ВЪРХУ АСИМПТОТИЧНОТО ПОВЕДЕНИЕ НА ФУНКЦИИТЕ НА ЛАГЕР ОТ ВТОРИ РОД

Петър Русев

Функциите на Лагер от втори род $\{M_n^{(\alpha)}(z)\}_{n=0}^{\infty}$ с параметър $\alpha > -1$ се дефинират в областта $\mathbf{C} - [0, +\infty)$ посредством равенствата

$$M_n^{(\alpha)}(z) = -\int_0^{\infty} \frac{t^{\alpha} e^{-t} L_n^{(\alpha)}(t)}{t-z}\, dt, \tag{1}$$

където $\{L_n^{(\alpha)}(z)\}_{n=0}^{\infty}$ са полиномите на Лагер с параметър α. Равенството $(n+\alpha+1)\, M_n^{(\alpha)}(z) = -\{M_n^{(\alpha+1)}(z)\}' - M_n^{(\alpha+1)}(z)$, което е непосредствено следствие от (1), дава възможност да се разпространи определението на функциите на Лагер от втори род за произволни реални стойности на параметъра α, отлични от $-1, -2, \ldots$

Асимптотичното поведение на $M_n^{(\alpha)}(z)$ при $n \to +\infty$ се характеризира с формулата

$$M_n^{(\alpha)}(z) = -\sqrt{\pi} \exp(-z/2)\, (-z)^{\alpha/2-1/4}\, n^{\alpha/2-1/4} \cdot \tag{2}$$
$$\times \exp[-2(-z)^{1/2}\sqrt{n}]\, [1+\mu_n^{(\alpha)}(z)],$$

където $\{\mu_n^{(\alpha)}(z)\}_{n=1}^{\infty}$ са комплексни функции, аналитични в областта $\mathbf{C} - [0, +\infty)$ и $\lim\limits_{n\to\infty} \mu_n^{(\alpha)}(z) = 0$ равномерно върху всяко компактно подмножество на тази област. Директен извод на формулата (2), основаващ се на определението (1) на функциите на Лагер от втори ред, е даден в нашата публикация [1]. Друго доказателство за валидността на тази формула може да бъде получено, като се има пред вид представянето на функцията $M_n^{(\alpha)}(z)$ чрез изродената хипергеометрична функция на Трикоми $\Psi(a, c : z)$ [2, I, стр. 244, (2)], а именно

$$M_n^{(\alpha)}(z) = -\Gamma(n+\alpha+1)\, (-z)^{\alpha} \Psi(n+\alpha+1,\ \alpha+1;\ -z). \tag{3}$$

Нашата цел тук е, като се основаваме на представянето (3), да изследваме асимптотичното поведение на $M_n^{(\alpha)}(z)$ при $n \to +\infty$ и $z \to \infty$ в подходяща област. Главния резултат, който сме получили, ще изкажем под формата на следната

Теорема 1. Нека $0<\mu<+\infty$, $\alpha\neq-1, -2, \cdots$ и $\nu(\alpha)=\max(1, -\alpha/2-3/4, -\alpha-1)$. Тогава съществува константа $A>0$, такава, че

$$|M_n^{(\alpha)}(z)|\leqq A|z|^{\alpha/2-1/4}n^{\alpha/2-1/4}e^{-2\mu\sqrt{n}} \tag{4}$$

за $n>\nu(\alpha)$ и $z\in\overline{\Delta^*(\mu)}=\{z\in\mathbf{C}:\mathrm{Re}(-z/^{1/2}\geqq\mu\}$.

Доказателство. Като използуваме интегралното представяне [2, I, стр. 260, (10)] на функцията на Трикоми чрез модифицираната функция на Бесел от трети род, от (3) получаваме, че за $z\in\mathbf{C}-[0, +\infty)$ и $n>\nu(\alpha)$

$$M_n^{(\alpha)}(z)=-\frac{2(-z)^{\alpha/2}}{\Gamma(n+1)}\int_0^\infty e^{-t}t^{n+\alpha/2}K_\alpha(2\sqrt{-zt})\,dt. \tag{5}$$

Нека $R_0>\max(1, \mu^2)$ и $\overline{\Delta^*(\mu, R_0)}=\overline{\Delta^*(\mu)}-K(0; R_0)$, където $K(0; R_0)=\{z\in\mathbf{C}:|z|<R_0\}$. Да допуснем, че точката $z\in\overline{\Delta^*(\mu, R_0)}$ и да положим тогава за $n>\nu(\alpha)$

$$M_{n,1}^{(\alpha)}(z)=-\frac{2(-z)^{\alpha/2}}{\Gamma(n+1)}\int_0^{1/|z|} e^{-t}t^{n+\alpha/2}K_\alpha(2\sqrt{-zt})dt, \tag{6}$$

$$M_{n,2}^{(\nu)}(z)=-\frac{2(-z)^{\alpha/2}}{\Gamma(n+1)}\int_{1/|z|}^\infty e^{-t}t^{n+\alpha/2}K_\alpha(2\sqrt{-zt})\,dt. \tag{7}$$

От асимптотичната формула за функцията $K_\alpha(z)$ при $z\to\infty$ [2, II, стр. 33, (4)] следва, че в областта $\mathbf{C}-(-\infty, 0]$ за тази функция ще имаме следното представяне:

$$K_\alpha(z)=\sqrt{\frac{\pi}{2z}}\,e^{-z}\{1+k_\alpha(z)\}, \tag{8}$$

където $k_\alpha(z)$ е комплексна функция, аналитична в областта $\mathbf{C}-(-\infty, 0]$ и $k_\alpha(z)=O(|z|^{-1})$ при $z\to\infty$ в тази област. В частност $k_\alpha(z)$ е ограничена върху множеството $\{\mathbf{C}-(-\infty, 0]\}\cap\{z\in\mathbf{C}:|z|\geqq1\}$. Като имаме пред вид това, от (8) и (7) получаваме

$$M_{n,2}^{(\alpha)}(z)=O\left(\frac{|z|^{\alpha/2-1/4}}{\Gamma(n+1)}\int_0^\infty e^{-t-2\mu\sqrt{t}}t^{n+\alpha/2-1/4}\,dt\right) \tag{9}$$

$$=O\left(\frac{|z|^{\alpha/2-1/4}}{2^n\Gamma(n+1)}\int_0^\infty e^{-t^2/2-\eta\sqrt{2t}}t^{2n+\alpha+1/2}\,dt\right)$$

$$=O\left(\frac{\Gamma(2n+\alpha+3/2)\,|z|^{\alpha/2-1/4}}{2^n\Gamma(n+1)}D_{-(2n+\alpha+3/2)}(\mu\sqrt{2})\right),$$

където $D_\nu(z)$ означава функцията на параболичния цилиндър (с параметър ν [2, II, стр. 125, (3)]. Като използуваме асимптотичната формула [2, II, стр. 129, (5)] при $|\nu|\to\infty$, намираме, че

$$D_{-(2n+\alpha+3/2)}(\mu\sqrt{2})=O\left(\frac{e^{n-2\mu\sqrt{n}}}{2^n n^{n+\alpha/2+3/4}}\right). \tag{10}$$

Тогава от (9) и (10) и формулата на Стирлинг следва, че

$$M_{n,2}^{(\alpha)}(z)=O(|z|^{\alpha/2-1/4}n^{\alpha/2-1/4}e^{-2\mu\sqrt{n}}) \tag{11}$$

за $n>\nu(\alpha)$ и $z\in\overline{\Delta^*(\mu, R_0)}$.

За да получим аналогична оценка за $M_{n,1}^{(\alpha)}(z)$ при $n>\nu(\alpha)$ и $z\in\overline{\Delta^*(\mu, R_0)}$, ще използуваме асимптотичните формули за $K_\alpha(z)$ при $z\to 0$. Известно е, че ако $\alpha\neq 0$, $K_\alpha(z)=O\{\exp(-\alpha\ln|z|)\}$ при $z\to 0$ и $z\in\mathbf{C}-(-\infty, 0]$. Ако α не е цяло число, това следва от определението [2, II, стр. 13, (13)] на функцията $K_\alpha(z)$ чрез модифицираната функция на Бесел от първи род. Ако α е цяло положително число, това следва от (2, II, стр. 17, (37)]. Ако $\alpha=0$, от [2, II, стр. 17, (38)] следва, че $K_0(z)=O(\ln|z|)$ при $z\to 0$. Като имаме пред вид казаното дотук, а също така и условието на теоремата, можем да заключим, че ако $\alpha\neq 0$ и $n>\nu(\alpha)$,

$$M_{n,1}^{(\alpha)}(z)=O\left(\frac{|z|^{\alpha/2-|\alpha|/2}}{\Gamma(n+1)}\int_0^{1/|z|}e^{-t}t^{n+\alpha/2-|\alpha|/2}dt\right)$$

$$=O\left(\frac{1}{\Gamma(n+1)|z|^{n+1}}\right)=O\left(\frac{|z|^{\alpha/2-1/4}}{\Gamma(n+1)|z|^{n+\alpha/2+3/4}}\right)=O\left(\frac{|z|^{\alpha/2-1/4}}{\Gamma(n+1)}\right).$$

Понеже, както не е трудно да се убедим,

$$\lim_{n\to+\infty}\{\Gamma(n+1)\}^{-1}n^{-\alpha/2+1/4}e^{2\mu\sqrt{n}}=0,$$

каквито и да са α и μ, получаваме

$$M_{n,1}^{(\alpha)}(z)=O(|z|^{\alpha/2-1/4}n^{\alpha/2-1/4}e^{-2\mu\sqrt{n}}). \tag{12}$$

Също така, ако $\alpha=0$ и $n>\nu(0)=1$,

$$M_{n,1}^{(0)}(z)=O\left(\frac{1}{\Gamma(n+1)}\int_0^{1/|z|}e^{-t}t^n\ln\frac{1}{t}dt\right) \tag{13}$$

$$=O\left(\frac{1}{\Gamma(n+1)}\int_0^{1/|z|}e^{-t}t^{n-1}dt\right)=O\left(\frac{1}{\Gamma(n+1)|z|^n}\right)$$

$$=O\left(\frac{|z|^{-1/4}}{\Gamma(n+1)|z|^{n-1/4}}\right)=O(|z|^{-1/4}n^{-1/4}e^{-2\mu\sqrt{n}}).$$

От (11), (12) и (13) следва, че

$$M_n^{(\alpha)}(z)=O(|z|^{\alpha/2-1/4}\, n^{\alpha/2-1/4}\, e^{-2\mu\sqrt{n}}) \tag{14}$$

за $n>\nu(\alpha)$ и $z\in\overline{\Delta^*(\mu, R_0)}$. От асимптотичната формула (2) следва обаче, че оценка от вида (14) е валидна и върху компактното множество $\overline{\Delta^*(\mu)}\cap\overline{K(0;R_0)}$ за всички стойности на $n=1, 2, 3, \cdots$ и с това теорема 1 е установена.

По-нататък ще направим някои приложения на тази теорема. Преди всичко, като се основаваме на асимптотичната формула (2), не е трудно да определим както областта, така и характера на сходимост на ред от вида

$$\sum_{n=0}^{\infty} b_n M_n^{(\alpha)}(z).$$

Оказва се, че за такива редове има аналози на лемата на Абел и на формулата на Коши — Адамар. Формулировките на съответните твърдения са дадени примерно в нашата публикация [1]. По-конкретно за редове от вида (15) лемата на Абел гласи: Ако редът (15) е сходящ в някоя точка $z_0\in\mathbf{C}-[0, +\infty)$, той е абсолютно равномерно сходящ върху всяко компактно подмножество на областта $\Delta^*(\mu_0)=\{z\in\mathbf{C}:\mathrm{Re}\,(-z)^{1/2}>\mu_0\}$, където $\mu_0=\mathrm{Re}\,(-z_0)^{1/2}$. Неравенството (4) дава възможност значително да прецизираме това твърдение, ако направим подходящо ограничение за параметъра α. В сила е именно следната

Теорема 2. Нека $\alpha\leqq 1/2$ и редът (15) е сходящ в точката $z_0\in\mathbf{C}-[0, +\infty)$. Тогава този ред е абсолютно равномерно сходящ върху всяка затворена област $\overline{\Delta^*(\mu)}$, за която $\mu>\mu_0=\mathrm{Re}\,(-z_0)^{1/2}$.

Доказателство. От асимптотичната формула (2) и неравенството (4) следва, че в затворената област $\overline{\Delta^*(\mu, 1)}$ за всички достатъчно големи n ще бъде изпълнено неравенството

$$|b_n M_n^{(\alpha)}(z)|=|b_n M_n^{(\alpha)}(z_0)|\frac{|M_n^{(\alpha)}(z)|}{|M_n^{(\alpha)}(z_0)|}\leqq Me^{-2(\mu-\mu_0)\sqrt{n}},$$

където M е константа $(M=A|\exp(z_0/2)|\sup_n|b_n M_n^{(\alpha)}(z_0)|)$. От горното неравенство следва, че редът (15) е абсолютно равномерно сходящ върху $\overline{\Delta^*(\mu, 1)}$. Съгласно споменатата лема на Абел от [1] този ред е абсолютно равномерно сходящ и върху $\overline{\Delta^*(\mu)}\cap\overline{K(0, 1)}$, с което теорема 2 е установена.

В нашата публикация [3] е дадено едно необходимо условие комплексна функция $f(z)$, аналитична в областта $\Delta^*(\mu_0)$ $(0\leqq\mu_0<\infty)$, да се представя в тази област чрез ред от вида (15). Съответният резултат гласи, че във всяка полуравнина $\mathrm{Re}\,z<-(\mu_0+\tau)^2$ $(\tau>0)$ функцията $f(z)$ трябва да бъде ограничена. Неравенството (4) дава възможност към това твърдение да се добави още следната

Теорема 3. Ако комплексната функция $f(z)$, дефинирана в областта $\Delta^*(\mu_0)$ $(0\leq\mu_0<+\infty)$, се представя в тази област чрез ред от вида (15), то каквото и да е $\mu>\mu_0$, $f(z)=O(|z|^{\lambda(\alpha)})$ в $\overline{\Delta^*(\mu)}$, където $\lambda(\alpha)=\max(-1, \alpha/2-1/4)$.

Доказателство. По предположение $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} b_n M_n^{(\alpha)}(z)$ в $\Delta^*(\mu_0)$. Съгласно формулата на Коши — Адамар от цитираната по-горе работа [1], ако $0<\varepsilon<\mu-\mu_0$, съществува $B=B(\varepsilon)$, такова, че $|b_n|\leq B\exp[2(\mu_0+\varepsilon)\sqrt{n}]$ за $n=1, 2, 3, \cdots$ От асимптотичната формула за $\Psi(a, c; z)$ при $z\to\infty$ [2, I, стр. 226, (1)] и от представянето (3) намираме, че $M_n^{(\alpha)}(z)=O(|z|^{-n-1})$ при $z\to\infty$ в областта $C=[0, +\infty)$. Най-сетне неравенството (4) е удовлетворено при $z\in\overline{\Delta^*(\mu)}$ и $n>\nu(\alpha)$. Следователно, ако $k\geq\nu(\alpha)$ е цяло, ще получим, че за $z\in\overline{\Delta^*(\mu)}$

$$|f(z)|\leq\sum_{n=0}^{k}|b_n||M_n^{(\alpha)}(z)|+\sum_{n=k+1}^{\infty}|b_n||M_n^{(\alpha)}(z)|$$

$$=O(|z|^{-1})+O\left(|z|^{\alpha/2-1/4}\sum_{n=k+1}^{\infty}n^{\alpha/2-1/4}e^{-2(\mu-\mu_0-\varepsilon)\sqrt{n}}\right)$$

$$=O(|z|^{\lambda(\alpha)}).$$

Следващо приложение на теорема 1 ще направим към проблема за представянето на аналитични функции чрез редове по полиномите на Лагер $\{L_n^{(\alpha)}(z)\}_{n=0}^{\infty}$. Засега този проблем е решен напълно само в случая, когато параметърът $\alpha=0$ в работата [4]. Забележително е, че методът, използуван в тази публикация, не се пренася за общия случай.

Като се основаваме на неравенството (4), ще дадем достатъчни условия, при които комплексна функция $f(z)$, аналитична в област от вида $\Delta(\lambda_0)=\{z\in C:\mathrm{Re}(-z)^{1/2}<\lambda_0\}$ $(0<\lambda_0\leq+\infty)$, може да се представи в тази област чрез ред по полиномите на Лагер с параметър $\alpha\neq-1, -2, \cdots$

Преди всичко, както е известно, системите $\{L_n^{(\alpha)}(z)\}_{n=0}^{\infty}$ и $\{M_n^{(\alpha)}(z)\}_{n=0}^{\infty}$ са решения на рекурентното уравнение $(n+1)y_{n+1}+(z-\alpha-2n-1)y_n+(n+\alpha)y_{n-1}=0$. Като се има пред вид това, не представлява затруднение да бъде изведена съответна формула от типа на Кристофел — Дарбу, а именно

$$\frac{1}{\zeta-z}=\sum_{n=0}^{\nu}\frac{1}{I_n^{(\alpha)}}(z)M_n^{(\alpha)}(\zeta)+\frac{\Delta_{\nu+1}^{(\alpha)}(z, \zeta)}{\zeta-z}, \tag{16}$$

където $I_n^{(\alpha)}=\Gamma(n+\alpha+1)/\Gamma(n+1)$ и

$$\Delta_{\nu+1}^{(\alpha)}(z, \zeta)=\frac{\nu+1}{I_\nu^{(\gamma)}}\{L_\nu^{(\alpha)}(z)M_{\nu+1}^{(\alpha)}(\zeta)-L_{\nu+1}^{(\alpha)}(z)M_\nu^{(\alpha)}(\zeta)\}. \tag{17}$$

Теорема 4. Нека $0<\lambda_0\leq+\infty$, $\alpha\neq-1, -2, \cdots$ и $f(z)$ е комплексна функция, аналитична в областта $\Delta(\lambda_0)$. Да предположим, че $f(z)$ удовлетворява следното изискване: каквото и да е $0<\lambda<\lambda_0$, съществува $\omega(\lambda)<\min(1/2, -\alpha/2+1/4)$, такова, че $f(z)=O(|z|^{\omega(\lambda)})$ при $z\to\infty$ и $z\in\Delta(\lambda)$. Тогава $f(z)$ се представя в областта $\Delta(\lambda_0)$ чрез ред по полиномите на Лагер с параметър α:

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n L_n^{(\alpha)}(z), \tag{18}$$

с коефициенти

$$a_n=\frac{1}{2\pi i\, I_n^{(\alpha)}}\int_{p(\lambda)} f(\zeta)\, M_n^{(\alpha)}(\zeta)\, d\zeta,\quad n=0, 1, 2, \cdots, \tag{19}$$

където $p(\lambda)=\partial\Delta(\lambda)=\{z\in\mathbf{C}:\mathrm{Re}\,(-z)^{1/2}=\lambda\}$.

Доказателство. Нека $0<\lambda<\lambda_0$ и ако ρ е достатъчно голямо, да означим с $\Gamma(\lambda, \rho)$ дъгата от параболата $p(\lambda)$, която се съдържа в кръга $\overline{K}(0; \rho)$, а с $\gamma(\lambda, \rho)$ — дъгата от окръжността $\partial K(0; \rho)$, която принадлежи на $\Delta(\lambda)$. Ако означим с $l(\lambda, \rho)$ дължината на $\gamma(\lambda, \rho)$, то, както не е трудно да се убедим, $l(\lambda, \rho)=O(\sqrt{\rho})$ при $\rho\to+\infty$.

Като имаме пред вид това, а също така и условието на теоремата, получаваме, че

$$\int_{\gamma(\lambda,\rho)} \frac{f(\zeta)}{\zeta-z}\, d\zeta=O(\rho^{\omega(\lambda)-1/2})\ (\rho\to+\infty),$$

каквото и да е z. Тогава, ако $z\in\Delta(\lambda)$, от интегралната формула на Коши получаваме

$$f(z)=\lim_{\rho\to+\infty}\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma(\lambda,\rho)}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}\, d\zeta=\frac{1}{2\pi i}\int_{p(\lambda)}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}\, d\zeta. \tag{20}$$

От (16) чрез умножаване с $(2\pi i)^{-1} f(\zeta)$ получаваме

$$\frac{1}{2\pi i}\,\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}=\sum_{n=0}^{\nu}\frac{1}{2\pi i\, I_n^{(\alpha)}} L_n^{(\alpha)}(z) f(\zeta)\, M_n^{(\alpha)}(\zeta)+\frac{1}{2\pi i}\,\frac{f(\zeta)\,\Delta_{\nu+1}^{(\alpha)}(z, \zeta)}{\zeta-z}\,. \tag{21}$$

От условието на теоремата и от асимптотичната формула за $M_n^{(\alpha)}(z)$ при $z\to\infty$, която използувахме при доказателството на теорема 3, следва, че за всяко $n=1, 2, 3, \cdots$ интегралът от дясната страна на (19) съществува (като несобствен) и даже е абсолютно сходящ. От (20) и (21) следва, че този интеграл съществува и при $n=0$, но в смисъл на главна стойност по Коши и тогава можем да запишем равенството

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\nu} a_n L_n^{(\alpha)}(z)+R_\nu^{(\alpha)}(z), \tag{22}$$

където a_n се дава от (19), а

$$R_\nu^{(\alpha)}(z)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{p(\lambda)}\frac{f(\zeta)\Delta_{\nu+1}^{(\alpha)}(z,\zeta)}{\zeta-z}\,d\zeta.$$

От условието на теоремата асимптотичните формули [5, (8.22.2), (8.22.3)] за полиномите на Лагер, неравенството (4) и формулата на Стирлинг следва, че при $\nu\to+\infty$

$$R_n^{(\alpha)}(z)=O\left(\nu^{-\alpha}\exp\{-2[\lambda-\mathrm{Re}(-z)^{1/2}]\sqrt{\nu}\int\limits_{p(\lambda)}|\zeta|^{\alpha/2-5/4+\omega(\lambda)}\,ds\right),$$

т. е. $\lim\limits_{\nu\to+\infty}R_\nu^{(\alpha)}(z)=0$.

И така във всяка област от вида $\Delta(\lambda)\,(0<\lambda<\lambda_0)$ функцията $f(z)$ се представя чрез ред по полиномите на Лагер $\{L_n^{(\alpha)}(z)\}_{n=0}^{\infty}$ с коефициенти, които се определят от равенствата (19). За представяне на аналитични функции чрез редове по полиномите на Лагер е в сила свойството единственост (ако $\alpha>-1$, това следва примерно от [3, стр. 189, лема 1], а за други значения на $\alpha\neq-1,\ -2,\ \cdots$ се пренася с помощта на равенството $L_n^{(\alpha)}(z)=L_n^{(\alpha+1)}(z)-L_{n-1}^{(\alpha+1)}(z)$ [5, (5.1.14)]. В частност получаваме, че коефициентите (19) не зависят от λ и освен това, че развитието (18) е валидно в областта $\Delta(\lambda_0)$, с което теоремата е установена.

Накрая ще дадем приложение на теорема 1 за функциите на Ермит от втори род $\{G_n(z)\}_{n=0}^{\infty}$ и за редовете по такива функции. Преди всичко функциите $\{G_n(z)\}_{n=0}^{\infty}$ се дефинират в отвореното множество $\mathbf{C}-(-\infty,+\infty)$ чрез равенствата

$$G_n(z)=-\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{-t^2}H_n(t)}{t-z}\,dt\qquad(n=0,\ 1,\ 2,\cdots),$$

където $\{H_n(z)\}_{n=0}^{\infty}$ са полиномите на Ермит. Като се имат пред вид зависимостите между полиномите на Ермит и Лагер [5, (5.6.1)], не представлява затруднение да се изразят функциите на Ермит от втори род чрез функциите на Лагер от втори род. Съответните връзки имат вида

$$G_{2n}(z)=(-1)^n2^{2n}n!\,zM_n^{(-1/2)}(z^2),\tag{23}$$

$$G_{2n+1}(z)=(-1)^n2^{2n+1}n!\,M_n^{(1/2)}(z^2).\tag{24}$$

Асимптотичното поведение при $n\to+\infty$ на $G_n(z)$ при условие, че z принадлежи на горната полуравнина, се характеризира с формулата

$$G_n(z)=(-i)^{n+1}\pi\sqrt{2}\exp(-z^2/2)(2n/e)^{n/2}\exp(iz\sqrt{2n+1})\{1+g_n(z)\},\tag{25}$$

където $\{g_n(z)\}_{n=0}^{\infty}$ са функции, аналитични в горната полуравнина, и освен това $\lim\limits_{n\to\infty}g_n(z)=0$ равномерно върху всяко компактно подмножество на тази полуравнина.

Директен извод на формулата (25), основаващ се само на определението на функциите на Ермит от втори род, е даден в нашата публикация [6]. (В тази работа системата функции на Ермит от втори род е означена с $\{K_n(z)\}_{n=0}^{\infty}$, но тук е възприето друго означение, за да се избегне евентуалното смесване с модифицираната функция на Бесел от трети род.) Същата формула, разбира се, може да бъде получена и от зависимостите (23) и (24), като се има пред вид асимптотичната формула (2) за функциите на Лагер от втори род.

Нека $0<\tau<+\infty$ и да означим с $\overline{H^+(\tau)}$ затворената полуравнина, определена с неравенството $\operatorname{Im} z \geqq \tau$. Очевидно, ако $z \in \overline{H^+(\tau)}$, $z^2 \in \overline{\Delta^*(\tau)}$. Като имаме пред вид тази бележка, от (23), (24) и неравенството (4) получаваме, че за $z \in \overline{H^+(\tau)}$

$$G_{2n}(z)=O\left(2^{2n}\, n!\, n^{-1/2} e^{-2\tau\sqrt{n}}\right),$$

$$G_{2n+1}(z)=O\left(2^{2n}\, n!\, e^{-2\tau\sqrt{n}}\right).$$

С помощта на формулата на Стирлинг горните две формули могат да бъдат обединени в следната:

$$G_n(z)=O\left((2n/e)^{n/2} e^{-\tau\sqrt{2n+1}}\right),\ z \in \overline{H^+(\tau)}. \tag{26}$$

С помощта на формулите (25) и (26) за редове по функциите на Ермит от втори род могат да бъдат получени резултати, аналогични на теорема 2 и теорема 3. Ще се ограничим само с формулирането на съответните твърдения.

Теорема 5. Ако редът.

$$\sum_{n=0}^{\infty} b_n G_n(z) \tag{27}$$

е сходящ в точката z_0 от горната полуравнина, той е абсолютно равномерно сходящ върху всяка (затворена) полуравнина $\overline{H^+(\tau)}$ с $\tau>\tau_0=\operatorname{Im} z_0$.

Теорема 6. Ако функцията $f(z)$, аналитична в полуравнината $H^+(\tau_0)$ $(0\leqq\tau_0<+\infty)$, се представя в тази полуравнина чрез ред от вида (27), каквото и да е $\tau>\tau_0$, тази функция е ограничена в полуравнината $\overline{H^+(\tau)}$.

Забележка. Твърдение от рода на теорема 5 е установено в [7, теорема 2, (2)] за развития по функциите от втори род на Ермит на функции, дефинирани чрез интеграли от типа на Коши.

ЛИТЕРАТУРА

1. Русев, П.: Функции на Лагер от втори род. Год. Соф. унив., Фак. мат. и мех 67 (1972/73), 269—283.
2. Бейтман, Г., Эрдейи, А.: Высшие трансцендентные функции, I, II. М., 1973, 1974
3. Русев, П.: Развитие на аналитични функции в редове на Лагер, Год. Соф. унив. Фак. мат. и мех., 68 (1973/74), 179—216.

4. Pollard, H.: Representation of an analytic function by a Laguerre series. Ann. of Mathem. (2), 48 (1947), 358—365.
5. Сеге, Г.: Ортогональные многочлены, М., 1962.
6. Rusev, P.: Hermite functions of second kind. Serdica, 2 (1976), 177—190.
7. Walter, G. G.: Hermite series as boundary values. Trans. Amer. Math. Soc., 218 (1971), 155—171.

Постъпила на 14. I. 1977 г.

ON THE ASYMPTOTIC PROPERTIES OF THE LAGUERRE FUNCTIONS OF SECOND KIND

P. Rusev

(SUMMARY)

The system $\{M_n^{(\alpha)}(z)\}_{n=0}^{\infty}$ $(\alpha>-1)$ of the Laguerre functions of second kind is defined in the region $\mathbf{C}-[0, +\infty)$ by the equalities (1) of the paper. If $n\to+\infty$, the asymptotic formula for $M_n^{(\alpha)}(z)$ is given by (2), where $\{\mu_n^{(\alpha)}(z)\}$ are complex functions analytic in the region $\mathbf{C}-[0, +\infty)$ and $\lim\limits_{n\to+\infty} \mu_n^{(\alpha)}(z)=0$ uniformly on every compact subset of this region.

In the paper we consider the asymptotic behaviour of $M_n^{(\alpha)}(z)$ as a function of n and z provided that $n\to+\infty$ and $z\to\infty$ in a suitable region. The main result is the following

Theorem 1. Let $0<\mu<+\infty$, $\alpha\neq-1, -2, \cdots$ and $\nu(\alpha)=\max(-1, -\alpha/2-3/4), -\alpha-1)$. Then, there exists a constant $A>0$, such that

$$(*) \qquad |M_n^{(\alpha)}(z)|\leq A|z|^{\alpha/2-3/4} n^{\alpha/2-3/4} e^{-2\mu\sqrt{n}}$$

if $n>\nu(\alpha)$ and $z\in\overline{\Delta^*(\mu)}=\{z\in\mathbf{C}: \mathrm{Re}\,(-z)^{1/2}\geqq\mu\}$.

The proof of the theorem is based on the integral representation

$$M_n^{(\alpha)}(z)=-\frac{2(-z)^{\alpha/2}}{\Gamma(n+1)}\int_0^{\infty} e^{-t} t^{n+\alpha/2} K_\alpha(2\sqrt{-zt})\,dt,$$

where $K_\alpha(z)$ is the modified Bessel function of the third kind. We get this representation using the relation

$$M_n^{(\alpha)}(z)=-\Gamma(n+\alpha+1)(-z)^\alpha \Psi(n+\alpha+1, \alpha+1; -z),$$

where $\Psi(a, c; z)$ is the confluent hypergeometric function of Tricomi.

The inequality (*) has many applications. Some of them are given in the paper, namely

Theorem 2. If $\alpha\leqq 1/2$ and the series

$$(**) \qquad \sum_{n=0}^{\infty} b_n M_n^{(\alpha)}(z)$$

is convergent at a point $z_0 \in \mathbf{C}-[0, +\infty)$, then it is absolutely uniformly convergent on every closed domain $\overline{\Delta^*(\mu)}$ if $\mu > \mu_0 = \mathrm{Re}(-z)^{1/2}$.

Theorem 3. If the complex function $f(z)$ is analytic in the region $\Delta^*(\mu_0)$ $(0 \leqq \mu_0 < +\infty)$ and is represented in this region by a series of the kind (**), then for every $\mu > \mu_0$, $f(z) = O(|z|^{\lambda(\alpha)})$ in $\overline{\Delta^*(\mu)}$, where $\lambda(\alpha) = \max(-1, \alpha/2 - 3/4)$.

Theorem 4. Let $0 < \lambda_0 \leqq +\infty$, $\alpha \neq -1, -2, \cdots$ and $f(z)$ be a complex function analytic in the region $\Delta(\lambda_0) = \{z \in \mathbf{C} : \mathrm{Re}(-z)^{1/2} < \lambda_0\}$. Suppose that for every $0 < \lambda < \lambda_0$ there exists $\omega(\lambda) < \min(1/2, -\alpha/2 + 1/4)$ such that $(z) = O(|z|^{\omega(\lambda)})$ if $z \to \infty$ and $z \in \Delta(\lambda)$. Then, $f(z)$ can be represented in $\Delta(\lambda_0)$ by a series in the Laguerre polynomials $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n L_n^{(\alpha)}(z)$ with coefficients

$$a_n = \frac{1}{2\pi i\, l_n^{(\alpha)}} \int_{p(\lambda)} f(\zeta) M_n^{(\alpha)}(\zeta)\, d\zeta \quad (n = 0, 1, 2, \cdots),$$

where $l_n^{(\alpha)} = \Gamma(n+\alpha+1)/\Gamma(n+1)$, $p(\lambda) = \partial\Delta(\lambda)$.

At the end of the paper we consider the Hermite functions of the second kind $\{G_n(z)\}_{n=0}^{\infty}$ and also series in these functions. We establish some results which are analogous to the Theorem 2 and Theorem 3, namely

Theorem 5. If the series

$$(***) \qquad \sum_{n=0}^{\infty} b_n G_n(z)$$

is convergent at a point z_0 of the upper half-plane, then it is absolutely uniformly convergent on every closed half-plane $\overline{H^+(\tau)} = \{z \in \mathbf{C} : \mathrm{Im}\, z \geqq \tau\}$, where $\tau > \tau_0 = \mathrm{Im}\, z_0$.

Theorem 6. If the complex function $f(z)$, analytic in the half-plane $H(\tau_0)$ $(0 \leqq \tau_0 < +\infty)$, is represented in this region by a series of the kind (***), then $f(z) = O(1)$ in the half-plane $\overline{H^+(\tau)}$ for every $\tau > \tau_0$.