ПРИЛОЖЕНИЕ НА УРАВНЕНИЯТА НА АПЕЛ ВЪРХУ ЕДНА НЕХОЛОНОМНА СИСТЕМА

Васил Диамандиев

В една предишна работа намерихме уравненията на движение на тежко твърдо тяло, което се търкаля без хлъзгане върху неподвижна равнина. Изводът на тези уравнения се получи като пряко приложение на новите уравнения на Ценов за нехолономните системи. В тази работа ще покажем, че тези уравнения се получават от уравненията на Апел за нехолономни системи. Предварително ще изведем формула за енергията на ускорението на движещо се твърдо тяло.

1. Енергия на ускорението. Съгласно теоремата на Кьониг енергията на ускорението на твърдо тяло се дава от формулата

$$S = M w_G^2/2 + S', \tag{1}$$

където G е центърът на тежестта, а S' — енергията на ускорението на тялото около G. Ще пресметнем S' директно. Ускорението на точките спрямо G се дава от известната формула

$$\bar{w}' = \dot{\bar{\omega}} \times \bar{\rho} + \bar{\omega}\,(\bar{\omega} \cdot \bar{\rho}) - \omega^2 \bar{\rho}, \tag{2}$$

където $\bar{\rho} = \overline{GM}$ е релативният радиус-вектор. Повдигайки (2) в квадрат, получаваме

$$\bar{w}'^2 = (\dot{\bar{\omega}})^2 \rho^2 - (\dot{\bar{\omega}} \cdot \bar{\rho})^2 + 2\,\bar{\omega} \cdot \bar{\rho})\,(\bar{\omega} \times \dot{\bar{\omega}})\,\bar{\rho} - \omega^2\,(\bar{\omega} \cdot \bar{\rho})^2 + \omega^4 \rho^2. \tag{3}$$

Предполагаме, че координатната система, неизменно свързана с тялото, съвпада с главните инерционни оси за G. Тогава от (3) намираме

$$2S' = A\dot{p}^2 + B\dot{q}^2 + (\dot{r}^2 + 2\sum m\,(p\xi + q\eta + r\zeta)\,[\xi\,(q\dot{r} - \dot{q}r)$$

$$+ \eta\,(r\dot{p} - \dot{r}p) + \zeta\,(p\dot{q} - \dot{p}q)] - \omega^2 \sum^{m} (p\xi + q\eta + r\zeta)^2 + \omega^4 \sum m\rho^2,$$

или

$$2S' = A\dot{p}^2 + B\dot{q}^2 + C\dot{r}^2 + 2A_1\,p\,(q\dot{r} - \dot{q}r) + 2B_1\,q\,(r\dot{p} - r\dot{p}) \tag{4}$$

$$+ 2C_1\,r\,(p\dot{q} - \dot{p}q) - \omega^2 p^2 A_1 - \omega^2 q^2 B_1 - \omega^2 r^2 C_1 + \omega^4 (A_1 + B_1 + C_1).$$

Тук A, B, C са главните инерционни моменти на тялото спрямо главните инерционни оси $G\xi$, $G\eta$, $G\zeta$, а A_1, B_1, C_1 са инерционните моменти на тялото спрямо равнините $G\eta\zeta$, $G\xi\zeta$, $G\xi\eta$. Между двата вида инерционни моменти съществуват релациите

$$A=B_1+C_1,\quad B=C_1+A_1,\quad C=A_1+B_1. \tag{5}$$

От (5) следват зависимостите

$$A_1=(B+C-A)/2,\quad B_1=(A+C-B)/2,\quad C_1=(A+B-C)/2. \tag{6}$$

Заместваме (6) в (4) и от (1) получаваме пълната енергия на ускорението

$$\begin{aligned} S=MW_G^2/2&+(A\dot{p}^2+B\dot{q}^2+C\dot{r}^2)/2+(B+C-A)\,(q\dot{r}-\dot{q}r)p/2\\ &+(C+A-B)\,q\,(\dot{r}p-\dot{r}p)/2+(A+B-C)\,r\,(p\dot{q}-\dot{p}q)/2\\ &+\omega^2(q^2+r^2)(B+C-A)/2+\omega^2(r^2+p^2)(C+A-B)/2\\ &+\omega^2(p^2+q^2)(A+B-C)/2. \end{aligned} \tag{7}$$

2. Приложение на уравненията на Апел. Нека q_i са независимите параметри на дадена нехолономна система. Тогава уравненията на Апел са

$$\frac{\partial S}{\partial \ddot{q}_i}=Q_i \quad (i=1,\,2,\,\ldots), \tag{8}$$

където Q_i са обобщените сили, определени от виртуалната работа на действуващите сили.

В разглеждания случай имаме движение на тежко твърдо тяло, което се търкаля без хлъзгане върху неподвижна хоризонтална равнина. Това налага върху параметрите на тялото x_G, y_G, z_G, φ, ψ, θ съответни крайни и диференциални връзки. От това, че тялото се допира до равнината $z=0$, следва релацията [1]

$$z_G=f(\varphi,\ \theta), \tag{9}$$

където функцията f зависи от уравнението на контурната повърхнина на тялото. От условието за търкаляне без хлъзгане следва релацията

$$\bar{v}_P=\bar{v}_G+\bar{\omega}\times\overline{GP}=0, \tag{10}$$

където P е допирната точка на тялото. От (10) параметрите x_G, y_G се изразяват като неинтегруеми диференциални връзки на ойлеровите ъгли.

Следователно независими параметри остават ойлеровите ъгли θ, ψ, φ. За определеност приемаме

$$\theta=q_1,\quad \psi=q_2,\quad \varphi=q_3. \tag{11}$$

Преди да приложим уравненията на Апел, ще определим някои величини. От кинематичните уравнения на Ойлер

$$p=\dot\psi\sin\theta\sin\varphi+\dot\theta\cos\varphi,$$
$$q=\dot\psi\sin\theta\cos\varphi-\dot\theta\sin\varphi,$$
$$r=\dot\psi\cos\theta+\dot\varphi$$

непосредствено получаваме

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial\dot p}{\partial\ddot\theta}=\cos\varphi,\quad \frac{\partial\dot q}{\partial\ddot\theta}=-\sin\varphi,\quad \frac{\partial\dot r}{\partial\ddot\theta}=0,\\
&\frac{\partial\dot p}{\partial\ddot\psi}=\sin\theta\sin\varphi,\quad \frac{\partial\dot q}{\partial\ddot\psi}=\sin\theta\cos\varphi,\quad \frac{\partial\dot r}{\partial\ddot\psi}=\cos\theta,\\
&\frac{\partial\dot p}{\partial\ddot\varphi}=0,\quad \frac{\partial\dot q}{\partial\ddot\varphi}=0,\quad \frac{\partial\dot r}{\partial\ddot\varphi}=1.
\end{aligned} \tag{12}$$

Виртуалната работа на силата тегло има вида

$$\delta\tau=-Mg\,\delta z_G,$$

или съгласно (9)

$$\delta\tau=-Mgf'_\theta\,\delta\theta-Mgf'_\varphi\,\delta\varphi. \tag{13}$$

Оттук намираме за обобщените сили

$$Q_1=-Mgf'_\theta,\quad Q_2=0,\quad Q_3=-Mgf'_\varphi. \tag{14}$$

От (8), (7), (12) и (14) получаваме последователно

$$\begin{aligned}
&\frac{M}{2}\frac{\partial W_G^2}{\partial\ddot\theta}+A\dot p\cos\varphi-B\dot q\sin\varphi+rp\sin\varphi(C-A)\\
&-qr\cos\varphi(B-C)=-Mgf'_\theta,\\
&\frac{M}{2}\frac{\partial W_G^2}{\partial\ddot\psi}+A\dot p\sin\varphi\sin\theta+B\dot q\cos\varphi\sin\theta+C\dot r\cos\theta\\
&-pq\cos\theta(A-B)-rp\cos\varphi\sin\theta(C-A)-qr\sin\varphi(B-C)=0,\\
&\frac{M}{2}\frac{\partial W_G^2}{\partial\ddot\varphi}+C\dot r-(A-B)pq=-Mgf'_\varphi.
\end{aligned} \tag{15}$$

Ще трансформираме уравненията (15) във вид, който да съдържа в себе си динамичните уравнения на Ойлер за движение на твърдо тяло около неподвижна точка. В същност част от третото уравнение на (15)

съвпада с третото уравнение на Ойлер. За да получим изрази, съдържащи първото и второто уравнение на Ойлер, правим следното: умножаваме последователно уравненията (15) с величините $\cos\varphi$, $\sin\varphi/\sin\theta$, $-\sin\varphi\operatorname{cotg}\theta$ и ги събираме; след това умножаваме пак (15) с величините $\sin\varphi$, $\cos\varphi/\sin\theta$, $-\cos\varphi\operatorname{cotg}\theta$ и ги събираме. Така се получават уравненията

$$A\dot{p}-(B-C)qr+\frac{M}{2}\left[\cos\varphi\frac{\partial^2 w_G^2}{\partial\ddot{\theta}}+\frac{\sin\varphi}{\sin\theta}\frac{\partial w_G^2}{\partial\ddot{\psi}}-\sin\varphi\operatorname{cotg}\theta\frac{\partial w_G^2}{\partial\ddot{\varphi}}\right]$$
$$+Mg(f'_\theta\cos\varphi-f'_\varphi\sin\varphi\operatorname{cotg}\theta)=0,$$

$$(16)\qquad B\dot{q}-(C-A)rp+\frac{M}{2}\left[-\sin\varphi\frac{\partial w_G^2}{\partial\ddot{\theta}}+\frac{\cos\varphi}{\sin\theta}\frac{\partial w_G^2}{\partial\ddot{\psi}}\right.$$
$$\left.-\cos\varphi\operatorname{cotg}\theta\frac{\partial w_G^2}{\partial\ddot{\varphi}}\right]-Mg(f'_\theta\sin\varphi+f'_\varphi\cos\varphi\operatorname{cotg}\theta)=0,$$

$$C\dot{r}-(A-B)pq+\frac{M}{2}\frac{\partial w_G^2}{\partial\ddot{\varphi}}+Mgf'_\varphi=0.$$

3. Енергия на ускорението на центъра на тежестта на тялото. За пресмятане на частните производни на величината w_G^2 е необходимо нейното познаване въз основа на диференциалните връзки, произтичащи от (10). Диференцираме уравнението (10) и получаваме

$$\overline{w}_G=-(\dot{\overline{\omega}}\times\overline{GP})-\overline{\omega}\times\dot{\overline{GP}},$$

или след повдигане в квадрат

$$(17)\qquad w_G^2=\dot{\overline{\omega}}^2(\overline{GP})^2-(\dot{\overline{\omega}}\,.\,\overline{GP})^2+2\left[(\overline{\omega}\,.\,\dot{\overline{\omega}})(\overline{GP}\,.\,\dot{\overline{GP}})-(\dot{\overline{\omega}}\,.\,\dot{\overline{GP}})(\overline{\omega}\,.\,\overline{GP})\right]+\ldots,$$

като изпускаме членовете, несъдържащи вторите производни на параметрите θ, ψ, φ. Уравнението (17) в координатна форма добива вида

$$(18)\qquad w_G^2=(\overline{GP})^2(\dot{p}^2+\dot{q}^2+\dot{r}^2)-(\dot{p}\xi_0+\dot{q}\eta_0+\dot{r}\zeta_0)^2$$
$$+\frac{d}{dt}(\overline{GP})^2(p\dot{p}+q\dot{q}+r\dot{r})-2(\overline{\omega}\,.\,\overline{GP})[\dot{p}(\dot{\overline{GP}})_\xi+\dot{q}(\dot{\overline{GP}})_\eta+\dot{r}(\dot{\overline{GP}})_\zeta]+\cdots$$

Тук с ξ_0, η_0, ζ_0 означаваме координатите на допирната точка спрямо централната подвижна система $G\xi\eta\zeta$.

Величината w_G^2 може да се разглежда като сложна функция на величините $\ddot{\theta}$, $\ddot{\psi}$, $\ddot{\varphi}$ посредством променливите $\dot{p}$, $\dot{q}$, $\dot{r}$. Следователно частните производни на w_G^2 може да се запишат в съответствие с (12) във вида

$$\frac{\partial w_G^2}{\partial\ddot{\theta}}=\frac{\partial w_G^2}{\partial\dot{p}}\cos\varphi-\frac{\partial w_G^2}{\partial\dot{q}}\sin\varphi,$$

$$(19)\qquad \frac{\partial w_G^2}{\partial \ddot{\psi}} = \frac{\partial w_G^2}{\partial \dot{p}} \sin\theta \sin\varphi + \frac{\partial w_G^2}{\partial \dot{q}} \sin\theta \cos\varphi + \frac{\partial w_G^2}{\partial \dot{r}} \cos\theta,$$

$$\frac{\partial w_G^2}{\partial \ddot{\varphi}} = \frac{\partial w_G^2}{\partial \dot{r}}.$$

Заместваме (19) в (16) и след несложни пресмятания получаваме

$$(20)\qquad \begin{aligned} &A\dot{p}-(B-C)qr+\frac{M}{2}\frac{\partial w_G^2}{\partial \dot{p}}+Mg(f'_\theta\cos\varphi-f'_\varphi\sin\varphi\operatorname{cotg}\theta)=0,\\ &B\dot{q}-(C-A)rp+\frac{M}{2}\frac{\partial w_G^2}{\partial \dot{q}}-Mg(f'_\theta\sin\varphi+f'_\varphi\cos\varphi\operatorname{cotg}\theta)=0,\\ &C\dot{r}-(A-B)pq+\frac{M}{2}\frac{\partial w_G^2}{\partial \dot{r}}+Mgf'_\varphi=0. \end{aligned}$$

От (18) намираме последователно

$$(21)\qquad \begin{aligned} &\frac{1}{2}\frac{\partial w_G^2}{\partial \dot{p}}=\dot{p}\,(\eta_0^2+\zeta_0^2)-\xi_0\eta_0\,\dot{q}-\xi_0\zeta_0\dot{r}+\frac{1}{2}\frac{d}{dt}(\overline{GP}^2)\,p-(\bar{\omega},\overline{GP})(\dot{\overline{GP}})_\xi,\\ &\frac{1}{2}\frac{\partial w_G^2}{\partial \dot{q}}=\dot{q}\,(\zeta_0^2+\xi_0^2)-\eta_0\zeta_0\dot{r}-\eta_0\xi_0\dot{p}+\frac{1}{2}\frac{d}{dt}(\overline{GP})^2\,q-(\bar{\omega},\overline{GP})(\dot{\overline{GP}})_\eta,\\ &\frac{1}{2}\frac{\partial w_G^2}{\partial \dot{r}}=\dot{r}(\xi_0^2+\eta_0^2)-\zeta_0\xi_0\dot{p}-\zeta_0\eta_0\dot{q}+\frac{1}{2}\frac{d}{dt}(\overline{GP})^2\,r-(\bar{\omega}\,.\,\overline{GP})(\dot{\overline{GP}})_\zeta. \end{aligned}$$

Заместваме (21) в (20) и получаваме системата диференциални уравнения за търкаляне без хлъзгане на тежко твърдо тяло върху неподвижна хоризонтална равнина

$$(22)\qquad \begin{aligned} &A\dot{p}-(B-C)\,qr+M\dot{p}\,(\eta_0^2+\zeta_0^2)-M\,\xi_0\eta_0\dot{q}-M\xi_0\zeta_0\dot{r}+\frac{M}{2}\frac{d}{dt}(\overline{GP})^2\,p\\ &\qquad -M(\bar{\omega}\,.\,\overline{GP})(\dot{\overline{GP}})_\xi+Mg\,(f'_\theta\cos\varphi-f'_\varphi\cos\varphi\operatorname{cotg}\theta)=0,\\ &B\dot{q}-(C-A)rp+M\dot{q}\,(\zeta_0^2+\xi_0^2)-M\,\eta_0\zeta_0\,\dot{r}-M\,\eta_0\xi_0\,\dot{p}+\frac{M}{2}\frac{d}{dt}(\overline{GP})_q^2\\ &\qquad -M(\bar{\omega}\,.\,\overline{GP})(\dot{\overline{GP}})_\eta-Mg\,(f'_\theta\sin\varphi+f'_\varphi\cos\varphi\operatorname{cotg}\theta)=0,\\ &C\dot{r}-(A-B)pq+M\dot{r}\,(\xi_0^2+\eta_0^2)-M\,\zeta_0\xi_0\dot{p}-M\,\zeta_0\eta_0\dot{q}\\ &\qquad +\frac{M}{2}\frac{d}{dt}(\overline{GP})^2r-M(\bar{\omega}\,.\,\overline{CP})(\dot{\overline{GP}})_\zeta+Mgf'_\varphi=0. \end{aligned}$$

Накрая ще отбележим, че същите уравнения се получават чрез новите уравнения на Ценов, където вместо енергията на ускорението S стои величината $\ddot{T}$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Диамандиев, В.: Приложение на уравненията на Ценов върху една задача от движението на твърдите тела. Год. Соф. унив., Физ-мат. фак., 53 (1959/60), 115—124.
2. Долапчиев, Бл.: Аналитична механика. С., 1966.

Постъпила на 28. I. 1977 г.

AN APPLICATION OF APPELL EQUATIONS ON A NON-HOLONOMIC SYSTEM

V. Diamandiev

(SUMMARY)

In the paper the equation of motion of a heavy rigid body rolling without sliding on a fixed plane is considered. As a basis the Appell equations for non-holonomic systems are taken. For that purpose the energy of acceleration, which is a function of the components of the rotation vector and its derivatives, is found. As parameters of the system the coordinates of the center of gravity of the body and the Euler angles of the central axes of inertia are taken. The plane being tangent to the body and the velocity of the contact point being zero the coordinates of the center of gravity x_G, y_G, z_G prove to be functions of the remaining parameters. The quantities $\dot{x}_G$, $\dot{y}_G$ are then linear non-integrable relations of the velocities $\dot{\theta}$, $\dot{\psi}$, $\dot{\varphi}$, and z_G is a finite (geometric) relation of the angles φ, θ. Then the Appell equations for the energy of acceleration and the generalized forces with respect to the parameters θ, φ, ψ are found. These are not symmetric but after some transformations they get another form, such that each one of them is derived from the others by cyclic change. The equations now contain only the components p, q, r of the rotation vector and their derivatives, and the moments of the force of gravity with respect to the contact point.