ТЕОРЕМЫ СУЩЕСТВОВАНИЯ ЭКСТРЕМУМА ДЛЯ МНОГОЧЛЕНОВ НА НЕОГРАНИЧЕННЫХ МНОЖЕСТВАХ

Георги Х. Иванов, Радостин П. Иванов

В этой статье рассматривается вопрос о существовании экстремума для многочленов многих переменных на неограниченных множествах. Известно например в [1], что ограниченная снизу линейная функция достигает своей нижней грани на полиэдральном множестве евклидова пространства. Так же известно, например в [2], что ограниченная снизу выпуклая квадратичная функция имеет минимум на полиэдральном множестве. Мы будем рассматривать множества, которые представимы в виде суммы компакта и конечнопорожденного конуса, частным случаем которых являются полиэдральные множества [3]). Нижеследующий пример показывает, что требование о конечной порожденности конуса естественно.

Приведем пример ограниченной снизу и выпуклой квадратичной функции $\varphi(x, y, z)$, которая не достигает своей нижней грани на замкнутом конусе L:

$$\varphi(x, y, z)=x^2+y^2-x,$$

$$L=\{(x, y, z): x\geqq 0,\ y\geqq 0,\ x^2+y^2\leqq yz\}.$$

Безусловный минимум функции $\varphi(x, y, z)$ достигается при $x=1/2$ и $y=0$ Однако для любого конечного z точка $(1/2, 0, z)$ не принадлежит конусу L, хотя значение функции $\varphi(x, y, z)$ в точке $(1/2, \varepsilon, 1/\varepsilon)$, принадлежащей конусу L для всех достаточно малых ε, $\varepsilon>0$, может стать сколь угодно близко к значению безусловного минимума.

Дальше, мы сузим класс многочленов, для которых докажем теоремы существования экстремума, предоставив вниманию читателя пример многочлена четвертой степени, который не достигает своей нижней грани на всей плоскости:

$$\varphi(x, y)=(xy-1)^2+y^2.$$

Ясно, что $\varphi(x, y)>0$ для любых x и y. С другой стороны, если возьмем $x=1/\varepsilon$ и $y=\varepsilon$, то при ε стремящемся к нулю, значение функции $\varphi(x, y)$, которое равно ε^2, тоже стремится к нулю. Этот пример показывает, почему мы будем рассматривать только квадратичные функции и многочлены третьей степени.

Теорема 1. Если квадратичная функция $Q(x)=(Cx+p, x)$ ограничена снизу (сверху) на множестве $\Omega=Y+K\subset E_n$, где Y компактное множество, а K — конечнопорожденный, выпуклый и замкнутый конус, то

функция $Q(x)$ достигает своей нижней (верхней) грани на множестве Ω.

Доказательство. Пусть, для определенности функция $Q(x)$ ограничена снизу на Ω. Так как для любых $y \in Y$, $z \in K$ и $\lambda \geqq 0$ имеем

$$x = y + \lambda z \in \Omega,$$

$$Q(x) = Q(y + \lambda z) = (Cy + p, y) + (2Cy + p, z)\lambda + (Cz, z)\lambda^2,$$

то $(Cz, z) \geqq 0$ для любого $z \in K$.

Рассмотрим два случая: первый—когда $(Cz, z) \neq 0$ для всех $z \in K \setminus \{0\}$, и второй—когда $(Cz, z) = 0$ хотя бы для одного $z \in K \setminus \{0\}$.

Случай 1. Пусть $(Cz, z) \neq 0$ для любого $z \in K$. Введем следующие обозначения:

$$L = \{z : z \in K, \ \|z\| = 1\},$$

$$M = Y \times L \times R, \ R = [0, \infty),$$

$$\varphi(y, z, \lambda) = Q(x + \lambda z) = (Cy + p, y) + (2Cy + p, z)\lambda + (Cz, z)\lambda^2.$$

Так как функция $\varphi(y, z, \lambda)$ есть парабола по переменной λ, то

$$\varphi(y, z, \lambda) \geqq \varphi(y, z, -(2Cy + p, z)/2(Cz, z)) \text{ либо}$$

$$\varphi(y, z, \lambda) \geqq \varphi(y, z, 0), \text{ если} -(2Cy + p, z)/2(Cz, z) < 0.$$

Далее, из непрерывности функции (Cz, z) по переменной z и из компактности множества L следует, что существует такая постоянная δ, $\delta > 0$, что $(Cz, z) \geqq \delta$, $z \in L$. Поскольку множество $Y \times L$ компактно, то имеем

$$\inf_{\Omega} Q(x) = \inf_{M} \varphi(y, z, \lambda) \geqq \inf_{Y \times L} \varphi(y, z, \max\{0, -(2Cy + p, z)/2(Cz, z)\}$$

$$= \min_{Y \times L} \varphi(y, z, \max\{0, -(2Cy + p, z)/2(Cz, z)\}).$$

Случай 1 доказан.

Случай 2. По предположению существует такое $\bar{z} \in K \setminus \{0\}$, что $(C\bar{z}, \bar{z}) = 0$. Докажем необходимое нам утверждение по индукции относительно числа элементов, порождающих конуса K. Обозначим эти элементы через $z^1, z^2, z^3, \ldots, z^s$ и введем еще следующие обозначения

$$K = \{z^1, z^2, z^3, \ldots, z^s\}, \ K_q = \{z^1, z^2, \ldots, z^{q-1}, z^{q+1}, \ldots, z^s\}, \ \Omega_q = Y \times K_q,$$

$$\varphi(y, z) = Q(y + z) = (Cy + p, y) + (2Cy + p, z) + (Cz, z).$$

Теперь проверим наше утверждение для $s = 1$. Имеем $K = \{z : z = \lambda z^1 . \lambda \geqq 0\}$ и $(Cz^1, z^1) = 0$. Так как функция $\varphi(y, \lambda z^1)$ ограничена снизу на множестве Ω, то $(2Cy + p, z^1) \geqq 0$ и, следовательно,

$$\varphi(y, 0) \leqq \varphi(y, z)$$

для любого $y \in Y$, $z \in K$.

Допустим, что утверждение верно для всех чисел меньше s. Для любого $z \in K$ имеем

$$z=\sum_{i=1}^{s}\alpha_i z^i,\ \alpha_i\geqq 0,\ i=1,\ 2,\ \cdots,\ s.$$

Пусть $\bar z=\sum_{i=1}^{s}\bar\alpha_i z^i$, тогда $z-\lambda\bar z=\sum_{i=1}^{s}(\alpha_i-\lambda\bar\alpha^i)z^i$.

Если $\lambda_q=\min_{\alpha_i>0}(\alpha_i/\bar\alpha_i)=\alpha_q/\bar\alpha_q$ то $\hat z=z-\lambda_q\bar z\in K_q\subset K$.

Кроме того имеем

$$\varphi(y,\ \hat z)=\varphi(y,\ z-\lambda_q\bar z)=(Cy+p,y)+(2Cy+p,\ z)+(Cz,z)-[(2Cy+p,\ \bar z)+$$
$$+2(Cz,\ \bar z)]\lambda_q.$$

Отсюда и из ограниченности функции $\varphi(y,\ z)$ на Ω следует, что $(2Cy+p,\ \bar z)+2(Cz,\ \bar z))\geqq 0$ и

$$\varphi(y,\ \hat z)\leqq\varphi(y,\ z).$$

И так для любого $z\in K$ мы нашли такое $\hat z\in K_q$, что

$$\inf_{\Omega_q}\varphi(y,\ z)\leqq\varphi(y,\ \hat z)\leqq\varphi(y,z).$$

Теперь, либо по индуктивному предположению, либо в соответствии с случаем 1 имеем

$$\inf_{\Omega_q}\varphi(y,\ z)=\min_{\Omega_q}\varphi(y,\ z).$$

Поскольку q может принимать только конечное число значений, то

$$\inf_{\Omega}Q(x)=\inf_{Y\times K}\varphi(y,\ z)\geqq\min_q\inf_{\Omega_q}\varphi(y,\ z)=\min_q\min_{\Omega_q}\varphi(y,\ z).$$

Теорема доказана.

Прежде чем перейти к доказательству существования экстремума для многочленов третьей степени, докажем некоторые вспомагательные утверждения имеющие, по-видимому, самостоятельное значение.

Лемма 1. Пусть дана любая последовательность элементов $x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_m,\ \cdots,\ x_m\in E_n,\ x_m\neq 0$. Тогда существует такая подпоследовательность $\{x_k\}$ данной последовательности и такие единичные векторы $l_i,\ i=1,\ 2,\ \cdots,n,\ l_i\in E_n,\ (l_i,\ l_j)=0$ при $i\neq j$, что для координат вектора $x_k\ (x_k=\sum_{i=1}^{n}\lambda_k l_i)$ имеем

$$\lim_{k\to\infty}\lambda_k^{i+1}/\lambda_k^i=0$$

и если $\lambda_k^i=0$, то для всех $j>i$ имеем $\lambda_k^j=0$.

Доказательство. Для того, чтобы не накапливать болшого количества индексов, мы всегда будем пользоваться индексом k, когда из по-

следовательности $\{x_m\}$ выбираем некоторую подпоследовательность. Так как $x_m \neq 0$, то из данной последовательности выберем такую подпоследовательность $\{x_k\}$, чтобы $\lim\limits_{k\to\infty} x_k / \|x_k\| = l_1$.

Рассмотрим функцию $\varphi(\lambda) = \|x_k - \lambda l_1\|^2$ и пусть ее минимум по переменной λ достигается при λ_k^1. Из условия минимума имеем $(x_k - \lambda_k^1 l_1, l_1) = 0$ и, следовательно, $\lambda_k^1 = (x_k, l_1)$. Так как $l_1 = \lim\limits_{k\to\infty} x_k / \|x_k\|$, то для всех достатъчно больших k будем иметь $\lambda_k^1 > 0$. Тепер положим $x_k^2 = x_k - \lambda_k^1 l_1$. Для последовательности $\{x_k^2\}$ имеем две возможности: либо после некоторого номера k все элементы равны нулю, либо есть бесконечное число отличных от нуля элементов. В первом случае выбираем любую ортогональную систему векторов $l_1, l_2, \ldots, l_n$, где $l_1 = \lim\limits_{k\to\infty} x_k / \|x_k\|$, а во втором случае будем рассматривать полученную подпоследовательность $\{x_k^2\}$, из ненулевых элементов. Проведем рассуждение для любого $i = 2, 3 \ldots, n$.

Пусть получена подпоследовательность $\{x_k^i\}$, т. е. известны все l_j, $\lambda_k^j > 0$, $j = 1, 2, \ldots, i-1$, $(l_s, l_r) = 0$, $r \neq s$,

$$x_k = \sum_{j=1}^{i-1} \lambda_k^j l_j + x_k^i, \quad \lambda_k^j = (x_k, l_j), \quad (x_k^i, l_j) = 0.$$

Если окажется, что после некоторого индекса k все элементы подпоследовательности $\{x_k^i\}$ равны нулю, то мы дополним произвольным образом систему векторов $l_1, l_2, \ldots, l_{i-1}$, до ортогональной координатной системы пространства E_n. Иначе мы выберем подпоследовательность $\{x_k^i\}$, состоящую только из ненулевых элементов. Теперь выберем такую последовательность, чтобы существовал предел

$$l_i = \lim_{k\to\infty} x_k^i / \|x_k^i\|. \tag{1}$$

Рассмотрим функцию $\varphi(\lambda) = \|x_k^i - \lambda l_i\|^2$ и пусть ее минимум достигается при λ_k^i. Имеем

$$\lambda_k^i = (x_k^i, l_i). \tag{2}$$

Отсюда и из равенства (1) следует, что для всех достаточно больших k будет иметь место

$$\lambda_k^i > 0. \tag{3}$$

Так как $(x_k^i, l_j) = 0$ и $l_i = \lim\limits_{k\to\infty} x_k^i / \|x_k^i\|$, то имеем

$$(l_i, l_j) = 0, \quad i \neq j. \tag{4}$$

Отсюда окончательно получаем

$$\lambda_k^i = (x_k - \sum_{j=1}^{i-1} \lambda_k^j l_j, l_i) = (x_k, l_i). \tag{5}$$

Теперь, если $i \neq n$, положим

(6) $$x_k^{i+1} = x_k^i - \lambda_k^i l_i.$$

Из равенства (6) получаем

(7) $$(x_k^{i+1}, l_j) = 0, \ j = 1, 2, \ldots, i.$$

Далее, из равенств (1), (2), (6), (7) получаем соотношение

$$\| x_k^i \|^2 = (\lambda_k^i)^2 + \| x_k^{i+1} \|^2$$

и мы можем закончить доказательство. Действительно, имеем

$$\lim_{k\to\infty} \lambda_k^{i+1} / \lambda_k^i = \lim \lambda_k^{i+1} \| x_k^{i+1} \| / \lambda_k^i \| x_k^{i+1} \|$$

$$= \lim_{k\to\infty} (\lambda_k^{i+1} / \| x_k^{i+1} \|) \ (\| x_k^i \| / \lambda_k^i) \sqrt{1 - (\lambda_k^i)^2 / \| x_k^i \|^2} = 0.$$

Лемма доказана.

Лемма 2. Пусть задан конечнопорожденный, выпуклий и замкнутый конус L, $L \subset E_n$, с вершиной в начале координатной системы и — бесконечная последовательность элементов $\{x_k\}$,

$$x_k = \sum_{i=1}^{s} \lambda_k^i l_i, \ \lim_{k\to\infty} \lambda_k^{i+1} / \lambda_k^i = 0, (l_i, l_j) = 0, \ i \neq j, \ i, j = 1, 2, \ldots, s-1, (s), \lambda_k^i > 0$$

где s некоторое фиксированное число, $1 \leq s \leq n$. Тогда, для любого набора неотрицательных чисел α_i, $i = 1, 2, \ldots, s$, $\alpha_i \geq \alpha_{i+1}$, векторы $x_k^\alpha = \sum_{i=1}^{s} \alpha_i \lambda_k^i l_i$ принадлежат конусу L для всех достаточно больших k.

Доказательство. Доказательство проведем по индукции. Для $s = 1$ утверждение леммы следует из равенства (1). Допустим, что требуемое утверждение верно для некоторого s. Покажем, что оно верно и для $s+1$. Обозначим через L' проекцию конуса L на гиперплоскость $(l_1, x) = 0$. Обозначим через z_r, $r = 1, \ldots, N$, порождающие векторы конуса L, а со „штрихом"—их проекции на гиперплоскость $(l_1, x) = 0$. Очевидно имеем

$$z_r = \mu_r l_1 + z_r'.$$

Теперь по индуктивному предположению, утверждение леммы верно для конуса L', т. е. найдутся такие неотрицательные числа β_k^r, $r = 1, 2, \ldots, N$, что

$$\sum_{i=1}^{N} \beta_k^r z_r' = \left(\sum_{i=2}^{s+1} \alpha_i \lambda_k^i l_i \right) / \lambda_k^1$$

и, следовательно, вектор $\sum_{i=1}^{N} \beta_k^r z_r = \sum_{i=1}^{N} \beta_k^r \mu_r l_1 + \sum_{i=1}^{N} \beta_k^r z_r'$ принадлежит

конусу L. Из леммы 1 следует, что при k стремящемся к бесконечности коэффициенты β_k^r будут стремиться к нулю и так же будет стремиться к нулю $\sum_{r=1}^{N} \beta_k^r \mu_r$. Отсюда следует, что для всех достаточно больших k вектор

$$x_k^a = \sum_{i=1}^{s} \alpha_i \lambda_k^i l_i = \lambda_k^1 \left(\alpha_1 l_1 + \left(\sum_{i=2}^{s} \alpha_i \lambda_k^i \; l_i\right) / \lambda_k^1\right)$$

$$= \lambda_k^1 \left(\sum_{i=1}^{N} \beta_k^r \mu_r l_1 + \sum_{i=1}^{N} \beta_k^r z_r' + \left(\alpha_1 - \sum_{i=1}^{N} \beta_k^r \mu_r\right) l_1\right)$$

принадлежит конусу L. Лемма доказана.

Следствие 1. Пусть задано полиэдральное множество Y, содержащее начало координат, и бесконечная последовательность элементов $x_k\}$, для которых $x_k \in Y$,

$$x_k = \sum_{i=1}^{s} \lambda_k^i l_i, \; \lim_{k\to\infty} x_k = 0, \; \lim_{k\to\infty} \lambda_k^{i+1}/\lambda_k^i = 0, \; (l_i, l_j) = 0,$$

$i \neq j$, $i, j = 1, 2, \ldots, s$, где s некоторое фиксированное число, $1 \leq s \leq n$. Тогда, для любого набора неотрицательных чисел α_i, $i = 1, 2, \ldots, s$ $\alpha_i \geq \alpha_{i+1}$, векторы

$$x_k^a = \sum_{i=1}^{s} \alpha_i \lambda_k^i l_i$$

принадлежат множеству Y для всех достаточно больших k.

Доказательство. Рассмотрим конус L с вершиной в нуле и натянутый на Y. Теперь, из леммы 2 следует, что для всех достаточно больших k векторы x_k^a принадлежат конусу L. Далее, поскольку множество Y полиэдрально, то найдется такая окрестность нуля, что сечение этой окрестности с множеством Y будет совпадать с сечением этой-же окрестности с конусом L. Так как $\lim_{k\to\infty} x_k = 0$, то для всех достаточно больших k векторы x_k^a будут принадлежать упомянутой выше окрестности. Следствие доказано.

Замечание 1. Заметим, что в лемме 2 и следствии 1 условие, ограничавающее вершину конуса, несущественно, так как если мы сдвинем вершину конуса, то таким-же образом сдвинутся и векторы x_k^a.

Мы докажем теорему существования экстремума для многочлена третьей степени в предположении, что компакт Y является полиэдральным множеством. Нижеследующий пример показывает, что это предположение существенно.

Рассмотрим следующий многочлен:

$$P(x_1, x_2, x_3)=x_1^2(x_2-x_3)-2x_1x_2+x_2+1$$

на множестве $\Omega=Y+K$, где $K=\{x: x\in E_3, x=(x_1, 0, 0), x_1\geqq 0\}$, а Y есть замкнутая выпуклая оболочка множества

$x: x\in E_3, x, x=0$, либо $x=x_n, x_n=(0, 1/n, (n-1)/n^2), n=1, 2, \cdots\}$

Имеем $P(0, 0, 0)=1$ и $P(x_1, 1/n, (n-1)/n^2)=(x_1/n-1)^2+1/n>0$.

Поскольку $P(x_1, \sum_{i=1}^{3}\alpha_i x_2^i, \sum_{i=1}^{3}\alpha_i x_3^i)=\sum_{i=1}^{3}\alpha_i P(x_1, x_2^i, x_3^i)$, $\alpha_i\geqq 0$, $i=1, 2, 3$, $\sum_{i=1}^{3}\alpha_i=1$, то, учитывая теорему Каратеодори [3], имеем

$$P(x_1, x_2, x_3)=P(x_1, \sum_{i=1}^{3}\alpha_i x_{n_i})>0, \ n_i\in\{0, 1, 2, \cdots\}$$

для всех $x\in\Omega$. С другой стороны, $\lim_{n\to\infty} P(n, 1/n, (n-1)/n^2)=0$, т. е. не существует минимум для данного многочлена на множестве Ω.

Теорема 2. Если многочлен третьей степени $P(x)$ ограничен снизу (сверху) на множестве $\Omega=Y+K\subset E_n$, где Y компактное полиэдральное множество, а K конечнопорожденный, выпуклый и замкнутый конус, то многочлен $P(x)$ достигает своей нижней (верхней) грани на множестве Ω.

Доказательство. Возьмем произвольную минимизирующую последовательность элементов

$$x_k=y_k+z_k, \ y_k\in Y, \ z_k\in k,$$

для многочлена $P(x)$, т. е. $\lim_{k\to\infty} P(x_k)=\inf_{\Omega} P(x)$. Согласно лемме 1 мы можем найти такие числа λ_k^i, μ_k^j и векторы l_i, l_j, $i, j=1, 2, \cdots, n$, чтобы

$$y_k=\sum_{j=1}^{n}\mu_k^j l_j, \ z_k=\sum_{i=1}^{n}\lambda_k^i l_i,$$

$$\lim_{k\to\infty}\lambda_k^i/\lambda_k^{i-1}=0, \ \lim_{k\to\infty}\mu_k^j/\mu_k^{j-1}=0$$

и, если для некоторого i, соответственно j, $\lambda_k^i=0$, соответственно $\mu_k^j=0$ то все последующие λ_k^{i+s}, соответственно μ_k^{j+s}, равны нулю. Поскольку наша цель является построением сходящейся минимизирующей последовательности для многочлена $P(x)$, то в случае ограниченности последовательности $\{x_k\}$ вопрос очевидно решен. Поэтому будем предполагать, что эта последовательность неограничена.

Не ограничивая общность доказательства, чтобы избежать более

громоздких формул и рассмотрения большего количества случаев, мы будем считать, что

$$\lim_{k\to\infty} y_k=0, \quad \lim_{k\to\infty} \lambda_k^{p-1}=\infty, \quad \lim_{k\to\infty} \lambda_k^{p}=0$$

и, что вершина конуса K находится в начале координат. По сути, учитывая замечание 1, это означает, что будем рассматривать новый многочлен, который отличается от первоначального на константу.

Мы будем предполагать, что имеем разложение многочлена $P(x)$ по произведениям λ_k^i и μ_k^j, $i, j=1, 2, \ldots, n$, и для коэффициентов этого разложения установим некоторые факты, относящиеся к их знаку. Для этого мы подставим в многочлен векторы, построеные на основе минимизирующей последовательности и имеющие следующий вид:

$$z_k^\lambda+y_k^\mu=\lambda^\alpha \sum_{i=1}^{a} \lambda_k^i l_i+\lambda^\beta \sum_{i=a+1}^{b} \lambda_k^i l_i+\lambda^\gamma \sum_{i=b+1}^{c} \lambda_k^i l_i$$

$$+\lambda^\delta \sum_{i=i+1}^{n} \lambda_k^i l_i+\mu^\varepsilon \sum_{j=1}^{s} \mu_k^j l_j+\mu^\zeta \sum_{j=s+1}^{t} \mu_k^j l_j+\mu^\eta \sum_{i=t+1}^{n} \mu_k^j l_i.$$

Эти векторы принадлежат, соответственно, множествам K и Y для всех достаточно больших K, где $\lambda>1$, $\mu>1$, $\alpha>\beta>\gamma>\delta$, $0>\varepsilon>\zeta>\eta$. Это утверждение следует из леммы 2 и следствия 1. В частности, из следствия 1 непосредственно следует, что для всех достаточно больших k векторы

$$3(\mu^\varepsilon-\mu^\zeta) \sum_{j=1}^{s} \mu_k^i l_j, \quad 3(\mu^\zeta-\mu^\eta) \sum_{j=1}^{t} \mu_k^j l_j, \quad 3\mu^\eta \sum_{j=1}^{n} \mu_k^j l_j$$

принадлежат множеству Y, а следовательно $y_k^\mu \in Y$.

Теперь, мы выделим всевозможные произведения из λ_k^i и μ_k^j, дающие наибольший ненулевой порядок стремления при $k\to\infty$, а именно

$$\lambda_k^a\lambda_k^b\lambda_k^c, \ \lambda_k^d\lambda_k^f, \ \lambda_k^g, \ \lambda_k^r\mu_k^s\mu_k^t, \ \lambda_k^u\lambda_k^v\mu_k^w, \ \lambda_k^m\mu_k^q,$$

где $a\geqq b\geqq c$, $d\geqq f$, $s\geqq t$, $u\geqq v$.

Покажем, что коэффициенты этих произведений в разложении многочлена $P(x)$ по λ_k^i и μ_k^j неотрицательные. Для этого каждому, такому произведению сопоставим собственный вектор $z_k^\lambda+y_k^\mu$, который поставим в многочлен $P(x)$, устремляя λ и μ к бесконечности.

1. Для произведения $\lambda_k^a\lambda_k^b\lambda_k^c$ возьмем следующий вектор:

$$z_k^\lambda+y_k^\mu=z_k^\lambda=\lambda^\alpha \sum_{i=1}^{a} \lambda_k^i l_i+\lambda^\beta \sum_{i=a+1}^{b} \lambda_k^i l_i+\lambda^\gamma \sum_{i=b+1}^{c} \lambda_k^i l_i+\lambda^\delta \sum_{i=c+1}^{n} \lambda_k^i l_i$$

при $a>b>c$, либо

$$z_k^\lambda=\lambda^\alpha \sum_{i=1}^{a}\lambda_k^i l_i+\lambda^\beta \sum_{i=a+1}^{c} \lambda_k^i l_i+\lambda^\delta \sum_{i=i+1}^{n} \lambda_k^i l_i$$

при $a>b=c$, либо

$$z_k^\lambda=\lambda^\alpha \sum_{i=1}^{a}\lambda_k^i l_i+\lambda^\gamma \sum_{i=a+1}^{c} \lambda_k^i l_i+\lambda^\delta \sum_{i=c+1}^{n} \lambda_k^i l_i$$

при $a=b>c$, либо

$$z_k^\lambda=\lambda^\alpha \sum_{i=1}^{a}\lambda_k^i l_i+\lambda^\delta \sum_{i=a+1}^{n} \lambda_k^i l_i$$

при $a=b=c$, где $\alpha>0$, δ—достаточно малое отрицательное число, например $\delta<-10\alpha$. При том $\alpha>\beta>0$ при $b<p$; $\gamma<\beta<0$ при $b\geqq p$; $\beta>\gamma>0$ при $c<p$; $\gamma<0$ при $c\geqq p$; $\alpha<\beta+\gamma$ при $\gamma>0$; $2\beta<\alpha+\gamma$, $\beta>|\gamma|$ при $\gamma<0$, $\beta>0$; $\alpha>|\beta|+|\gamma|$ при $\beta<0$.

Теперь, подставляя нужный вектор в разложении многочлена $P(x)$, нетрудно вычислить, что степень множителя λ перед всеми остальными коэффициентами будет меньше, чем перед коэффициентом произведения $\lambda_k^a\lambda_k^b\lambda_k^c$. Устремляя λ к бесконечности, в виду ограниченности многочлена $P(x)$ снизу, приходим к выводу, что коэффициент перед произведением $\lambda_k^a\lambda_k^b\lambda_k^c$ неотрицательный.

Далее, мы каждому произведению будем сопоставлять только наиболее типичный вектор, так как рассмотрение всевозможных случаев проводится аналогичным образом.

2. Для произведения $\lambda_k^d\lambda_k^f$ возьмем следующий вектор:

$$z_k^\lambda+y_k^\mu=z_k^\lambda=\lambda^\alpha \sum_{i=1}^{d}\lambda_k^i l_i+\lambda^\beta \sum_{i=d+1}^{f} \lambda_k^i l_i+\lambda^\gamma \sum_{i=f+1}^{n} \lambda_k^i l_i,$$

где $\alpha>0$, γ достаточно малое число, $\beta>0$, если $f<p$, и $\beta<0$, если $f\geqq p$, $\alpha>2\beta$, если $\beta>0$, и $\alpha>|\beta|$, если $\beta<0$. Как в предыдущем пункте показывается, что коэффициент перед произведением $\lambda_k^d\lambda_k^f$ неотрицательный.

3. Для множителя λ_k^g возьмем следующий вектор:

$$z_k^\lambda+y_k^\mu=\lambda^\alpha \sum_{i=1}^{g} \lambda_k^i l_i+\lambda^\beta \sum_{i=g+1}^{n} \lambda_k^i l_i,$$

где $\alpha>0$, а β достаточно малое отрицательное число. Сразу видно, что нужный коэффициент неотрицательный.

4. Для произведения $\lambda_k^r \mu_k^s \mu_k^t$ возьмем следующий вектор:

$$z_k^\lambda + y_k^\mu = \lambda^\alpha \sum_{i=1}^{r} \lambda_k^i l_i + \lambda^\beta \sum_{i=r+1}^{n} \lambda_k^i l_i + \mu^\varepsilon \sum_{j=1}^{s} \mu_k^j l_j + \mu^\zeta \sum_{j=s+1}^{t} \mu_k^j l_j + \mu^\eta \sum_{j=t+1}^{n} \mu_k^j l_j,$$

где $\alpha > 0$, $0 > \varepsilon > \zeta$, β, η—достаточно малые отрицательные числа.

5. Для произведения $\lambda_k^u \lambda_k^v \mu_k^w$ возьмем следующий вектор:

$$z_k^\lambda + y_k^\mu = \lambda^\alpha \sum_{i=1}^{u} \lambda_k^i l_i + \lambda^\beta \sum_{i=n+1}^{v} \lambda_k^i l_i + \lambda^\gamma \sum_{i=v+1}^{n} \lambda_k^i l_i + \mu^\varepsilon \sum_{j=1}^{w} \mu_k^j l_j + \mu^\zeta \sum_{j=w+1}^{n} \mu_k^j l_j,$$

где $\alpha > 0$, $\beta > 0$ при $v < p$, $\beta < 0$ при $p \leq v$, и $\alpha > 2|\beta|$, а γ, ζ — достаточно малые отрицательные числа.

6. Для произведения $\lambda_k^m \mu_k^q$ возьмем следующий вектор:

$$z_k^\lambda + y_k^\mu = \lambda^\alpha \sum_{i=1}^{m} \lambda_k^i l_i + \lambda^\beta \sum_{i=m+1}^{n} \lambda_k^i l_i + \mu^\varepsilon \sum_{j=1}^{q} \mu_k^j l_j + \mu^\zeta \sum_{j=q+1}^{n} \mu_k^j l_j,$$

де $\alpha > 0$, $0 > \varepsilon$, β, ζ—достаточно малые отрицательные числа.

В пунктах 4, 5, 6, учитывая, что суммарная степень множителей λ и μ наибольшая перед нужными коэффициентами и устремляя λ и μ к бесконечности подходящим образом показывается неотрицательность нужных коэффициентов.

Если рассматриваемый порядок бесконечен, т. е. все рассматриваемые произведения стремятся к бесконечности при $k \to \infty$, то из ограниченности снизу многочлена $P(x)$, разделив его на этот наибольший порядок, при $k \to \infty$, следует, что все эти коэффициенты равны нулю. Таким образом, только коэффициенты перед произведениями с конечным порядком стремления при $k \to \infty$ могут оказаться ненулевыми, причем, если порядок ненулевой, то эти коэффициенты неотрицательные. Отсюда следует, что ноль обеспечивает минимум для многочлена $P(x)$. Учитывая замечание, которое мы сделали в начале доказательства, теорема доказана.

Из теоремы 2 непосредственно вытекает:

Следствие 2. Пусть $P(x)$ многочлен не выше третьей степени, ограниченный на множестве, являющемся суммой компакта и конечнопорожденного, выпуклого и замкнутого конуса. Тогда существует решение задачи о нахождении максимума на компакте и минимума на конусе для многочлена $P(x)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Юдин, Д. Б., Гольштейн, Е. Г.: Задачи и методи линейного программирования. М., Советское радио, 1961.
2. Кюнци, Г. П., Крелле, В.: Нелинейное программирование, Советское радио, М., 1965.
3. Рокафеллар, Р. Выпуклый анализ, М., Мир, 1973.

Поступила 28. I. 1977 г.

EXISTENCE THEOREMS FOR EXTREMUM OF POLYNOMIALS ON UNBOUNDED SETS

G. C. Ivanov, R. P. Ivanov

(SUMMARY)

Existence theorems are proved for extremum of quadratic and cubic polynomials on sets representing a sum of a compact set and a cone.

An example is given of polynomial of degree 4 which has no extremum.