графа G, оба конца которых принадлежат множеству A.

2. Сводка обозначений.

$V(G)$ — множество вершин графа G.

$E(G)$ — множество ребер графа G.

$t(G;p)$ — число p-клик граф G.

$k(G)$ — кликовое число графа G.

G_1+G_2 — соединение графов G_1 и G_2.

K_p — полный граф с p вершинами.

$\bar{K}_p$ — дискретный граф с p вершинами.

$T(n,s)$ — граф Турана.

$t(n,s;p)$ — число p-клик графа Турана.

$|A|$ — число элементов множества A.

$\langle A\rangle$ — подграф графа G, порожденный множеством вершин A.

$d(v,G;p)$ — число p-клик графа G, содержащих вершину v.

$H(n,s)$ — множество всех графов G, для которых $|V(G)|=n$ и $k(G)\leqq s$.

3. Доказательство теоремы.

Доказательство проведем индукцией по s. Если $s=2$, поскольку $2\leqq p\leqq s$, получаем $p=2$. В этом случае утверждение теоремы является частным случаем теоремы 1. Предположим, что $s>2$. Рассмотрим все подмножества A множества $V(G_0)$, для которых $k(\langle A\rangle)\leqq s-1$. Из всех таких подмножеств выбираем множество A_0, для которого $\langle A_0\rangle$ имеет максимальное число $(p-1)$-клик. Пусть $|A_0|=m$. Очевидно

$$t(G_0;p)=t(\langle A_0\rangle;p)+L, \tag{6}$$

где L обозначает число p-клик графа G_0, которые имеют хотя бы одну вершину в $V(G)\setminus A_0$. Пусть $|V(G)\setminus A_0|=l$. Покажем, что

$$L\leqq t(\langle A_0\rangle;p-1)\,l. \tag{7}$$

Это неравенство является очевидным следствием следующих двух неравенств:

$$L\leqq\sum\{d(v,G_0;p)\mid v\in V(G)\setminus A_0\}, \tag{8}$$

$$d(v,G_0;p)\leqq t(\langle A_0\rangle;p-1). \tag{9}$$

Неравенство (8) очевидно. Докажем теперь неравенство (9). Пусть v — вершина графа G_0. Рассмотрим множество B всех p-смежных вершин вершины v (v к этому множеству не относится). Ясно, что

$$d(G_0,v;p)=t(\langle B\rangle;p-1). \tag{10}$$

Из того, что $k(G)\leqq s$, следует $k(\langle B\rangle)\leqq s-1$. Согласно выбора A_0 имеем

$$t(\langle B\rangle;p-1)\leqq t(\langle A_0\rangle;p-1). \tag{11}$$

Неравенство (9) следует из (10) и (11). Таким образом неравенство (7) доказано. Из (6) и (7) получаем

$$t(G_0;p)\leqq t(\langle A_0\rangle;p)+t(\langle A_0\rangle;p-1)\,l. \tag{12}$$

Докажем, что

$$(13)\qquad \begin{aligned} &\text{I) } \langle A_0\rangle = T(m,\ s-1),\\ &\text{II) } G=\langle A_0\rangle + \overline{K}_l. \end{aligned}$$

Рассмотрим граф $T(m, s-1)$. Согласно индукционному предположению $T(m, s-1)$ является $(p-1)$-экстремальным графом класса $H(m, s-1)$, если $p-1\geqq 2$, и p-экстремальным графом, если $p\leqq s-1$. Следовательно

(14а) $t(\langle A_0\rangle; p-1)\leqq t(m,\ s-1; p-1), p\geqq 3,$

(14б) $t(\langle A_0\rangle; p-1)=t(m,\ s-1; p-1) \Rightarrow \langle A_0\rangle = T(m, s-1)$, если $p\geqq 3$,

(14в) $t(\langle A_0\rangle; p-1)=t(m,\ s-1; p-1)=m$, если $p=2$,

(15а) $t(\langle A_0\rangle; p) \leqq t(m,\ s-1; p)$, если $p\leqq s-1$,

(15б) $t(\langle A_0\rangle; p) = t(m,\ s-1; p) \Rightarrow \langle A_0\rangle = T(m, s-1)$, если $p\leqq s-1$,

(15в) $t(\langle A_0\rangle; p) = t(m,\ s-1; p)=0$, если $p=s$.

Рассмотрим теперь граф $\widetilde{G}=T(m, s-1)+\overline{K}_l$. Ясно, что $k(\widetilde{G})\leqq s$, т. е. $\widetilde{G}\in H(n,\ s)$. Очевидно

$$(16)\qquad t(\widetilde{G}; p)=t(m,\ s-1; p)+t(m, s-1; p-1)\,l.$$

Докажем, что

$$(17)\qquad t(G_0; p)\leqq t(\widetilde{G}; p).$$

Если $3\leqq p\leqq s-1$, неравенство (17) следует из (12), (15а), (14а) и (16). Если $p=2$, так как $s\geqq 3$, то $p\leqq s-1$ и (17) следует из (12), (15а), (14в) и (16). Если $p=s$, имея ввиду, что $s\geqq 3$, получаем $p-1\geqq 2$. В этом случае (17) следует из (12), (15в), (14а) и (16). Неравенство (17) доказано. Из (17) и p-экстремальности графа G_0 в $H(n,\ s)$ получаем

$$(18)\qquad t(\widetilde{G}; p)=t(G_0; p).$$

Из (18), (12) и (16) следует равенство в (14а). Если $p-1\geqq 2$, согласно (14б) имеем $\langle A_0\rangle = T(m,\ s-1)$. Опять из (18), (12) и (16) следует равенство в (15а). Если $p\leqq s-1$, согласно (15б) имеем $\langle A_0\rangle = T\ (m, s-1)$. I) доказано, так как всегда выполнено одно из неравенств $p\geqq 3$, $p\leqq s-1$.

Докажем утверждение II). Из (6), (7), (15а), (15в), (14а), (14в), (16) и (18) следует

$$(19)\qquad L=t(\langle A_0\rangle; p-1)\,l.$$

Из (8), (9) и (19) получаем

$$(20)\qquad d(v,\ G:p)=t(\langle A_0\rangle; p-1) \quad \text{для любого } v\in V(G)\setminus A_0.$$

Из (8), (9) и (19) следует равенство в (8) и следовательно граф $\langle V(G)\setminus A_0\rangle$ не содержит ребро p-клики графа G. Так как $\langle A_0\rangle = T(m, s-1)$, любая p-клика графа G имеет не более чем одну вершину в $V(G)\setminus A_0$ и любая вершина графа $\langle A_0\rangle = T(m,\ s-1)$ является вершиной $(p-1)$-клики, то для того, чтобы выполнялось (20), необходимо, чтобы любая вершина из A_0 была смежна любой вершине из $V(G)\setminus A_0$. Покажем, что $\langle V(G)\setminus A_0\rangle = \overline{K}_l$. Действительно, если v_1 и $v_2\in V(G)\setminus A_0$ и смежны, то беря

$(p-2)$-клику $v_3, \cdots, v_p$ из $\langle A_0\rangle$, получим p-клику $v_1, \cdots, v_p$ и $(v_1, v_2) \in \langle V(G)\setminus A_0\rangle$. Это, как уже отметили, невозможно. Предложение II) тоже доказано.

Из предложений (13), I) и II) следует, что G_0 является полным s-хроматическим графом. Для окончательного доказательства теоремы остается доказать следующую лемму:

Лемма. Для любого s-хроматического графа G, если $2 \leq p \leq s$, имеем

$$t(G;p) \leq t(n,s;p), \tag{21}$$

$$t(G;p) = t(n,s;p) \Rightarrow G = T(n,s). \tag{22}$$

Доказательство. Пусть число элементов i-ого хроматического класса графа G равно q_i. Тогда ясно, что

$$t(G;p) \leq \sum \{q_{i_1} \cdots q_{i_p} \mid 1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_p \leq s\} = q_1 q_2 M + q_1 N + q_2 N + P, \tag{23}$$

где выражения M, N и P не содержат q_1 и q_2.

Допустим, что $q_1 - q_2 \geq 2$. Рассмотрим полный s-хроматический граф $\hat{G}$ с $q_1' = q_1 - 1$ элемента 1-ого хроматического класса, $q_2' = q_2 + 1$ элемента 2-ого хроматического класса и q_i элементов i-хроматического класса при $i > 2$. Тогда

$$t(\hat{G};p) = q_1' q_2' M + q_1' N + q_2' N + P = q_1 q_2 M + (q_1 - q_2 - 1) M + q_1 N + q_2 N + P. \tag{24}$$

Из (23) и (24) получаем

$$t(\hat{G};p) - t(G;p) = M(q_1 - q_2 - 1) > 0, \tag{25}$$

т. е.

$$t(G;p) < t(\hat{G};p). \tag{26}$$

Последнее неравенство показывает, что для p-экстремального графа G в $H(n,s)$ необходимо, чтобы $|q_i - q_j| \leq 1$, $1 \leq i \leq s$, $1 \leq j \leq s$. Это однако означает, что $G = T(n,s)$. Лемма доказана полностью, а этим теорема тоже.

ЛИТЕРАТУРА

1. Turán, P.: On the theory of graphs. Colloq. Math., **3** (1954), 19—30.
2. Хаджииванов, Н.: Обобщение теоремы Турана о графах. Докл. БАН, **29** (1976), № 11.
3. Roman, St.: The maximum number of q-cliques in a graph with no p-clique. Discrete Math., **14** (1976), 365—371.
4. Motzkin, T., Strauss, E.: Maxima for graphs and new proof of a theorem of Turan. Canad. J. Math., **17** (1965), 533—540.
5. Andrasfai, B.: Neuer Beweis eines graphentheoretischen Satzes von P. Turán. Matematicai Kutato intezetenek kozlemenyei, **7** (1962), 193—196.

6. Хаджииванов, Н., Ненов, Н.: О максимуме числа ребер графа. Докл. БАН, **29** (1976), 1575 — 1578.
7. Хаджииванов, Н., Ненов, Н.: Экстремальные задачи для s-графов и теорема Турана. Сердика, **3** (1977), 117—125.
8. Хаджииванов, Н., Ненов, Н.: p-последовательности графов и некоторые экстремальные свойства графов Турана. Докл. БАН, **30** (1977), № 4, 475—478.
9. Зыков, А. О некоторых свойствах линейных комплексов. Мат. сборник, **24** (1949), 165—188.

Постъпила на 10. I. 1977 г.

A NEW PROOF OF A THEOREM ABOUT THE MAXIMUM NUMBER OF p-CLIQUES OF GRAPHS

N. Nenov, N. Hadjiivanov

(SUMMARY)

Let $t(G;p)$ denotes the number of p-cliques of a graph G.

In [9, 2, 3] the following theorem is proved:

Theorem 2. Let G be a graph with n-vertices, for which $t(G;s+1)=0$, $s\geqq 2$, and $2\leqq p\leqq s$. Then $t(G;p)\leqq t(T(n,s);p)$; $T(n,s)$ denotes the graph of Turán. Equality is obtained if and only if $G=T(n,s)$.

This paper contains a new proof of the theorem 2.