ISSN 0205—0808

Том 75, Tome 75 1981

ГОДИШНИК

НА

СОФИЙСКИЯ УНИВЕРСИТЕТ „КЛИМЕНТ ОХРИДСКИ“

ФАКУЛТЕТ ПО МАТЕМАТИКА И МЕХАНИКА

КНИГА 1— МАТЕМАТИКА

ANNUAIRE

DE

L'UNIVERSITÉ DE SOFIA „KLIMENT OHRIDSKI“

FACULTÉ DE MATHÉMATIQUES ET MÉCANIQUE

LIVRE 1 — MATHÉMATIQUES

СОФИЯ. 1984. SOFIA

ИЗДАТЕЛСТВО НА БЪЛГАРСКАТА АКАДЕМИЯ НА НАУКИТЕ

ÉDITIONS DE L'ACADÉMIE BULGARE DES SCIENCES

51+531/534(05)

Редактор *Е. Михайлова* Техн. ред. *Т. Нинова* Коректор *А. Дончева*

Дадена за набор на 28. XI. 1983 г. Подписана за печат на 15. X. 1984 г. Изд. индекс 8985
Печ. коли 7,75 Изд. коли 10,04 УИК 8,51

Тираж 500 Цена 1,40 лв. Код 28 $\frac{9532222311}{2204\text{-}8\text{-}84}$

Печатница при Софийския университет „Кл. Охридски" Пор. № 48

ГОДИШНИК НА СОФИЙСКИЯ УНИВЕРСИТЕТ „КЛИМЕНТ ОХРИДСКИ"
ФАКУЛТЕТ ПО МАТЕМАТИКА И МЕХАНИКА
Том 75 Книга 1 — Математика 1981
ANNUAIRE DE L'UNIVERSITÉ DE SOFIA „KLIMENT OHRIDSKI"
FACULTÉ DE MATHÉMATIQUES ET MÉCANIQUE
Tome 75 Livre 1 — Mathématiques 1981

О НЕКОТОРЫХ МОДИФИКАЦИЯХ МЕТОДА ДЖ. ДВОРЧУКА ДЛЯ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ АЛГЕБРАИЧЕСКОГО МНОГОЧЛЕНА В ВИДЕ ПРОИЗВЕДЕНИЯ КВАДРАТИЧНЫХ МНОЖИТЕЛЕЙ

Николай Кюркчиев

Николай Кюркчиев. **О некоторых модификациях метода Дж. Дворчука для представления алгебраического многочлена в виде произведения квадратичных множителей.**

Рассматривается проблема о представлении алгебраического многочлена $f(x)$ степени $n=2m$ в виде произведения множителей $x^2+p_j x+q_j$, $j=1, 2,\dots, m$. При определенных предположениях об $f(x)$ и начальных значениях $p_i^{(0)}$, $q^{(0)}$, $i=1, 2,\dots, m$, найдены последовательности $\{p_i^{(k)}\}$, $\{q_i^{(k)}\}$, $k=0, 1,\dots$, которые являются сходящими.

Nikolai Kiurkchiev. **Some modifications of Dvorcuk's Method for Factorization of a Polynomial into Quadratič Factors.**

The problem of factorization of a polynomial $f(x)$ of degree $n=2m$ into factors of the form $x^2+p_jx+q_j$, $j=1, 2,\dots, m$, is considered. Under some assumptions on $f(x)$ and on the initial values $p_i^{(0)}$, $q_i^{(0)}$, $i=1, 2,\dots, m$, the sequences $\{p_i^{(k)}\}$, $\{q_i^{(k)}\}$, $k=0, 1,\dots,$ are constructed and their convergence is proved.

Пусть $f(x)$ — алгебраический многочлен с действительными коэффициентами вида $f(x)=x^n+a_1x^{n-1}+\dots+a_n$.

Предположим, что все нули $\{x_i\}_1^n$ $f(x)$ являются простыми. Будем искать представление многочлена $f(x)$ в виде произведения действительных квадратичных множителей:

$$f(x)=\prod_{j=1}^{m}(x^2+p_jx+q_j); \quad n=2m.$$

Обозначим через $\lambda_i^{(0)}$, $\lambda_{i+m}^{(0)}$ корни многочлена $x^2+p_i^{(0)}x+q_i^{(0)}$, $i=1, 2,\ldots, m$, а через $\lambda_i^{(k)}$, $\lambda_{i+m}^{(k)}$ — корни многочлена $x^2+p_i^{(k)}x+q_i^{(k)}$, $i=1,\ldots, m$.

Используя метод Дочева [1] для одновременного приближенного вычисления всех различных корней уравнения $f(x)=0$, Dvorčuc [2, 3] предложил следующий процесс для нахождения последовательных приближений $p_i^{(k)}$, $q_i^{(k)}$:

$$p_i^{(k+1)}=p_i^{(k)}+f(\lambda_i^{(k)})/\prod_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n}(\lambda_i^{(k)}-\lambda_j^{(k)})+f(\lambda_{i+m}^{(k)})/\prod_{\substack{j=1\\ j\neq i+m}}^{n}(\lambda_{i+m}^{(k)}-\lambda_j^{(k)}),$$

(1)

$$q_i^{(k+1)}=q_i^{(k)}-\lambda_{i+m}^{(k)}f(\lambda_i^{(k)})/\prod_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n}(\lambda_i^{(k)}-\lambda_j^{(k)})-\lambda_i^{(k)}f(\lambda_{i+m}^{(k)})/\prod_{\substack{j=1\\ j\neq i+m}}^{n}(\lambda_{i+m}^{(k}-\lambda_j^{(k)}),$$

$$i=1, 2,\ldots, m,\quad k=0, 1,\ldots$$

Он показал, что если выполнено неравенство

$$|\lambda_i^{(0)}-x_i|\leqq d\,(1-(1+q)^{1/(n-1)})/(1-2(1+q)^{1/(n-1)}),$$

где $d=\min\limits_{i\neq j}|x_i-x_j|$ и $0<q<(8{,}2^{1/(n-1)}-7)^{-1}$, то можно ожидать квадратичную скорость сходимости последовательностей $\{p_i^{(k)}\}_{k=0}^{\infty}$, $\{q_i^{(k)}\}_{k=0}^{\infty}$, $i=1, 2, \ldots, m$, полученных по правилам (1).

Можно продолжить исследования Дворчука следующим образом. Пусть задан процесс

$$p_i^{(k+1)}=p_i^{(k)}+f(\lambda_i^{(k)})/b_i^{(k)}+f(\lambda_{i+m}^{(k)})/b_{i+m}^{(k)},$$

(2)

$$q_i^{(k+1)}=q_i^{(k)}-\lambda_{i+m}^{(k)}f(\lambda_i^{(k)})/b_i^{(k)}-\lambda_i^{(k)}f(\lambda_{i+m}^{(k)})/b_{i+m}^{(k)},$$

$$i=1,\ldots, m,\quad k=0, 1,\ldots,$$

где

$$b_l^{(k)}=\prod_{\substack{j=1\\ j\neq l}}^{n}(\lambda_l^{(k)}-\lambda_j^{(k)})+\sum_{\substack{j=1\\ j\neq l}}^{n}\frac{f(\lambda_j^{(k)})}{\lambda_j^{(k)}-\lambda_l^{(k)}}\prod_{\substack{s=1\\ s\neq j\\ s\neq l}}^{n}\frac{\lambda_l^{(k)}-\lambda_s^{(k)}}{\lambda_j^{(k)}-\lambda_s^{(k)}},\qquad l=i,\ i+m.$$

Справедлива следующая

Теорема 1. Пусть $0<q<1$, $d=\min\limits_{i\neq j}|x_i-x_j|>0$ и $c>0$ такое, что выполнено

(3) $$0<\sqrt{2}\,cen/(d-2c)<1.$$

Тогда, если выполнено неравенство $|\lambda_i^{(0)}-x_i|\leqq cq$, то процесс для нахождения последовательных приближений $p_i^{(k)}$, $q_i^{(k)}$, полученных по правилам (2), обладает кубической скоростью сходимости.

Докажем утверждение теоремы только для последовательности $\{p_i^{(k)}\}_1^m$.

При помощи простых преобразоваиий для разности $p_i^{(k+1)}-p_i$ получаем

$$p_i^{(k+1)}-p_i=-(\lambda_i^{(k)}-x_i)\frac{1-\prod\limits_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{n}\frac{\lambda_i^{(k)}-x_j}{\lambda_i^{(k)}-\lambda_j^{(k)}}+\sum\limits_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{n}\frac{\lambda_j^{(k)}-x_j}{\lambda_i^{(k)}-\lambda_j^{(k)}}\prod\limits_{\substack{s=1\\s\neq j}}^{n}\frac{\lambda_j^{(k)}-x_s}{\lambda_j^{(k)}-\lambda_s^{(k)}}}{1+\sum\limits_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{n}\frac{\lambda_j^{(k)}-x_j}{\lambda_i^{(k)}-\lambda_j^{(k)}}\prod\limits_{\substack{s=1\\s\neq j}}^{n}\frac{\lambda_j^{(k)}-x_s}{\lambda_j^{(k)}-\lambda_s^{(k)}}}$$

$$-(\lambda_{i+m}^{(k)}-x_{i+m})\frac{1-\prod\limits_{\substack{j=1\\j\neq i+m}}^{n}\frac{\lambda_{i+m}^{(k)}-x_j}{\lambda_{i+m}^{(k)}-\lambda_j^{(k)}}+\sum\limits_{\substack{j=1\\j\neq i+m}}^{n}\frac{\lambda_j^{(k)}-x_j}{\lambda_{i+m}^{(k)}-\lambda_j^{(k)}}\prod\limits_{\substack{s=1\\s\neq j}}^{n}\frac{\lambda_j^{(k)}-x_s}{\lambda_j^{(k)}-\lambda_s^{(k)}}}{1+\sum\limits_{\substack{j=1\\j\neq i+m}}^{n}\frac{\lambda_j^{(k)}-x_j}{\lambda_{i+m}^{(k)}-\lambda_j^{(k)}}\prod\limits_{\substack{s=1\\s\neq j}}^{n}\frac{\lambda_j^{(k)}-x_s}{\lambda_j^{(k)}-\lambda_s^{(k)}}}.$$

Далее из равенства

$$\prod_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{n}\frac{\lambda_i^{(k)}-x_j}{\lambda_i^{(k)}-\lambda_j^{(k)}}-1=\sum_{\substack{s=1\\s\neq i}}^{n}\frac{\lambda_s^{(k)}-x_s}{\lambda_i^{(k)}-\lambda_s^{(k)}}\prod_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{s-1}\frac{\lambda_i^{(k)}-x_j}{\lambda_i^{(k)}-\lambda_j^{(k)}},\quad \prod_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{0}\frac{\lambda_i^{(k)}-x_j}{\lambda_i^{(k)}-\lambda_j^{(k)}}=1,$$

$$1-\prod_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{n}\frac{\lambda_i^{(k)}-x_j}{\lambda_i^{(k)}-\lambda_j^{(k)}}+\sum_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{n}\frac{\lambda_j^{(k)}-x_j}{\lambda_i^{(k)}-\lambda_j^{(k)}}\prod_{\substack{s=1\\s\neq j}}^{n}\frac{\lambda_j^{(k)}-x_s}{\lambda_j^{(k)}-\lambda_s^{(k)}}$$

$$=\sum_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{n}\frac{\lambda_j^{(k)}-x_j}{\lambda_i^{(k)}-\lambda_j^{(k)}}\sum_{\substack{l=1\\l\neq j}}^{n}\frac{\lambda_l^{(k)}-x_l}{\lambda_j^{(k)}-\lambda_l^{(k)}}\prod_{\substack{s=1\\s\neq j}}^{l-1}\frac{\lambda_j^{(k)}-x_s}{\lambda_j^{(k)}-\lambda_s^{(k)}}$$

$$-\sum_{\substack{j=2\\j\neq i}}^{n}\frac{\lambda_i^{(k)}-x_j}{\lambda_i^{(k)}-\lambda_j^{(k)}}\sum_{\substack{l=1\\l\neq i}}^{j-1}\frac{\lambda_l^{(k)}-x_l}{\lambda_i^{(k)}-\lambda_l^{(k)}}\prod_{\substack{s=1\\s\neq i}}^{l-2}\frac{\lambda_i^{(k)}-x_s}{\lambda_i^{(k)}-\lambda_s^{(k)}},$$

имея в виду ограничение (3), завершается индуктивное доказательство об оценке скорости сходимости. Отметим, что более общие методы получения таких оценок имеются в [4, 5].

Выводим еще одну итерационную формулу, являющуюся модификацией метода Дворчука. Возможно получение скорости сходимости выше, чем кубическая. Пусть задан процесс

$$\begin{aligned} p_i^{(k+1)}&=p_i^{(k)}+f(\lambda_i^{(k)})/c_i^{(k)}+f(\lambda_{i+m}^{(k)})/c_{i+m}^{(k)},\\ q_i^{(k+1)}&=q_i^{(k)}-\lambda_{i+m}^{(k)}f(\lambda_i^{(k)})/c_i^{(k)}-\lambda_i^{(k)}f(\lambda_{i+m}^{(k)})/c_{i+m}^{(k)},\end{aligned}\tag{4}$$

$$i=1, 2,\ldots, m,\quad k=0, 1,\ldots,$$

где

$$c_l^{(k)}=f'(\lambda_l^{(k)})-f(\lambda_l^{(k)})\sum_{\substack{j=1\\ j\neq l}}^{n}\frac{1}{\lambda_l^{(k)}-\lambda_j^{(k)}}$$

$$-f(\lambda_l^{(k)})\sum_{\substack{j=1\\ j\neq l}}^{n}\frac{f(\lambda_j^{(k)})}{(\lambda_l^{(k)}-\lambda_j^{(k)})^3}\prod_{\substack{s=1\\ s\neq j\\ s\neq l}}^{n}\frac{1}{\lambda_j^{(k)}-\lambda_s^{(k)}},\qquad l=i,\ i+m.$$

Имеет место следующая

Теорема 2. Пусть $0<q<1$, $d=\min\limits_{i\neq j}|x_i-x_j|$ и c такое, что

$$n^2e^{4/3}c^2/(d-2c)^2<1.$$

Тогда, если выполнено $|\lambda_i^{(0)}-x_i|\leq cq$, то процесс (4) имеет порядок $\tau=4$

В табл. 1 приведены вычислительные эксперименты, проведенные по схемам (2) и (4) для примера $f(x)=x^4-26x^3+131x^2-226x+120$.

Таблица 1

k	j	$p_j^{(k)}$ по схеме (2)	$q_j^{(k)}$ по схеме (2)
0	1	— 5,1	5,9
	2	—21,1	19,9
1	1	— 5,003802473	6,068681065
	2	—21,00001847	20,00162722
		$p_j^{(k)}$ по схеме (4)	$q_j^{(k)}$ по схеме (4)
0	1	— 5,1	5,9
	2	—21,1	19,9
1	1	— 5,000932631	6,070857916
	2	—20,99999797	20,00111562

Подчеркнем, что можно получить и другие модифицированные методы с большой скоростью сходимости. Анализ таких методов трудоемок, и в силу более сложной реализации эти модификации были отвергнуты в дальнейших экспериментах.

ЛИТЕРАТУРА

1. Дочев К. Видоизменен метод на Нютон за едновременно приблизително пресмятане на всички корени на дадено алгебрично уравнение. — Физ.-мат. сп., 5, 1962, № 2, 136 — 139.
2. Dvorčuk J. Factorization of a polynomial into quadratic factors by Newton method. — Aplikace matematiky, 14, 1969, 54 — 80.

3. D v o r č u c J. Newton method for simultaneous finding of all zeros of a polynomial. — In: Sbornik Vyzkumnych praci, Ustav Vypoctove Techniky ČSAV a ČVUT, 1967, 41 — 64.
4. К ю р к ч и е в Н., Т а ш е в С. Один метод одновременного приближенного вычисления всех корней алгебраического уравнения. Докл. БАН, 34, 1981, № 8.
5. Т а ш е в С., К ю р к ч и е в Н. О некоторых модификациях метода Ньютона для приближенного решения алгебраических уравнений. — Сердика, 7, 1981.

Поступила 10. 11. 1981.

SOME MODIFICATIONS OF DVORČUK'S METHOD FOR FACTORIZATION OF A POLYNOMIAL INTO QUADRATIC FACTORS

N. Kiurkchiev

(SUMMARY)

Let the polynomial $f(x)=x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_n$ have n simple roots $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Denote $d=\min_{i\neq j}|x_i-x_j|$. Let the approximations $p_i^{(0)}$, $q_i^{(0)}$, $i=1, 2, \ldots, m$, of the coefficients in the factorization

$$f(x)=\prod_{j=1}^{m}(x^2+p_jx+q_j),\quad n=2m$$

be such that the roots $\lambda_1^{(0)}, \ldots, \lambda_n^{(0)}$ of the polynomials $x^2+p_i^{(0)}x+q_i^{(0)}$, $i=1, 2, \ldots, m$, satisfy the unequalities

$$|\lambda_i^{(0)}-x_i|\leq cq,$$

where $0<q<1$, $0<\sqrt{2}\, cen/(d-2c)<1$.

Then the sequences $\{p_i^{(k)}\}_{k=0}^{\infty}$, $\{q_i^{(k)}\}_{k=0}^{\infty}$, $i=1, 2, \ldots, m$, determined by (2) are cubically convergent. A generalized method is given which possesses higher order of convergence than cubical. In particular an iteration method with order of convergence $\tau=4$ is proposed.

ГОДИШНИК НА СОФИЙСКИЯ УНИВЕРСИТЕТ „КЛИМЕНТ ОХРИДСКИ"
ФАКУЛТЕТ ПО МАТЕМАТИКА И МЕХАНИКА
Том 75 Книга 1 — Математика 1981
ANNUAIRE DE L'UNIVERSITÉ DE SOFIA „KLIMENT OHRIDSKI"
FACULTÉ DE MATHÉMATIQUES ET MÉCANIQUE
Tome 75 Livre 1 — Mathématiques 1981

ВЪРХУ КИНЕМАТИЧНАТА ГЪСТОТА НА БИПЛАНАРНАТА ГРУПА

Адриян В. Борисов

А д р и я н В. Б о р и с о в. **О кинематической плотности бипланарной группы.**

Бипланарное пространство $B_n^{p,q}$ является пространством Клейна с фундаментальным пространством P_n и фундаментальной группой G_L, состоящей из тех коллинеаций в P_n, которые сохраняют две скрещивающиеся вещественные плоскости J_p и K_q (dim $J_p=p$, dim $K_q=q$, $p+q=n-1$). Изучаются системы Σ из $h+s+1$ линейно зависимых точек, каждые $h+s$ из которых линейно независимы $0<h\leqq p+1$, $0<s\leqq q+1$), и, кроме того, h точки принадлежат плоскости J_p, а s—плоскости K_q. Доказано, что системы Σ обладают G_L-инвариантной плотностью тогда и только тогда, когда $h=p+1$ и $s=q+1$. Эта плотность является кинематической плотностью dG_L группы G_L. Получены два координатных выражения для dG_L.

A d r i j a n V. B o r i s o v. **On the Kinematic Density of the Biplanar Group.**

The fundamental group G_L of the Klein biplanar space consists of all collineations of P_n which preserve two real skew planes J_p and K_q (dim $J_p=p$, dim $K_q=q$, $p+q=n-1$). We treat systems Σ of $h+s+1$ linearly dependent points, such that every $h+s$ points of Σ are linearly independent and, in addition, h points belong to J_p and s to K_q, $0<h\leqq p+1$, $0<s\leqq q+1$. It is shown that the systems Σ have a G_L-invariant density if and only if $h=p+1$ and $s=q+1$. This density is the kinematic density dG_L for G_L. Two coordinate expressions for dG_L are obtained.

В настоящата работа продължаваме започнатите в [1] изследвания върху интегралната геометрия на системи от точки в бипланарно пространство. В първата част привеждаме накратко някои сведения, необходими при по-нататъшните разглеждания. Във втората част в духа на работата на Сантало [5] получаваме необходими и достатъчни условия за съществуване на бипланарна гъстота на системи от $h+s+1$ линейно зависими точки, всеки $h+s$ от които са линейно независими. Използуваме намерената гъстота за геометрична характеристика на кинематичната гъстота на бипланарната група. В третата част, като имаме предвид [4], изразяваме кинематичната гъстота чрез координатите на разглежданите точки. Ще отбележим, че навсякъде по-нататък разглеждаме само реални геометрични обекти.

1. Нека P_n е n-мерно реално проективно пространство, а J_p и K_q — две фиксирани кръстосани линейни подпространства с размерности съответно p и q, такива, че $p+q=n-1$. Бипланарното пространство $B_n^{p,q}$ е онова клайново пространство, чието основно пространство е P_n, а основната група G_L се състои от онези елементи на проективната група в P_n, относно които J_p и K_q са инвариантни. Групата G_L зависи от $L=p^2+q^2+2(p+q)+1$ независими параметра.

Ще използуваме семейство от бипланарни репери $R_L=(A_1\dots A_{p+1}\ B_1\dots B_{q+1})$ със следното естествено свойство: върховете $A_1,\dots, A_{p+1}$ лежат в J_p, а върховете $B_1,\dots, B_{q+1}$ — в K_q. Относно такъв репер произволен елемент на G_L може да се представи във вида

$$x_i'=\sum_{j=1}^{p+1} a_{ij}\, x_j,\quad i=1,\dots, p+1,$$

$$y_u'=\sum_{v=1}^{q+1} b_{uv}\, y_v,\quad u=1,\dots, q+1,$$

като $A=\det(a_{ij})\neq 0$, $B=\det(b_{uv})\neq 0$. Ще предполагаме, че

$$AB=1. \tag{1}$$

Нека аналитичните точки A_i, B_u имат хомогенни координати съответно

$$\begin{aligned} &A_i(a_{1i},\dots, a_{p+1,i},\ 0,\dots, 0),\\ &B_u(0,\dots, 0,\ b_{1u},\dots, b_{q+1,u}), \end{aligned} \tag{2}$$

а инфинитезималните преобразования на R_L имат вида

$$dA_i=\sum_{j=1}^{p+1} \omega_i^j A_j,\quad i=1,\dots,\ p+1,$$

$$dB_u=\sum_{v=1}^{q+1} \psi_u^v B_v,\quad u=1,\dots,\ q+1.$$

Тук

$$\begin{aligned} &\omega_i^j=\frac{1}{A}\,| A_1\dots A_{j-1} dA_i A_{j+1}\dots A_{p+1}|,\\ &\psi_u^v=\frac{1}{B}\,| B_1\dots B_{v-1} dB_u B_{v+1}\dots B_{q+1}| \end{aligned} \tag{3}$$

са линейни диференциални форми, които удовлетворяват структурните уравнения

$$D\omega_i^j = \sum_{k=1}^{p+1} \omega_i^k \wedge \omega_k^j, \quad i, j = 1, \ldots, p+1,$$

$$D\psi_u^v = \sum_{w=1}^{q+1} \psi_u^w \wedge \psi_w^v, \quad u, v = 1, \ldots, q+1$$

и единствената зависимост

$$\sum_{i=1}^{p+1} \omega_i^i + \sum_{u=1}^{q+1} \psi_u^u = 0, \tag{4}$$

която се получава като следствие от несъщественото ограничение (1). От (2) и (3) непосредствено получаваме

$$\begin{aligned} \omega_i^j &= \frac{1}{A} \sum_{k=1}^{p+1} A_{kj}\, da_{ki}, \\ \psi_u^v &= \frac{1}{B} \sum_{w=1}^{q+1} B_{wv}\, db_{wu}, \end{aligned} \tag{5}$$

където A_{kj} и B_{wv} са адюнгираните количества съответно на елементите a_{kj} и b_{wv} в матриците (a_{ij}) и (b_{uv}).

2. Да разгледаме множеството, елементите на което са системи Σ от $h+s+1$ линейно зависими точки, всеки $h+s$ от които са линейно независими. Освен това нека всяка система Σ съдържа h точки от J_p и s точки от K_q, като $0<h\leqq p+1$, $0<s\leqq q+1$. В качеството на произволна такава система да изберем системата, която се състои от точките $A_1, \ldots, A_h$, $B_1, \ldots, B_s$, $E_0 = A_1 + \ldots + A_h + B_1 + \ldots + B_s$. Напълно интегруемата пфафова система, определяща стационарната подгрупа на избраната система, има вида

$$\begin{gathered} \omega_\alpha^j = 0, \quad \psi_\lambda^v = 0, \\ \sum_{\beta=1}^{h} \omega_\beta^\alpha - \sum_{\lambda=1}^{s} \psi_\lambda^s = 0, \quad \sum_{\lambda=1}^{s} (\psi_\lambda^\mu - \psi_\lambda^s) = 0, \\ \alpha = 1, \ldots, h, \quad j = 1, \ldots, p+1, \quad j \neq \alpha, \\ \lambda = 1, \ldots, s, \quad v = 1, \ldots, q+1, \quad v \neq \lambda, \\ \mu = 1, \ldots, s-1. \end{gathered} \tag{6}$$

Нека

$$d\Sigma = \bigwedge_{\alpha=1}^{h} \bigwedge_{j=1,\, j\neq\alpha}^{p+1} \omega_\alpha^j \wedge \bigwedge_{\lambda=1}^{s} \bigwedge_{v=1,\, v\neq\lambda}^{q+1} \psi_\lambda^v \tag{7}$$

$$\wedge \bigwedge_{\alpha=1}^{h} \left(\sum_{\beta=1}^{h} \omega_\beta^\alpha - \sum_{\lambda=1}^{s} \psi_\lambda^s \right) \wedge \bigwedge_{\mu=1}^{s-1} \sum_{\lambda=1}^{s} (\psi_\lambda^\mu - \psi_\lambda^s)$$

е външното произведение на всички леви страни на уравненията на системата (6). Съгласно с известния критерий на Chern [3] системите Σ притежават бипланарна гъстота (т. е. гъстота, инвариантна относно бипланарната група G_L), която се изразява с диференциалната форма (7) тогава и само тогава, когато $D(d\Sigma)=0$. Но

$$D(d\Sigma)=\left[(p+1)\sum_{a=1}^{h}{}' \omega_a^a+h\sum_{u=1}^{q+1}{}' \psi_u^u+s\sum_{i=1}^{p+1}\omega_i{}^i+(q+1)\sum_{\lambda=1}^{s}{}' \psi_\lambda^\lambda\right]\wedge d\Sigma,$$

от което следва, че условието $D(d\Sigma)=0$ е еквивалентно с равенството

$$(8)\qquad (p+1)\sum_{a=1}^{h}{}' \omega_a^a+h\sum_{u=1}^{q+1}{}' \psi_u^u+s\sum_{i=1}^{p+1}{}' \omega_i{}^i+(q+1)\sum_{\lambda=1}^{s}{}' \psi_\lambda^\lambda=0.$$

От друга страна, между диференциалните форми с един и същ горен и долен индекс е в сила само единствената зависимост (4). Следователно равенството (8) ще бъде удовлетворено точно тогава, когато за числата h и s имаме едновременно

$$h=p+1,\quad s=q+1.$$

С това доказахме следната

Теорема 1. Системите Σ притежават инвариантна относно бипланарната група гъстота (7) тогава и само тогава, когато $h=p+1$ и $s=q+1$.

Ако $h=p+1$, $s=q+1$, бипланарната група G_L е просто транзитивна за множеството на системите Σ. Следователно съгласно [2, с. 113] диференциалната L-форма

$$dG_L=\bigwedge_{i=1}^{p+1}\ \bigwedge_{j=1,\, j\neq i}^{p+1}\omega_i{}^j\wedge\bigwedge_{u=1}^{q+1}\ \bigwedge_{v=1,\, v\neq u}^{q+1}\psi_n^v$$

$$\wedge\bigwedge_{j=1}^{p+1}\left(\sum_{i=1}^{p+1}{}' \omega_i{}^j-\sum_{u=1}^{q+1}{}' \psi_u^{q+1}\right)\wedge\bigwedge_{v=1}^{q}\ \sum_{u=1}^{q+1}{}' (\psi_u^v-\psi_u^{q+1})$$

определя кинематичната гъстота на бипланарната група. С точност до постоянен множител тя е равна на външното произведение на всички относителни компоненти ω_i^j, ω_u^v с изключение на ψ_{q+1}^{q+1}.

3. Ще намерим ефективни геометрични изрази за кинематичната гъстота dG_L. За тази цел оттук нататък предполагаме, че $h=p+1$, $s=q+1$, и ще разглеждаме само онези системи Σ, за които

$$a_{p+1,\,i}\neq 0,\quad i=1,\dots,p+1,\quad b_{q+1,\,u}\neq 0,\quad u=1,\dots,q+1,\quad \sum_{u=1}^{q+1}{}' b_{q+1,\,u}\neq 0.$$

Тогава можем да положим

$$(9)\qquad X_i^j=a_{ji}/a_{p+1,\,i},\quad i,\ j=1,\dots,p+1,$$

$$(10)\qquad Y_u^v=b_{vu}/b_{q+1,\,u},\quad u,\ v=1,\dots,q+1,$$

$$(11)\qquad X_0^i=\sum_{j=1}^{p+1}a_{ij}\Big/\sum_{u=1}^{q+1}b_{q+1,\,u},$$

$$(12)\qquad Y_0^u=\sum_{v=1}^{q+1} b_{uv} \Big/ \sum_{u=1}^{q+1} b_{q+1,\,u}\,.$$

От (9) — (12) следва, че точките от разглежданата система Σ имат съответно координати

$$A_i(X_i^1,\ldots,\ X_i^p,\ 1,\ 0,\ldots,\ 0),\quad i=1,\ldots,\ p+1,$$

$$B_u(0,\ldots,\ 0,\ Y_u^1,\ldots,\ Y_u^q,\ 1),\quad u=1,\ldots,\ q+1,$$

$$E_0(X_0^1,\ldots,\ X_0^{p+1},\ Y_0^1,\ldots,\ Y_0^q,\ 1).$$

Като вземем предвид (9), от (5) последователно получаваме

$$\omega_i^j=\frac{1}{A}\sum_{k=1}^{p+1} A_{kj}d\,(a_{p+1,\,i}\,X_i^k)$$

$$=\frac{1}{A}\,d\,a_{p+1,\,i}\sum_{k=1}^{p+1} A_{kj}X_i^k+\frac{1}{A}\sum_{k=1}^{p} A_{kj}a_{p+1,i}\,dX_i^k$$

$$=\frac{1}{A}\,da_{p+1,\,i}\sum_{k=1}^{p+1} A_{kj}\,\frac{a_{ki}}{a_{p+1,\,i}}+\frac{1}{A}\,a_{p+1,\,i}\sum_{k=1}^{p} A_{kj}dX_i^k$$

$$=\frac{da_{p+1,\,i}}{a_{p+1,\,i}}\,\delta_{ji}+\frac{1}{A}\,a_{p+1,\,i}\sum_{k=1}^{p} A_{kj}dX_i^k,$$

където δ_{ji} е познатият символ на Кронекер. Аналогично от (5) и (10) намираме представянето

$$\psi_u^v=\frac{db_{q+1,\,u}}{b_{q+1,\,u}}\,\delta_{vu}+\frac{1}{B}\,b_{q+1,\,u}\sum_{w=1}^{q} B_{wv}\,dY_u^w\,.$$

Тогава

$$\bigwedge_{j=1,\,j\neq i}^{p+1}\omega_i^j=\left(\frac{a_{p+1,\,i}}{A}\right)^p\bigwedge_{j=1,\,j\neq i}^{p+1}\sum_{k=1}^{p} A_{kj}dX_i^k=A_{p+1,\,i}^*\bigwedge_{j=1}^{p} dX_i^j\,,$$

където с $A_{p+1,i}^*$ сме означили допълнителния минор на елемента $A_{p+1,\,i}$ в матрицата (A_{ij}). Но $A_{p+1,i}^*=(-1)^{p+i+1}a_{p+1,i}\,A^{p-1}$,
откъдето следва, че

$$\bigwedge_{j=1,\,j\neq i}^{p+1}\omega_i^j=\frac{(-1)^{p+i+1}}{A}\,(a_{p+1,\,i})^{p+1}\bigwedge_{j=1}^{p} dX_i^j\,.$$

Следователно

$$(13)\qquad \bigwedge_{i=1}^{p+1}\bigwedge_{j=1,\,j\neq i}^{p+1}\omega_i^j=\frac{(-1)^{(3p+4)(p+1)/2}}{A^{p+1}}\prod_{i=1}^{p+1}(a_{p+1,\,i})^{p+1}\bigwedge_{i=1}^{p+1} dP_i\,,$$

като сме положили $dP_i=\bigwedge_{j=1}^{p} dX_i^j$.

След аналогични пресмятания получаваме

$$\bigwedge_{u=1}^{q+1} \bigwedge_{v=1,\, v\neq u}^{q+1} \psi_u^v = \frac{(-1)^{(3q+4)(q+1)/2}}{B^{q+1}} \prod_{u=1}^{q+1} (b_{q+1,\,u})^{q+1} \bigwedge_{u=1}^{q+1} dQ_u, \tag{14}$$

където $dQ_u = \bigwedge_{v=1}^{q} dY_u^v$.

Координатите на точката E_0 ще представим като линейни комбинации на съответните координати на точките $A_1, \ldots, B_{q+1}$, т. е.

$$X_0^k = \sum_{i=1}^{p+1} \lambda_i X_i^k, \quad k=1, \ldots, \ p+1,$$

$$Y_0^w = \sum_{u=1}^{q+1} \mu_u Y_u^w, \quad w=1, \ldots, \ q+1,$$

като при това $\sum_{u=1}^{q+1} \mu_u = 1$. С помощта на горните равенства от (5) и (11) намираме

$$\sum_{i=1}^{p+1} \omega_i^j = \sum_{i=1}^{p+1} \left(\frac{1}{A} \sum_{k=1}^{p+1} A_{kj} da_{ki} \right) = \frac{1}{A} \sum_{k=1}^{p+1} A_{kj} d\left(X_0^k \sum_{u=1}^{q+1} b_{q+1,\,u} \right)$$

$$= \frac{1}{A} \frac{d \sum_{u=1}^{q+1} b_{q+1,\,u}}{\sum_{u=1}^{q+1} b_{q+1,u}} \sum_{i=1}^{p+1} \sum_{k=1}^{p+1} A_{kj} a_{ki} + \frac{1}{A} \sum_{u=1}^{q+1} b_{q+1,\,u} \sum_{k=1}^{p+1} A_{kj} d \left(\sum_{i=1}^{p+1} \lambda_i X_i^k \right)$$

$$= \frac{d \sum_{u=1}^{q+1} b_{q+1,\,u}}{\sum_{u=1}^{q+1} b_{q+1,\,u}} + \left(\sum_{u=1}^{q+1} b_{q+1,\,u} \right) \frac{d\lambda_j}{a_{p+1,\,j}} + \{(dX_i^k)\},$$

където с $\{(dX_i^k)\}$ сме означили за краткост членовете, които съдържат dX_i^k и при външното умножение с (13) ще отпаднат. По същия начин достигаме и до равенството

$$\sum_{u=1}^{q+1} \psi_u^v = \frac{d \sum_{u=1}^{q+1} b_{q+1,u}}{\sum_{u=1}^{q+1} b_{q+1,u}} + \left(\sum_{u=1}^{q+1} b_{q+1,\,u} \right) \frac{d\mu_v}{b_{q+1,\,v}} + \{(dY_u^w)\}.$$

Тогава

$$\bigwedge_{j=1}^{p+1}\left(\sum_{i=1}^{p+1}\omega_i^j-\sum_{u=1}^{q+1}\psi_u^{q+1}\right)=\frac{\left(\sum_{u=1}^{q+1}b_{q+1,u}\right)^{p+1}}{(b_{q+1,q+1})^{p+1}\prod_{j=1}^{p+1}a_{p+1,j}}\bigwedge_{j=1}^{p+1}(b_{q+1,q+1}\,d\lambda_j$$

$$+a_{p+1,j}\sum_{u=1}^{q}d\mu_u)+\{(dX_i^k,\ dY_u^w)\},$$

$$\bigwedge_{v=1}^{q}\sum_{u=1}^{q+1}(\psi_u^v-\psi_u^{q+1})=\frac{\left(\sum_{u=1}^{q+1}b_{q+1,u}\right)^{q}}{(b_{q+1,q+1})^{q}\prod_{v=1}^{q}b_{q+1,v}}\bigwedge_{v=1}^{q}(b_{q+1,q+1}\,d\mu_v$$

$$+b_{q+1,v}\sum_{u=1}^{q}d\mu_u)+\{(dY_u^w)\}$$

и следователно

$$\bigwedge_{j=1}^{p+1}\left(\sum_{i=1}^{p+1}\omega_i^j-\sum_{u=1}^{q+1}\psi_u^{q+1}\right)\wedge\bigwedge_{v=1}^{q}\sum_{u=1}^{q+1}(\psi_u^v-\psi_u^{q+1})\tag{15}$$

$$=\frac{\left(\sum_{u=1}^{q+1}b_{q+1,u}\right)^{p+q+2}}{\prod_{j=1}^{p+1}a_{p+1,j}\prod_{v=1}^{q+1}b_{q+1,v}}\,d\Lambda\wedge dM+\{(dX_i^k,\ dY_u^w)\},$$

където $d\Lambda=\bigwedge_{j=1}^{p+1}d\lambda_j$, $dM=\bigwedge_{v=1}^{q}d\mu_v$.

Умножаваме външно (13), (14) и (15). Получаваме

$$dG_L=\frac{1}{A^{p+1}B^{q+1}}\left(\prod_{i=1}^{p+1}a_{p+1,i}\right)^{p}\left(\prod_{u=1}^{q+1}b_{q+1,u}\right)^{q}\left(\sum_{u=1}^{q+1}b_{q+1,u}\right)^{p+q+2}$$

$$\times\bigwedge_{i=1}^{p+1}dP_i\wedge\bigwedge_{u=1}^{q+1}dQ_u\wedge d\Lambda\wedge dM.$$

Лесно се съобразява, че след елементарни преобразования са в сила формулите

$$\begin{gathered}a_{p+1,1}\dots a_{p+1,j-1}\left(\sum_{u=1}^{q+1}b_{q+1,u}\right)a_{p+1,j+1}\dots a_{p+1,p+1}=\frac{1}{V_1^j},\\ b_{q+1,1}\dots b_{q+1,v-1}\left(\sum_{u=1}^{q+1}b_{q+1,u}\right)b_{q+1,v+1}\dots b_{q+1,q+1}=\frac{1}{V_2^v}\end{gathered}\tag{16}$$

за $j=1,\dots,p+1$, $v=1,\dots,q+1$. В тях

$$V_1^j=\left|\begin{matrix} X_1^1\ldots X_{j-1}^1 & X_0^1 & X_{j+1}^1\ldots X_{p+1}^1 \\ X_1^2\ldots X_{j-1}^2 & X_0^2 & X_{j+1}^2\ldots X_{p+1}^2 \\ \ldots\ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots\ldots \\ X_1^p\ldots X_{j-1}^p & X_0^p & X_{j+1}^p\ldots X_{p+1}^p \\ 1\ldots 1 & X_0^{p+1} & 1\ \ldots 1 \end{matrix}\right|,\quad V_2^\nu=\left|\begin{matrix} Y_1^1\ldots Y_{\nu-1}^1 & Y_0^1 & Y_{\nu+1}^1\ldots Y_{q+1}^1 \\ Y_1^2\ldots Y_{\nu-1}^2 & Y_0^2 & Y_{\nu+1}^2\ldots Y_{q+1}^2 \\ \ldots\ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots\ldots \\ Y_1^q\ldots Y_{\nu-1}^q & Y_0^q & Y_{\nu+1}^q\ldots Y_{q+1}^q \\ 1\ldots 1 & 1 & 1\ \ldots 1 \end{matrix}\right|.$$

С помощта на горните формули намираме

$$dG_L=\frac{\bigwedge_{i=1}^{p+1} dP_i\wedge\bigwedge_{u=1}^{q+1} dQ_u\wedge d\Lambda\wedge dM}{V_1^1 V_1^2\ldots V_1^{p+1} V_2^1 V_2^2\ldots V_2^{q+1}}. \tag{17}$$

Ще дадем и друго представяне на кинематичната гъстота. От

$$\sum_{j=1}^{p+1}\omega_i^j=\frac{d\sum_{u=1}^{q+1} b_{q+1,\,u}}{\sum_{u=1}^{q+1} b_{q+1,\,u}}+\frac{1}{A}\sum_{u=1}^{q+1} b_{q+1,\,u}\sum_{i=1}^{p+1} A_{ij}dX_0^i,$$

$$\sum_{u=1}^{q+1}\psi_u^\nu=\frac{d\sum_{u=1}^{q+1} b_{q+1,\,u}}{\sum_{u=1}^{q+1} b_{q+1,\,u}}+\frac{1}{B}\sum_{u=1}^{q+1} b_{q+1,\,u}\sum_{u=1}^{q} B_{u\nu}dY_0^u$$

следва

$$\sum_{i=1}^{p+1}\omega_i^j-\sum_{u=1}^{q+1}\psi_u^{q+1}=\sum_{u=1}^{q+1} b_{q+1,\,u}\left(B\sum_{i=1}^{p+1} A_{ij}\,dX_0^i-A\sum_{u=1}^{p} B_{u,\,q+1}\,dY_0^u\right),$$

$$\sum_{u=1}^{q+1}(\psi_u^\nu-\psi_u^{q+1})=\frac{1}{B}\sum_{u=1}^{q+1} b_{q+1,\,u}\sum_{u=1}^{q}(B_{u\nu}-B_{u,\,q+1})dY_0^u.$$

Тогава

$$\bigwedge_{j=1}^{p+1}\left(\sum_{i=1}^{p+1}\omega_i^j-\sum_{u=1}^{q+1}\psi_u^{q+1}\right)\wedge\bigwedge_{\nu=1}^{q}\sum_{u=1}^{q+1}(\psi_u^\nu-\psi_u^{q+1})=\left(\sum_{u=1}^{q+1} b_{q+1,\,u}\right)^{p+q+2}dR, \tag{18}$$

като сме положили $dR=\bigwedge_{j=1}^{p+1} dX_0^j\wedge\bigwedge_{\nu=1}^{q} dY_0^\nu$.

Умножаваме външно (13), (14) и (18). Получаваме

$$dG_L=\frac{1}{A^{p+1}B^{q+1}}\left[a_{p+1,\,1}\ldots a_{p+1,\,p+1}\left(\sum_{u=1}^{q+1}b_{q+1,\,u}\right)\right]^{p+1}$$

$$\times\left[b_{q+1,\,1}\ldots b_{q+1,\,q+1}\left(\sum_{u=1}^{q+1}b_{q+1,\,u}\right)\right]^{q+1}\bigwedge_{i=1}^{p+1}dP_i\wedge\bigwedge_{u=1}^{q+1}dQ_u\wedge dR.$$

От горната формула и (16) намираме търсеното ново представяне на кинематичната гъстота:

$$dG_L=\frac{\bigwedge_{i=1}^{p+1}dP_i\wedge\bigwedge_{u=1}^{q+1}dQ_u\wedge dR}{V_1^1V_1^2\ldots V_1^{p+1}V_2^1V_2^2\ldots V_2^{q+1}}. \tag{19}$$

Получените резултати ще формулираме като

Теорема 2. За кинематичната гъстота на бипланарната група са в сила формулите (17) и (19).

ЛИТЕРАТУРА

1. Борисов А. В. Върху интегралната геометрия на системи от точки в бипланарно пространство. — Год. Соф. унив., Фак. мат. и мех., **74** (под печат).
2. Сантало Л. А. Введение в интегральную геометрию. М., 1956.
3. Chern S. S. On integral geometry in Klein spaces. — Ann. Math. (2), **43**, 1942, 178—189.
4. Luccioni R. E. Geometria integral en espacios projectivos. — Rev. Mat. Fis. Teor. Univ. Tucuman, **15**, 1964, 53—80.
5. Santalo L. A. Integral geometry in projective and affine spaces. — Ann. Math. (2), **51**, 1950, 739—755.

Постъпила на 27. 11. 1981

ON THE KINEMATIC DENSITY OF THE BIPLANAR GROUP

A. V. Borisov

(SUMMARY)

Let J_p an K_q be fixed skew linear subspaces of the n-dimensional real projective space P_n, $\dim J_p=p$, $\dim K_q=q$ and $p+q=n-1$. The biplanar Kleinian space has P_n as the underlying space and the fundamental group G_L consists of all collineations of P_n preserving J_p and K_q. The dimensions of G_L is $L=p^2+q^2+2(p+q)+1$. We use a family of biplanar frames $R_L=(A_1A_2\ldots A_{p+1}B_1B_2\ldots B_{q+1})$ having the following natural property: the vertices $A_1, A_2,\ldots, A_{p+1}$ are in J_p and $B_1, B_2,\ldots, B_{q+1}$ are in K_q. The 1-forms ω_i^j $(i, j=1,\ldots, p+1)$ and ψ_u^v $(u, v=1,\ldots, q+1)$ are the relative components of G_L.

Let Σ be a system of $h+s+1$ linearly dependent points, so that any $h+s$ points of Σ are linearly independent. Moreover, let each system Σ contains h points of J_p and s points of K_q with $0<h\leqq p+1$ and $0<s\leqq q+1$.

Let the points of an arbitrary system Σ be A_1, $A_2, \ldots, A_h$, B_1, $B_2, \ldots, B_s$, $E_0 = A_1 + A_2 + \ldots + A_h + B_1 + B_2 + \ldots + B_s$. The main result in this paper is

Theorem 1. The systems Σ have an invariant density with respect to the biplanar group G_L if and only if $h = p+1$ and $s = q+1$.

In this case G_L acts simply transitively on the set of all systems Σ. Hence the L-from

$$dG_L = \bigwedge_{i=1}^{p+1} \bigwedge_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{p+1} \omega_i^j \wedge \bigwedge_{u=1}^{q+1} \bigwedge_{\substack{v=1 \\ v \neq u}}^{q+1} \psi_u^v$$

$$\wedge \bigwedge_{j=1}^{p+1} \left(\sum_{i=1}^{p+1} \omega_i^j - \sum_{u=1}^{q+1} \psi_u^{q+1} \right) \wedge \bigwedge_{v=1}^{q} \sum_{u=1}^{q+1} (\psi_u^v - \psi_u^{q+1})$$

determines the kinematic density of G_L. Up to a constant factor this density is equal to the exterior product of all relative components ω_i^j, ψ_u^v excepting ψ_{q+1}^{q+1}.

We obtain two explicit formulas (17) and (19) for dG_L involving the coordinates of the points of Σ. These formulas give geometric interpretations of the kinematic density.

ГОДИШНИК НА СОФИЙСКИЯ УНИВЕРСИТЕТ „КЛИМЕНТ ОХРИДСКИ“
ФАКУЛТЕТ ПО МАТЕМАТИКА И МЕХАНИКА
Том 75 Книга 1 — Математика 1981
ANNUAIRE DE L'UNIVERSITÉ DE SOFIA „KLIMENT OHRIDSKI"
FACULTÉ DE MATHÉMATIQUES ET MÉCANIQUE
Tome 75 Livre 1 — Mathématiques 1981

SOME NOTES ON UNBOUNDED SYMMETRIC OPERATORS IN BANACH SPACES

Hristo N. Boyadžiev

Христо Н. Бояджиев. **Некоторые замечания о неограниченных операторах в пространствах Банаха.**

Линейный оператор A, определенный в комплексном банаховом пространстве, называется самосопряженным, если iA^n — инфинитезимальный генератор (C_0) группы изометрии для $n=1, 2,\ldots$ Приведено характеризующее эти операторы свойство, выражающееся через нормы. Другая характеризация получена с использованием преобразования Кэли. Показана связь со спектральными операторами скалярного типа, когда пространство слабо полное.

Hristo N. Boyadžiev. **Some Notes on Unbounded Symmetric Operators inh Banach Spaces.**

The Banach space operator A is called self-adjoint, if iA^n is an infinitesimal generator of a (C_0) group of isometries for every $n=1, 2,\ldots$. Such operators are characterized by means of a certain norm condition and by their Cayley transform, which is a unitary operator in some sense. The connection with scalar-type spectral operators is shown when the underlying space is weakly complete.

INTRODUCTION

I

The notion of self-adjoint linear Hilbet space operator has been generalized for Banach space operators in two directions— operators with integral representation with spectral measure on the Borel subsets of R (the so-called spectral operators of scalar type with real spectrum), and infinitesimal generators multiplied by i of strongly continuous one-parameter groups of isometries, called by Palmer self-conjugate operators in [9]. For bounded operators this notion coincides with that of hermitian operators in the sense of Vidav [3].

Connection between these two classes of operators had been investigated by Berkson [3—5]. The years have shown that these generalizations are useful and properly chosen.

A characteristic property of the symmetric (self-adjoint) Hilbert space operators is that their Cayley transforms are isometric (unitary) operators. This is not true in general for self-conjugate or scalar type operators on a Banach space. To obtain an isometric Cayley transform for the operator A one needs $\|(A+i)x\|=\|(A-i)x\|$ for every x in $D(A)$. This holds for a class of self-conjugate operators considered by Palmer [9], namely the normal operators with real spectrum. We adduce the exact definition and some characteristic properties of these operators below. Afterwards we give two new characterizations of this class; with a norm condition, and by means of the Cayley transform. At the end we consider a norm condition defining a somewhat larger class of operators.

PRELIMINARIES

Throughout X stands for a complex Banach space with dual X' and A stands for a closed linear operator with dense domain $D(A)\subseteq X$. For x in X we denote by $T(x)$ the set of tangent functionals at x:

$$T(x)=\{f \text{ in } X' : f(x)=\|x\|,\quad \|f\|=1\}.$$

Definition 1. The operator A is called symmetric if one of the following equivalent conditions holds.

(1) $\|x\|\leqq\|(1+itA)x\|$ for every t real and every x in $D(A)$,

(2) $f(Ax)$ is real for every x in $D(A)$ and some f in $T(x)$,

(3) $f(Ax)$ is real for every x in $D(A)$ and every f in $T(x)$

((2)$\to$(3) is the result of Batty (1); (1) implies (2) according to [7, V. 9. 5.], and (2)$\to$(1) is easy: $\|x\|=f(x)\leqq|f(x)+itf(Ax)|\leqq\|x+itAx\|$.)

Definition 2. ([9]). The operator A is called self-conjugate if iA is the infinitesimal generator of a strongly continuous one-parameter group of isometries $u(t, A)$, t in R ($u(t,A)=\exp(itA)$).

In this case we denote:

(4) $\cos(tA)=(u(t,A)+u(-t,A))/2$; $\sin(tA)=(u(t,A)-u(-t,A))/(2i)$;

$$u(t,A)=\cos(tA)+i\sin(tA),\ t \text{ in } R.$$

As $u(t, A)$ is a group, for these operator-valued functions the usual trigonometric formulas hold.

Remark 1. It is well-known that A is self-conjugate if and only if it is symmetric and $(A\pm i)D(A)=X$ ([9], [7, VIII. 1. 17], [10, IX. 9]).

In what follows, a bounded symmetric operator is called hermitian. It is known that a hermitian operator is self-conjugate in the sense of the above definition — see Lemma 5.2 and Theorem 9. 4 in [11].

Definition 3. ([9]). The closed commutative algebra M of bounded operators on X is called a V^* algebra if every element S in M can be written in the form $S=B+iC$ with B, C hermitian operators in M.

This representation is unique and every V^* algebra is a B^* algebra with the involution $S=B+iC\to S^*=B-iC$ (the Vidav — Palmer theorem — see [11]).

Definition 4. ([9]). The bounded operator S is called normal, if it belongs to a V^* algebra; a normal operator U is called unitary if it is onto, isometric, and $U^{-1}=U^*$.

Obviously, an operator S is normal if and only if $S=B+iC$ with $BC=CB$ and B^nC^m is hermitian for every $n, m=0, 1, 2,\ldots$ (in this case B and C generate a V^* algebra).

Therefore every normal (unitary) operator is a normal (unitary) element in a certain B^* algebra.

The following theorem was proved by Palmer [9] (as part of Theorem 4. 3 there).

Theorem A. For A the following conditions are equivalent.

(a) A is self-conjugate and A^n is symmetric for every $n=1, 2,\ldots$;

(b) A^n is self-conjugate for every $n=1, 2,\ldots$;

(c) A is self-conjugate and $\sin(tA)$, $\cos(tA)$ are hermitian operators for every real t;

Definition 5. The operators for which (a), (b), (c) hold we call self-adjoint

Remark 2. In his paper Palmer has given a definition for unbounded normal operators. The self-adjoint operators are just the (unbounded) normal operators with real spectrum in [9].

THE NORM CONDITION

Lemma. If A satisfies the condition:

(5) $\|tAx+ix\|=\|tAx-ix\|$ for every x in $D(A)$ and every $t\geqq 0$, then A is symmetric.

Proof. For x, y in X we put $l(x, y)=\lim\limits_{t\to 0+}(\|x+ty\|-\|x\|)/t$.

Then $-l(x, -y)\leqq l(x,y)$ for every x, y in X (see [7. V. 9. 3.]). Now (5) implies for every x in $D(A)$: $l(x, iAx)=l(x, -iAx)\geqq -l(x-iAx)$ hence $-l(x, -iAx)\leqq 0\leqq l(x, iAx)$.

For every x in $D(A)$ then there exists f in $T(x)$ with Re $f(iAx)=0$, hence $f(Ax)\in R$ according to Theorem V. 9. 5. in [7]. Therefore A is symmetric (see (2)).

Now we give a norm characterization of the self-adjoint operators.

Theorem 1. The operator A is self-adjoint if and only if:

(d) $\|(tA^n+i)x\|=\|(tA^n-i)x\|$ for every x in $D(A^n)$, $n=1, 2,\ldots$, $t\geqq 0$ and
$$(A\pm i)D(A)=X.$$

Proof. When (d) holds, for every $n=1, 2,\ldots$, A^n is symmetric and A is self-conjugate according to the Lemma and the Remark after Definition 2, so that (a) holds (here A^n is densely defined and closed because of Lemma 9, VIII. 2. and Theorem 7, VII. 9. in [7]).

Now we prove (b), (c) $\to$ (d). Let $n\geqq 1$ be a positive integer. For every r, s real, $\sin(rA^n)$, $\cos(sA^n)$ are hermitian ((c) applied to A^n), hence $\sin^m(tA^n)$ for t real is hermitian too, being a real linear combination of them ($m=1, 2,\ldots$). So for every s, t real, the operator $S=s(\sin(tA^n)/t)+i$ is normal, and Lemma 2.7 in [9] implies $\|Sx\|=\|S^*x\|$ for every x in X, i. e. $\|(s(\sin(tA^n)/t)+i)x\|=\|(s(\sin(tA^n)/t)-i)x\|$.

For every x in $D(A^n)$ we have $A^nx=\lim\limits_{t\to 0}(\sin(tA^n)/t)x$ and hence (d) holds. The proof is completed.

For A self-conjugate and x in $X=(A\pm i)D(A)$ we consider

(6) $\quad Ux=(iA+1)(iA-1)^{-1}x;\; U^{-1}x=(iA-1)(iA+1)^{-1}x$

and call it the Cayley transform of A. The representation

$$(7)\qquad (s\mp iA)^{-1}x=\int_0^{+\infty}\exp(-st)\,u(\pm t,\,A)x\,dt\quad (s>0)$$

(the integral exists in the strong operator topology for every x in X — see [7, VIII. 1. 11]) and the resolvent equation imply

(8) $U=U_r+iU_i,\; U^{-1}=U_r-iU_i,$ where $U_r=(U+U^{-1})/2,\; U_i=(U-U^{-1})/(2i)$

$$\text{and hence } U_ix=2A(A^2+1)^{-1}x=2\int_0^{+\infty}\exp(-t)\sin(tA)\,x\,dt,$$

$$U_rx=(A^2-1)(A^2+1)^{-1}x=\int_0^{+\infty}\exp(-t)(1-2\cos(tA))x\,dt,\text{ for every } x \text{ in } X.$$

Theorem 2. The self-conjugate operator A is self-adjoint if and only if its Cayley transform is a unitary operator (Definition 4).

Proof. Let (c) of Theorem A hold. For x in X and f in $T(x)$ we have: (the proof of the formula is just like that of Lemma 22 in [7, VIII. 1])

$$f(U_r^n U_i^m x)=\int_0^{+\infty}\exp(-t)f((1-2\cos(tA))^{\cdot n}.(2\sin(tA))^{\cdot m}x)\,dt \text{ is real for}$$

$$n,\, m=0,\,1,2,\ldots \text{ (here } g.\,h(s)=\int_0^s g(t)\,h(s-t)\,dt).$$

As powers and products of $\cos(tA)$, $\sin(tA)$ are real linear combinations of $\cos(sA)$, $\sin(rA)$, t, s, r real, the convolution (in the strong operator topology) of these hermitian operator-valued functions is again hermitian and therefore $U_r^n U_i^m$ is hermitian (n, $m=0$, 1, 2,...). So U is normal. It is onto as $(iA\pm 1)D(A)=X$ and isometric according to the norm condition (5). Also $U^*=U^{-1}$ from (8). Hence U is a unitary operator.

Conversely, let for the self-conjugate operator A its Cayley transform U be unitary. As $U^{-1}=U^*$, we have $U=U_r+iU_i$ (see (8)) and hence U_r, U_i generate together with 1 a V^* algebra. Then for every nonzero real t the operators A_t

$$(9)\qquad A_t=U_i(U_r+1)(U_i^2+t^2)^{-1}=4A^3(4A^2+t^2(A^2+1)^2)^{-1}$$

are hermitian (as hermitian elements of that V^* algebra). When x is in $D(A^n)$, f in $T(x)$, $n=1$, 2,..., we have $f(A_t^n x)\to f(A^n x)$ when $t\to 0$ and therefore $f(A^n x)$ is real. This implies that A^n is symmetric (as it is densely defined and closed — see [7, VII. 9. 7, VIII. 2. 9.]). The above computations hold because of the functional calculus for A (or U) — see [7, VII., VIII.]. The theorem is proved. See also remark 3.

THE CASE WHEN X IS WEAKLY COMPLETE

We show now the relation between self-adjoint and scalar-type spectral operators. For definitions see [7, part III], [3], [4], [5], [9].

The following theorem is contained in the results of [9]. We shall give a shorter proof based on some results of E. Berkson.

Theorem 3. If X is weakly complete, the operator A is self-adjoint if and only if A is a scalar-type spectral operator with real spectrum and hermitian-valued resolution of the identity, i. e.

$$Ax = \int_{-\infty}^{+\infty} s dE(s)x, \quad x \text{ in } D(A) \tag{10}$$

and $E(s)$ is hermitian for every s in R.

Proof. Let (c) of Theorem A hold. The operators $u(t, A) = \cos(tA) + i\sin(tA)$ are normal (and hence unitary) for every t in R, as $(\cos(tA))^n$, $(\sin(tA))^m$ (n, $m = 0, 1, 2, \ldots$) being real linear combinations of hermitian operators are hermitian too. Hence $u(t, A)$ is a scalar-type spectral operator for every t in R according to a theorem of Berkson [3], [7, XV. 15.], [7, XVII. 2. 12], and so we obtain a group of scalar-type unitary operators. Another result of Berkson [5] implies the representation

$$Ay = \int_{-\infty}^{+\infty} s dE(s)y, \quad u(t, A)x = \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(its)\, dE(s)x \tag{11}$$

for every x in X and y in $D(A)$. Here $E(s)$ is a spectral function defined on the real line. Moreover, $E(s)$ is hermitian for every s according to Theorem 2.2 in [4].

Conversely, let A have the representation (10) with $E(s)$ hermitian-valued spectral function. Then iA is the infinitesimal generator of a strongly continuous group of isometries determined by the above formula (11) (as $E(s)$ are hermitian idempotents, they generate a V^* algebra and therefore $\|E(s)\| = 1$). We have now

$$\cos(tA)x = \int_{-\infty}^{+\infty} \cos(ts)\, dE(s)x; \quad \sin(tA)x = \int_{-\infty}^{+\infty} \sin(ts)\, dE(s)x, \quad x \text{ in } X \tag{12}$$

and so $\cos(tA)$, $\sin(tA)$ are hermitian for every real t; (c) of Theorem A holds and hence A is self-adjoint. The proof is completed.

Remark 3. The integral representation of A can be obtained in the folowing way. Let A be self-conjugate and its Cayley transform U be unitary. Then according to the results of Berkson [3—5], U has an integral representation

$$Ux = \int_0^{2\pi} \exp(it)\, dF(t)x \quad \text{for every } x \text{ in } X \text{ with } F(t) \text{ hermitian valued.}$$

Then for x in $D(A)$, $Ax = i(1+U)(1-U)^{-1}x = -\int_0^{2\pi} \operatorname{cotg}(t/2)\, dF(t)\, x = \int_{-\infty}^{+\infty} s dE(s)x$ with $E(s) = F(2 \operatorname{arccotg}(-s))$.

Conversely, if A has the representation (11), we can obtain the above integral representation of U with a change of the variable. Thus we can also see that U is unitary.

Therefore considering simultaneously Theorems 2 and 3 when X is weakly complete, we can simplify some parts in their proofs.

A SRONGER NORM CONDITION

For x, y in X we denote: $(x, y)=\|x+y\|^2-\|x-y\|^2$. In [6] a densely defined linear operator A is called symmetric, if

(13) $$(Ax, y)=(x, Ay) \text{ for every } x, y \text{ in } D(A).$$

It is shown there that such operators have some properties in common with symmetric operators on a Hilbert space. But it is not clear whether for such symmetric operators A, sA is also symmetric when s is a real number. That is why we shall adopt the followind definition.

Definition 6. The operator A we call strongly symmetric, if for every s in R^+ and every, x, y in $D(A)$ we have

(14) $$(sAx, y)=(x, sAy).$$

Proposition. Let A be strongly symmetric and $(A\pm i)\,D(A)=X$. Then A is self-adjoint.

Proof. It follows by induction that if the operator A satisfies (14), then A^n $(n=2, 3, \ldots)$ satisfies it too. So we obtain $\|sA^n x+y\|^2-\|sA^n x-y\|^2$ $=\|x+sA^n y\|^2-\|x-sA^n y\|^2$ for every $n=1, 2, \ldots$, x, y in $D(A^n)$, $s\geqq 0$.

Taking $y=ix$ we obtain

$\|(sA^n+i)x\|^2-\|(sA^n-i)x\|^2=\|(1+isA^n)x\|^2-\|(1-isA^n)x\|^2$, i. e. $\|(sA^n+i)x\|$ $=\|(sA^n-i)x\|$ for every $s\geqq 0$, x in $D(A^n)$ which is the condition (d) The proof is completed.

REFERENCES

1. Batty C. J. K. Dissipative mappings and well-behaved derivations. — J. London Math, Soc. (2), 18, 1978, 527—533.
2. Batty C. J. K. Small perturbations of C^* dynamical systems. — Comm. Math. Phys. 68, 1979, 39—43.
3. Berkson E. A characterization of scalar-type operators on reflexive Banach spaces. — Pacific J. Math., 13, 1963, 365—373.
4. Berkson E. Some characterizations of C^* algebras. — Illinois J. Math., 10, 1966 1—8.
5. Berkson E. Semi-groups of scalar-type operators and a theorem of Stone. — Illinois J. Math., 10, 1966. 345—352.
6. Джабарзаде P. M. — B: Спектральная теория операторов, Баку, 1977, c. 100.
7. Dunford N., Schwartz J. T. Linear operators P. I, P. III, New York, P. I — 1958; P. II — 1971.
8. Lumer G., Phillips R. S. Dissipative operators in Banach space. — Pacific J. Math., 11, 1961, 679—698.
9. Palmer T. W. Unbounded normal operators on Banach spaces. — Trans. Amer. Math. Soc., 133, 1968, 385—414.
10. Yosida K. Functional analysis, Berlin, 1965.
11. Bonsall F. F., Duncan J. Numerical ranges of operators on normed spaces and of elements of normed algebras. — London Math. Soc. Lecture Note Ser. 2. Cambridge, 1971.

Received 13. 1. 1982

НЯКОИ БЕЛЕЖКИ ЗА НЕОГРАНИЧЕНИТЕ СИМЕТРИЧНИ ОПЕРАТОРИ В БАНАХОВИ ПРОСТРАНСТВА

Х. Н. Бояджиев

(РЕЗЮМЕ)

Най-удачните обобщения на понятието самоспрегнат оператор за оператори, действуващи в банахови пространства, са две — оператори, с интегрално представяне със спектрална функция, определена върху реалната права (така наречените спектрални оператори от скаларен тип с реален спектър), и инфинитезимални генератори на силно непрекъснати еднопараметрични групи от изометрии.

В работата се разглежда един клас от оператори от втория вид, наречени самоспрегнати. Това са нормалните оператори с реален спектър, дефинирани от Palmer [9].

Характеризиращо свойство на самоспрегнатите оператори е това, че тяхното преобразование на Кели е унитарен оператор (теорема 2; дефиниция 4). Това е свойство на самоспрегнатите оператори в хилбертово пространство. Дадена е и друга характеризация — чрез нормата. Именно, ако X е банахово пространство и A е (неограничен) затворен линеен оператор с навсякъде гъста област на определение $D(A)$, то A е самоспрегнат точно когато $(A\pm i)D(A)=X$ и $\|(tA^n+i)x\|=\|(tA^n-i)x\|$ за всяко естествено n, $x\in D(A^n)$ и t неотрицателно (теорема 1).

В случай че X е слабо пълно, самоспрегнатите оператори са точно спектралните оператори от скаларен тип с реален спектър и спектрална функция, приемаща самоспрегнати стойности, т. е. A е самоспреегнат точно когато

$$Ax = \int_{-\infty}^{+\infty} t\,dE(t)\,x \quad (E(t) \text{ — спектрална функция})$$

за всяко $x\in D(A)$, където $E(t)$ е самоспрегнат оператор с норма 1 за всяко реално t (теорема 3).

Накрая е показано, че ако за навякъде гъсто дефинирания линеен оператор A е изпълнено $(A+i)\,D(A)=X$ и $(sAx,\ y)=(x,\ sAy)$ за всяко $x,\ y\in D(A)$ и всяко s реално, то A е самоспорегнат (тук $(u,\ v)=\|u+v\|^2-\|u-v\|^2$, $u,\ v\in X$).

ГОДИШНИК НА СОФИЙСКИЯ УНИВЕРСИТЕТ „КЛИМЕНТ ОХРИДСКИ"
ФАКУЛТЕТ ПО МАТЕМАТИКА И МЕХАНИКА
Том 75 Книга 1 — Математика 1981
ANNUAIRE DE L'UNIVERSITÉ DE SOFIA „KLIMENT OHRIDSKI"
Tome 75 FACULTÉ DE MATHÉMATIQUES ET MÉCANIQUE 1981
Livre 1 — Mathématiques

ОЦЕНКИ СНИЗУ ДЛЯ НЕКОТОРЫХ КОНСТАНТ, СВЯЗАННЫХ С ГРАФАМИ РАМСЕЯ

Недялко Д. Ненов

Недялко Д. Ненов. **Оценки снизу для некоторых констант, связанных с графами Рамсея.**

Граф G называется $(p_1, \ldots, p_s)$-графом Рамсея, если для любой s-раскраски его ребер существует i, $1 \leqq i \leqq s$, такое, что существует p_i-клика, все ребра которой окрашены в i-ый цвет. Через $N(p_1, \ldots, p_s; q)$ обозначается наименьшее натуральное число n, для которого существует $(p_1, \ldots, p_s)$-граф Рамсея с n вершинами и кликовым числом меньше q. В этой работе доказывается, что

$$N(p_1, \ldots, p_s;\ R(p_1, \ldots, p_s)-3) \geqq R(p_1, \ldots, p_s)+8,$$

где $R(p_1, \ldots, p_s)$ обозначает соответствующее число Рамсея. Доказывается, что для (3, 3, 3)-графов Рамсея это неравенство точное.

Nedjalko D. Nenov. **A Lower Bound for Some Constants Related to the Ramsey Graphs.**

The graph G is called a $(p_1, \ldots, p_s)$-Ramsey graph, if for every s-colouring of the edges of G there exists an i, $1 \leqq i \leqq s$, such that G contains a monochromatic p_i-clique of the i-th colour. In this paper it is proved that

$$N(p_1, \ldots, p_s;\ R(p_1, \ldots, p_s)-3) \geqq R(p_1, \ldots, p_s)+8$$

$N(p_1, \ldots, p_s; q)$ denotes the minimal natural number n such that there is a $(p_1, \ldots, p_s)$-Ramsey graph G with n vertices and clique number $\mathrm{cl}(G) < q$, and $R(p_1, \ldots, p_s)$ is the Ramsey number.

1. ВВЕДЕНИЕ И ФОРМУЛИРОВКА ОСНОВНЫХ РЕЗУЛЬТАТОВ

Под обыкновенным графом будем понимать упорядоченнную пару $G=(V(G), E(G))$, где $V(G)$ — конечное множество, а $E(G)$ — некоторая совокупность 2-элементных подмножеств множества $V(G)$. Рассматриваются только обыкновенные графы. Если $v_1, v_2 \in V(G)$ и $[v_1, v_2] \in E(G)$, будем говорить, что вершины v_1 и v_2 смежны. Множество вершин $v_1, \ldots, v_p$ графа G называется p-кликой, если любые две из них смежны. Наибольшее натуральное число p, для которого граф G обладает p-кликой, называется кликовым числом графа G и обозначается $\mathrm{cl}(G)$. Множество вершин графа G называется независимым множеством вершин, если любые две из них несмежные. Наибольшее натуральное число n, для которого граф G обладает независимым множеством из n вершин, называется числом независимости графа G и обозначается $\alpha(G)$.

Пусть, G_1 и G_2 — два графа без общих вершин. Следуя Зыкову [11], через $G_1 + G_2$ обозначим граф G, для которого $V(G) = V(G_1) \cup (G_2)$ и $E(G) = E(G_1) \cup E(G_2) \cup E'$, где $E' = \{[v_1, v_2],\ v_1 \in V(G_1),\ v_2 \in V(G_2)\}$.

Ниже будем пользоваться следующими обозначениями:

$\langle V \rangle$, $V \subset V(G)$ — подграф графа G, порожденный множеством его вершин V;

$G - \{v_1, \ldots, v_k\}$ — подграф графа G, получающийся удалением его вершин $v_1 \ldots, v_k$;

K_n — полный граф с n вершинами;

C_n — простой цикл длины n;

$A(V)$, $V \subset V(G)$ — множество всех вершин, смежных всем вершинам из V.

Определение. Любое разложение

$$E(G) = E_1 \cup E_2 \cup \ldots \cup E_s,\quad E_i \cap E_j = \varnothing,\quad i \neq j, \tag{1}$$

называется s-раскраской ребер графа G.

Пусть дана s-раскраска (1) ребер графа G и Q является его p-кликой. Если $E(Q) \subset E_i$, будем говорить, что Q является монохроматической p-кликой i-ого цвета этой 2-раскраски. Ниже всюду $p_1, \ldots, p_s$ являются натуральными числами.

Определение. Граф G называется $(p_1, \ldots, p_s)$-графом Рамсея, если для любой s-раскраски его ребер существует i, $1 \leqq i \leqq s$, такое, что имеется монохроматическая p_i-клика i-ого цвета.

Через $R(p_1, \ldots, p_s)$ обозначим наименьшее натуральное число n, для которого полный граф с n вершинами является $(p_1, \ldots, p_s)$-графом Рамсея. Существование чисел $R(p_1, \ldots, p_s)$ впервые было доказано Ramsey [12]. Ниже будем пользоваться следующими равенствами: $R(3, 3) = 6$, $R(3, 4) = R(4, 3) = 9$, $R(3, 5) = R(5, 3) = 14$ и $R(3, 3, 3) = 17$ [13]. Подробный обзор результатов по числам Рамсея содержится в [14].

Определение. Через $N(p_1, \ldots, p_s; q)$ обозначим наименьшее натуральное число n со следующим свойством: существует $(p_1, \ldots, p_s)$-граф Рамсея G, такой, что $|V(G)| = n$ и $\mathrm{cl}(G) < q$.

В [16] доказано, что $N(p_1, \ldots, p_s; q) < \infty$, если $q > \max(p_1, \ldots, p_s)$. Изучению чисел $N(p_1, \ldots, p_s; q)$ посвящены работы [1 — 9, 15].

Основная цель этой работы доказать следующее утверждение:

Теорема 1. Пусть, p_i, $1 \leqq i \leqq s$, — натуральные числа, такие что $R(p_1, \ldots, p_s) > 6$. Тогда

$$N(p_1, \ldots, p_s; R(p_1, \ldots, p_s) - 3) \geqq R(p_1, \ldots, p_s) + 8. \tag{2}$$

В конце этой работы покажем, что неравенство (2) точное.

Через $\chi(G)$ обозначим хроматическое число графа G. Ясно, что $\mathrm{cl}(G) \leqq \chi(G)$. Пусть, p и r — натуральные числа и $2 \leqq p \leqq r$. Положим, $H(p, r) = \{G \mid \mathrm{cl}(G) \leqq p,\ \chi(G) \geqq r\}$ и $Z(p, r) - \min\{|V(G)|,\ G \in H(p, r)\}$. Существование чисел $Z(p, r)$ доказано в [11]. Теорему 1 получим как следствие из следующего утверждения:

Теорема 2. $Z(r, r+4) \geqq r+12$, $r \geqq 2$. Притом, если $r \geqq 8$, тогда $Z(r, r+4)=r+12$.

2. ФОРМУЛИРОВКА ПОМОЩНЫХ УТВЕРЖДЕНИЙ

Через F_1 обозначим граф, заданный на рис. 1. Через F_2 обозначим граф, получающийся от графа F_1 добавлением ребра [*3*, *7*], а через F_3 — граф, получающийся от графа F_2 добавлением ребра [*4*, *8*]. Кегу [18]

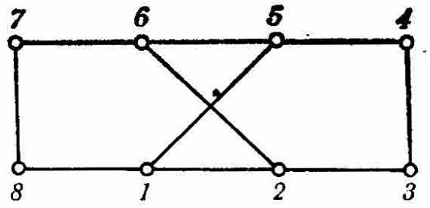

Рис. 1

доказал, что если граф G такой, что $|V(G)|=8$, $\mathrm{cl}(G)=2$ и $\alpha(G)=3$, тогда он совпадает с одним из графов F_1, F_2, F_3. Для удобства сформулируем в виде леммы одно следствие из этого результата Кери.

Лемма 1. Пусть $|V(G)|=8$, $\mathrm{cl}(G)=2$ и $\alpha(G)=3$. Если v_1 и v_3—смежные вершины графа G, тогда подграф $G - \{v_1, v_2\}$ является связным графом.

Лемма 2 [6]. Пусть G — граф, для которого $|V(G)|=7$, $\mathrm{cl}(G) \leqq 3$ и $\chi(G)=4$. Если дополнительный граф $\bar{G}$ является несвязным графом, тогда $G=\bar{K}_2+C_5$.

Лемма 3 [15]. Если G является $(p_1, \ldots, p_s)$-графом Рамсея, тогда $\chi(G) \geqq R(p_1, \ldots, p_s)$.

Лемма 4. Пусть $G \in H(r, r+4)$, $r \geqq 2$, $\alpha(G) \geqq 3$, тогда $|V(G)| \geqq r+12$.

Лемма 5. Пусть $V(G)=\{v_1, \ldots, v_t\}$, $\alpha(G)=2$ и

$$\{v_1, v_2\} \cup \ldots \cup \{v_{2s-1}, v_{2s}\} \cup \{v_{2s+1}\} \cup \ldots \cup \{v_t\},\ t>2s,$$

является $\chi(G)$-хроматически разложением графа G, таким, что $v_{2i-1} \in A(v_{2s+1}, \ldots, v_t)$ и $v_{2i} \notin A(v_{2s+1}, \ldots, v_t)$, $1 \leqq i \leqq s$. Положим $\Gamma = \langle v_{2i-1} | 1 \leqq i \leqq s \rangle$. Тогда, если дополнительный граф $\bar{\Gamma}$ графа Γ имеет компоненту связности, состоящую из k вершин, то $\mathrm{cl}(G) \geqq t+k-2s-1$.

Лемма 6. Пусть $G \in H(r, r+3)$, $r \geqq 5$, $\alpha(G)=2$ и $|V(G)|=r+10$. Тогда $\mathrm{cl}(G)=r$.

3. ДОКАЗАТЕЛЬСТВА ЛЕММ 4, 5 И 6

Доказательство леммы 4. Пусть, $\{v_1, v_2, v_3\}$ — независимое множество вершин графа G и $G_1=G-\{v_1, v_2, v_3\}$. Ясно, что $G_1 \in H(r, r+3)$. Согласно теореме 3 из [7] $|V(G_1)| \geqq r+9$. Следовательно, $|V(G)| \geqq r+12$.

Доказательство леммы 5. Без ограничения общности можно предположить, что $\langle v_{2i-1} | 1 \leqq i \leqq k \rangle$, $k \leqq s$, является компонентой связности графа $\bar{\Gamma}$. Пусть $[v_{2m-1}, v_{2n-1}] \notin E(G)$, $1 \leq m \leq k$, $1 \leq n \leq k$. Так как $v_{2m} \notin A(v_{2s+1},\ldots, v_t)$, мы можем предположить, что $[v_{2m}, v_{2s+1}] \notin E(G)$. Тогда $[v_{2n}, v_i] \in E(G)$, $i>2s+1$ (иначе будет $(\chi(G)-1)$-хроматическое разложение). Так как $v_{2n} \notin A(v_{2s+1},\ldots, v_t)$, то $[v_{2n}, v_{2s+1}] \notin E(G)$. Теперь ясно, что $[v_{2m}, v_i] \in E(G)$, если $i>2s+1$ (иначе будет $(\chi(G)$ — $1)$-хроматическое разложение). Из сделанных замечаний и из того, что $<v_{2i-1} \mid 1 \leq i \leq k>$ является компонентой связности графа Γ, получаем, что $[v_{2i}, v_{2s+1}] \notin E(G)$ и $v_{2i} \in A(v_{2s+2},\ldots, v_t)$, $1 \leq i \leq k$. Следовательно,

(3) $$G \supset <v_i \mid 1 \leq i \leq 2k> + <v_i \mid i > 2k+1>.$$

Заметим, что $<v_i \mid i \geq 2s+2> = K_{t-2s-1}$. Из того, что $\alpha(G)=2$ и $[v_{2i}, v_{2s+1}] \notin E(G)$, $1 \leq i \leq k$, следует, что $<v_{2i} \mid 1 \leq i \leq k>$ является k-кликой. Теперь, из (3) вытекает, что $\mathrm{cl}\,(G) \geq t+k-2s-1$.

Лемма 5 доказана.

Доказательство леммы 6. Так как $G \in H(r, r+3)$, то $\mathrm{cl}\,(G) \leq r$. Остается показать, что $\mathrm{cl}(G) \geq r$. Прежде всего покажем, что $\chi(G)=r+3$. Допустим противное, т. е. $\chi(G)>r+3$. Пусть v_1 и v_2 — несмежные вершины графа G и $G_1=G-\{v_1, v_2\}$. Так как $\chi(G)>r+3$, то $G_1 \in H(r, r+3)$. Это противоречит теореме 3 из [7], согласно которой из $G_1 \in H(r, r+3)$ следует $|V(G_1)| \geq r+9$.

Итак, $\chi(G)=r+3$. Пусть $V(G)=\{v_1,\ldots, v_{r+10}\}$. Из $\alpha(G)=2$ вытекает что с точностью до номерации вершин любое $\chi(G)$-хроматическое разложение имеет следующий вид:

$$\{v_1, v_2\} \cup \{v_3, v_4\} \cup \ldots \cup \{v_{13}, v_{14}\} \cup \{v_{15}\} \cup \ldots \cup \{v_{r+10}\}.$$

Положим, $V'=\{v_{15},\ldots, v_{r+10}\}$. Ясно, что

(4) $$<V'>=K_{r-4}.$$

Заметим, что либо $v_i \in A(V')$, либо $v_{i+1} \in A(V')$, $i=1, 3, 5,\ldots, 13$ (иначе будет $(\chi(G)-1)$-хроматическое разложение). Поэтому без ограничения общности можно предположить, что $v_{2i-1} \in A(V')$, $1 \leq i \leq 7$. Подграф $<A(V')>$ обозначим через T. Тогда

(5) $$|V(T)| \geq 7,$$

(6) $$G \supset K_{r-4}+T.$$

Если $\mathrm{cl}\,(T) \geq 4$, утверждение леммы вытекает непосредственно из (6). Поэтому предположим, что $\mathrm{cl}\,(T) \leq 3$. Так как $\alpha\,(G)=2$, то $\alpha(T)=2$. Из $R\,(3, 4)=9$ следует, что $|V(T)| \leq 8$. Согласно последнему неравенству и (5) представляются две возможности.

Случай 1. $|V(T)|=7$, т. е. $A(V')=\{v_{2i-1} \mid 1 \leq i \leq 7\}$. Из $\alpha\,(T)=2$ следует $\chi(T)=4$. Согласно лемме 2, дополнительный граф $\bar{T}$ графа T содержит компоненту связности, содержащую хотя бы 5 вершин. Из леммы 5 получаем, что $\mathrm{cl}\,(G) \geq r$.

Случай 2. $|V(T)|=8$. Покажем, что этот случай невозможен. Допустим противное. Без ограничения общности можно предположить, что кроме вершин v_{2i-1}, $1 \leq i \leq 7$, множество $V(T)$ содержит и вершину v_{14}. Пусть $G_1=G-\{v_{13}, v_{14}\}$ и $T_1=T-\{v_{13}, v_{14}\}$. Согласно лемме 1, дополнение $\bar{T}_1$ графа T_1 является связным графом. Применяя лемму 5 к графу G_1, получим $\mathrm{cl}\,(G_1) \geq r+1$, что является противоречием.

4. ДОКАЗАТЕЛЬСТВА ТЕОРЕМ 1 И 2

Доказательство теоремы 2. Сначала докажем, $Z(r, r+4) \geqq r+12$. Допустим противное, т. е. $Z(r, r+4) \leqq 11$. Пусть $G \in H(r, r+4)$ и $|V(G)| \leqq r+11$. Добавлением изолированных вершин можно добиться того, чтобы $|V(G)|=r+11$. Согласно лемме 4, $\alpha(G)=2$. Из $\alpha(G)=2$ и $R(3, 4)=9$ вытекает $\mathrm{cl}(G) \geqq 4$. Следовательно, $r \geqq 4$. Ясно, что $G \in H(r+1, r+4)$. Согласно лемме 6, $\mathrm{cl}(G)=r+1$, что является противоречием.

Пусть теперь $r \geqq 8$. Очевидно, граф $K_{r-8}+C_5+C_5+C_5+C_5$ принадлежит $H(r, r+4)$. Так как этот граф имеет $r+12$ вершин, то $Z(r, r+4) = r+12$, если $r \geqq 8$.

Доказательство теоремы 1. Пусть G является $(p_1, \ldots, p_s)$-графом Рамсея и $\mathrm{cl}(G) < R(p_1, \ldots, p_s)-3$. Согласно лемме 3, $\chi(G) \geqq R(p_1, \ldots, p_s)$. Следовательно

$$G \in H(R(p_1, \ldots, p_s)-4; \; R(p_1, \ldots, p_s)).$$

Из теоремы 2 вытекает, что $|V(G)| \geqq R(p_1, \ldots, p_s)+8$, если $R(p_1, \ldots p_s) > 6$.

Этим неравенство (2) доказано.

Замечание. Если $R(p_1, \ldots, p_s) > 6$, тогда верно неравенство $R(p_1, \ldots, p_s)-3 > \max(p_1, \ldots, p_s)$ и согласно (16) числа $N(p_1, \ldots, p_s; R(p, \ldots, p_s)-3)$ существуют.

5. О ТОЧНОСТИ НЕРАВЕНСТВА (2)

Положим $F_n(p, q, r, s) = K_n + C_p + C_q + C_r + C_s$. В этом пункте докажем, что граф $F_5(5, 5, 5, 5)$ является $(3, 3, 3)$-графом Рамсея. Так как этот граф имеет 25 вершин и кликовое число 13, то для $(3, 3, 3)$-графов Рамсея неравенство (2) точное. На самом деле мы докажем следующее более общее утверждение:

Теорема 3. Пусть $p \geqq 3$, $q \geqq 3$, $r \geqq 3$, $s \geqq 3$ — нечетные числа. Тогда граф $F_5(p, q, r, s)$ является критическим $(3, 3, 3)$-графом Рамсея в смысле, что любой собственный подграф графа $F_5(p, q, r, s)$ не является $(3, 3, 3)$-графом Рамсея.

Аналогичное утверждение для $(3, 3)$-графов Рамсея доказано в [2]. Точнее там доказано, что

(7) граф $C_3 + C_{2r+1}$ является $(3, 3)$-графом Рамсея.

Теорему 3 можно рассматривать как обобщение классического результата Greenwood, Gleason [13] о том, что K_{17} является $(3, 3, 3)$-графом Рамсея. Другие частные случаи теоремы 3 доказаны в [3, 4, 15].

Если $E(G) = E_1 \cup E_2 \cup E_3$ является 3-раскраской ребер графа G, тогда, для любой вершины $v \in V(G)$ положим

$$A_i(v) = \{v' \in V(G), \; [v, v'] \in E_i\}, \quad i=1, 2, 3.$$

Ниже, если граф G является $(p_1, \ldots, p_s)$-графом Рамсея, будем писать $G \to (p_1, \ldots, p_s)$.

Для доказательства теоремы 3 нам будут нужны следующие леммы:

Лемма 7 [10]. Пусть $E(K_5)=E_1 \cup E_2 \cup E_3$ является 3-раскраской ребер графа K_5 такой, что нет монохроматических треугольников и $E_i \neq \varnothing$ $i=1, 2, 3$. Тогда существует вершина $v' \in V(K_5)$, такая, что $A_i(v') \neq \varnothing$ $i=1, 2, 3$.

Лемма 8 [17, с. 250]. Любая 2-раскраска ребер K_5 без монохроматических треугольников изоморфна 2-раскраске, заданной на рис. 2.

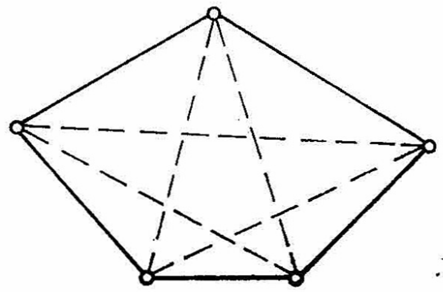

Рис. 2

Лемма 9. Пусть дана 3-раскраска ребер графа G такая, что для некоторой вершины $v \in V(G)$ один из подграфов $\langle A_i(v) \rangle$ является (3, 3)-графом Рамсея. Тогда в этой 3-раскраске есть монохроматический треугольник.

Доказательство — очевидное.

Лемма 10 [8]. Пусть $p \geqq 5$ и $q \geqq 5$ — нечетные числа, и предположим, что дана 2-раскраска ребер графа C_p+C_q без монохроматических треугольников. Тогда все $p+q$ ребра циклов C_p и C_q имеют одинаковый цвет.

Леммы 11, 12, 13 и 14 будут доказаны в следующем пункте.

Лемма 11. Пусть $p \geqq 3$, $q \geqq 3$, $r \geqq 3$ — нечетные числа и $L=(p, q, r)$ $=K_2+C_p+C_q+C_r$. Предположим, что $V(L)=V_1 \cup V_2$ и $V(K_2) \cup V_i \neq \varnothing$, $i=1, 2$, Тогда один из подграфов $\langle V_i \rangle$, $i=1, 2$, является (3, 3)-графом Рамсея.

Лемма 12. Пусть $p \geqq 3$, $q \geqq 3$, $r \geqq 3$, $s \geqq 3$ — нечетные числа. Предположим, что $V(F_4(p, q, r, s))=V_1 \cup V_2 \cup V_3$ и $V_i \cap V(K_4) \neq \varnothing$, $i=1, 2, 3$. Тогда один из подграфов $\langle V_i \rangle$, $i=1, 2, 3$, является (3, 3)-графом Рамсея.

Лемма 13. Пусть $p \geqq 3$, $p \geqq 3$ — нечетные числа. Предположим, что $V(K_4+C_p+C_q)=V_1 \cup V_2$, $|V_i \cap V_i(K_4)| = 2$, $i=1, 2$, и что подграфы $\langle V_1 \rangle$ и $\langle V_2 \rangle$ не являются (3, 3)-графами Рамсея. Тогда верно одно из следующих двух утверждений:

а) $|V_1 \cap V(C_p)| > p/2$, $|V_2 \cap V(C_q)| > q/2$;

б) $|V_1 \cap V(C_q)| > q/2$, $|V_2 \cap V(C_p)| > p/2$.

Лемма 14. Пусть $r_i \geqq 3$, $i=1, 2, 3, 4$, нечетные числа. Предположим, что $V(F_4(r_1, r_2, r_3, r_4)) = V_1 \cup V_2 \cup V_3$ и $|V_i \cap V(K_4)|=2$, $i=1, 2$. Если, подграфы $\langle V_i \rangle$, $i=1, 2, 3$, не являются (3, 3)-графами Рамсея, тогда

а) существуют i и j, $1 \leqq i < j \leqq 4$, такие, что $\langle V_3 \rangle = C_{r_i}+C_{r_j}$ и $r_i \geqq 5$, $r_j \geqq 5$;

б) существуют k и l, $1 \leqq k \leqq 4$, $1 \leqq l \leqq 4$, такие что

$$|V_1 \cap V(C_{r_k})| > r_k/2 \text{ и } |V_2 \cap V(C_{\cdot l})| > r_l/2.$$

Для удобства отметим специально следующее очевидное утверждение:

(8) если $V' \subset V(C_n)$ и $|V'| > n/2$, тогда V' содержит две смежные вершины цикла C_n.

6. ДОКАЗАТЕЛЬСТВА ЛЕММЫ 11, 12, 13 И 14

Доказательство леммы 11. Пусть $V(K_2) = \{v_1, v_2\}$ и $v_1 \in V_1$, $v \in V_2$. Согласно (8), для любого $X = C_p, C_q, C_r$, либо $E(X) \cap E(<V_1>) \neq \varnothing$, либо $E(X) \cap E(<V_2>) \neq \varnothing$. Если одновременно $E(<V_i>) \cap E(C_p) \neq \varnothing$, $E(<V_i>) \cap E(C_q) \neq \varnothing$, $E(<V_i>) \cap$, $E(C_r) \neq \varnothing$, тогда $<V_i>$ содержит $K_6 = C_3 + C_3$ и согласно (7), $<V_i> \to (3, 3)$. Из сделанных рассуждений вытекает, что достаточно рассмотреть следующую ситуацию:

(9) $$E(<V_1>) \cap E(C_p) \neq \varnothing,$$

(10) $$E(<V_1>) \cap E(C)_q) \neq \varnothing,$$

(11) $$E(<V_2>) \cap E(C_r) \neq \varnothing.$$

Если $V_1 \cap V(C_r) \neq \varnothing$, тогда $v_1 \in V_1$ вместе с (9) и (10) дает $\mathrm{cl}(<V_1>) \geqq 6$. Как уже отметили, из этого вытекает, что $<V_1> \to (3, 3)$. Поэтому

(12) $$V_2 \supset V(C_r).$$

Если $V_1 \supset V(C_p)$, тогда $v_1 \in V_1$ и (10) дают, что $<V_1>$ содержит $C_3 + C_p$ и согласно (7), $<V_1> \to (3, 3)$. Следовательно, к (12) мы можем добавить

(13) $$V_2 \cap V(C_p) \neq \varnothing.$$

Аналогично из $<V_1> \supset C_q$ следует $<V_1> \to (3, 3)$. Поэтому мы можем предположить еще, что

(14) $$V_2 \cap V(C_q) \neq \varnothing.$$

Из $v_2 \in V_2$, (12), (13) и (14) следует, что $<V_2>$ содержит $C_3 + C_r$. Согласно (7) $<V_2> \to (3, 3)$. Этим доказательство леммы 11 завершено.

Доказательство леммы 12. Пусть $V(K_4) = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$. Без ограничения общности можно предположить, что $v_1 \in V_1$, $v_2 \in V_2$ и $v_3, v_4 \in V_3$. Положим, $V_{12} = V_1 \cup V_2$. Согласно (8), имеем

(15) либо $E(<V_{12}>) \cap E(X) \neq \varnothing$, либо $E(<_3V>) \cap E(X) \neq \varnothing$,

где $X = C_p, C_q, C_r, C_s$.

Согласно (7), достаточно рассмотреть ситуацию, когда

(16) $$\mathrm{cl}(<V_3>) \leqq 5.$$

Из последнего неравенства следует, что мы можем предположить

(17) $$E(<V_{12}>) \cap E(C_p) \neq \varnothing,$$

(18) $$E(<V_{12}>) \cap E(C_q) \neq \varnothing,$$

(19) $$E(<V_{12}>) \cap E(C_r) \neq \varnothing.$$

Рассмотрим два случая.

Случай 1.

(20) $$E(<V_3>)\cap E(C_s)\neq\varnothing.$$

Из v_3, $v_4\in V_3$, (20) и (16) вытекает, что хотя бы два из сечений $V_3\cap V(C_p)$, $V_3\cap V(C_q)$, $V_3\cap V(C_r)$ пустые. Следовательно, мы можем предположить, что

(21) $$V_{12}\supset V(C_p),\quad V_{12}\supset V(C_q).$$

Рассмотрим два подслучая:

Подслучай 1а.

(22) $$V_{12}\cap V(C_s)\neq\varnothing.$$

Из v_1, $v_2\in V_{12}$, (19), (21) и (22) вытекает, что $<V_{12}>$ содержит $K_5+C_p+C_q=L(p,q,3)$ и $V_i\cap V(K_5)\neq\varnothing$, $i=1, 2$. Согласно лемме 11, один из подграфов $<V_1>$, $<V_2>$ является (3, 3)-графом Рамсея.

Подслучай 1б. $V_{12}\cap V(C_s)=\varnothing$. Ясно, что

(23) $$V_3\supset V(C_s).$$

Если $V_3\cap V(C_r)\neq\varnothing$, тогда, согласно (23), и v_3, $v_4\in V_3$, $<V_3>$ содержит C_3+C_s и, согласно (7), $<V_3>\to(3, 3)$. В противном случае

(24) $$V_{12}\supset V(C_r).$$

Из v_1, $v_2\in V_{12}$, (21) и (24) получаем, что $<V_{12}>$ содержит $K_2+C_p+C_q+C_r$ и лемма 12 вытекает из леммы 11.

Случай 2. $E(<V_3>)\cap E(C_s)=\varnothing$. Ясно, что

(25) $$E(<V_{12}>)\cap E(C_s)\neq\varnothing.$$

Из v_3, $v_4\in V_3$ и (16) следует, что хотя бы одно из сечений $V_3\cap V(C_p)$ $V_3\cap V(C_q)$, $V_3\cap V(C_s)$, $V_3\cap V(C_r)$ пустое. Мы предположим, что

(26) $$V_{12}\supset V(C_p).$$

Теперь v_1, $v_2\in V_{12}$ вместе с (18), (19), (25) и (26) дает, что $<V_{12}>$ содержит $K_8+C_p=L(p, 3, 3)$. Так как $v_1\in V_1$ и $v_2\in V_2$, то, согласно лемме 11, один из подграфов $<V_1>$, $<V_2>$ является (3, 3)-графом Рамсея. Лемма 12 доказана.

Доказательство леммы 13. Допустим, что утверждение а) неверно и пусть, например, $|V_1\cap V(C_p)|<p/2$. Тогда $|_2V\cap V(C_p)|>p/2$. Согласно (8), $E(<V_2>)\cap E(C_p)\neq\varnothing$. Из $\mathrm{cl}(<V_2>)\leqq 5$ и $|V_2\cap V(K_4)|=2$ получаем $E(<V_2>)\cap E(C_q)=\varnothing$. Применяя (8), получаем $|V_2\cap V(C_q)|<q/2$. Следовательно, $|V_1\cap V(C_q)|>q/2$.

Доказательство леммы 14. Положим, $V_{12}=V_1\cup V_2$. Так как $<V_i>$, $i=1, 2, 3$, не являются (3, 3)-графами Рамсея, то

(27) $$\mathrm{cl}(<V_3>)\leqq 5,$$

(28) $$\mathrm{cl}(<V_{12}>)\leqq 10.$$

Сначала покажем, что хотя бы два из сечений $E(<V_3>)\cap E(C_{r_i})$, $i=1, 2, 3, 4$, непусты. Допустим противное. Тогда хотя бы три из сечений $E(<V_{12}>)\cap F(C_{r_i})$, $i=1, 2, 3, 4$, непусты. Без ограничения общности можно предположить, что

(29) $$E(<V_{12}>)\cap E(C_{r_i})\neq\varnothing,\quad i=1,\ 2,\ 3.$$

Из этого следует

(30) $$V_3\cap V(C_{r_i})\neq\varnothing,\quad i=1,\ 2,\ 3$$

(если это неверно, тогда для некоторого i, $1\leq i\leq 3$, подграф $<V_{12}>$ содержит $K_8+C_{r_i}=L(3,\ 3,\ r_i)$ и $V_i\cap V(K_8)\neq\varnothing$, $i=1,\ 2$, что противоречит лемме 11).

Если $V_3\supset V(C_{r_4})$, то, согласно (30), $<V_3>$ содержит $C_3+C_{r_4}$, что противоречит (7). В противном случае $V_{12}\cap V(C_{r_4})\neq\varnothing$. Из $|V_i\cap V(K_4)|=2$, $i=1,\ 2$, и (29) вытекает cl $(<V_{12}>)\geq 11$, что противоречит (28).

Итак, мы доказали, что хотя бы два из сечений $E(<V_3>)\cap E(C_{r_i})$, $i=1,\ 2,\ 3,\ 4$, непусты. Следовательно, мы можем предположить, что

(31) $$E(<V_3>)\cap E(C_{r_i})\neq\varnothing,\quad i=3,\ 4.$$

Согласно (31) и (27),

(32) $$E(<V_{12}>)\cap E(C_{r_i})\neq\varnothing,\quad i=1,\ 2.$$

Покажем, что $V_3\cap V(C_{r_i})=\varnothing$, $i=1,\ 2$. Допустим противное и пусть, например, $V_3\cap V(C_{r_1})=\varnothing$. Тогда из (27) и (31) получаем $V_3\cap V(C_{r_2})=\varnothing$. Следовательно,

(33) $$V_{12}\supset V(C_{r_2}).$$

Заметим, что

(34) $$V_{12}\cap V(C_{r_i})\neq\varnothing,\quad i=3,\ 4$$

(в противном случае $<V_3>$ будет содержать либо $C_3+C_{r_3}$, либо $C_3+C_{r_4}$, что противоречит (7)). Из $|V_i\cap V(K_4)|=2$, $i=1,\ 2$, (32), (33) и (34) вытекает, что $<V_{12}>$ содержит $K_8+C_{r_2}=L(3,\ 3,\ r_2)$ и $V_i\cap V(K_8)\neq\varnothing$, $i=1,\ 2$, что противоречит лемме 11. Этим мы доказали, что $V_3\cap(C_{r_i})=\varnothing$, $i=1,\ 2$, следовательно,

(35) $$<V_{12}>\supset C_{r_1}+C_{r_2}.$$

Из $|V_i\cap V(K_4)|=2$, $i=1,\ 2$, и (35) получаем

(36) $$V_{12}\cap V(C_{r_i})=\varnothing,\quad i=3,\ 4$$

(в противном случае $<V_{12}>$ будет содержать $K_5+C_{r_1}+C_{r_2}$ и $V_i\cap V(K_5)\neq\varnothing$, $i=1,\ 2$, что противоречит лемме 11). Из (35) и (36) следует $<V_3>=C_{r_3}+C_{r_4}$. Для окончательного доказательства утверждения а) остается показать, что $r_3\geq 5$ и $r_4\geq 5$. Эти неравенства вытекают из (7), так как $<V_3>$ не является (3, 3)-графом Рамсея.

Утверждение б) является очевидным следствием из а) и леммы 13.

7. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 3

Допустим противное, т. е. что существуют нечетные числа $p\geq 3$, $q\geq 3$, $r\geq 3$, $s\geq 3$, такие, что граф $F_5(p,\ q,\ r,\ s)=K_5+C_p+C_q+C_r+C_s$ не является (3, 3, 3)-графом Рамсея. Положим, $V(K_5)=\{v_1,\ v_2,\ v_3,\ v_4,\ v_5\}$. Пусть $E(F_5,\ (p,\ q,\ r,\ s))=E_1\cup E_2\cup E_3$ является 3-раскраской ребер графа $F_5(p,\ q,\ r,\ s))$ без монохроматических треугольников. Напомним, что $A_i(v)=\{v'\in V(F(p,\ q,\ r,\ s)),\ [v,\ v']\in E_i\}$, $1\leq i\leq 3$. Ясно, что

(37) $$<A_1(v_i)\cup A_2(v_i)\cup A_3(v_i)> = F_4(p, q, r, s), \quad 1\leq i\leq 5.$$

Положим, $\alpha_i(v_j)=|A_i(v_j)\cap V(K_5)|$, $1\leq i\leq 3$, $1\leq j\leq 5$. Если $\alpha_i(v')>0$, $i=1, 2, 3$, для некоторой вершины $v'\in V(K_5)$, тогда согласно лемме 12 и (37), один из подграфов $<A_i(v')>$, $i=1, 2, 3$, является (3, 3)-графом Рамсея. Согласно лемме 9, есть монохроматический треугольник, что является противоречием. Поэтому мы будем предполагать, что $\alpha_1(v_i)\alpha_2(v_i)=\alpha_3(v_i)=0$, $i=1, 2, 3, 4, 5$. Теперь из лемм 7 и 8 вытекает, что достаточно рассмотреть следующую ситуацию:

(38) $$\alpha_1(v_i)=\alpha_2(v_i)=2, \quad \alpha_3(v_i)=0, \quad 1\leq i\leq 5.$$

Согласно лемме 14, к (38) можно еще добавить следующее:

(39) $$<A_3(v_1)> = C_r+C_s, \quad r\geq 5, \quad s\geq 5.$$

Но тогда $E(C_r+C_s)\subset E_1\cup E_2$, так как иначе будет треугольник третьего цвета. Согласно лемме 8, без ограничения общности можно предположить, что

(40) $$E(C_r)\subseteq E_1, \quad E(C_s)\subseteq E_1.$$

Так как нет монохроматических треугольников, то из (8) и (40) вытекает что $|A_1(v_i)\cup V(C_r)|<r/2$ и $|A_1(v_i)\cap V(C_s)|<s/2$, $1\leq i\leq 5$. Согласно лемме 14б), либо $|A_1(v_i)\cap V(C_p)|>p/2$, либо $|A_1(v_i)\cap V(C_q)|>q/2$, $1\leq i\leq 5$. Следовательно, существуют вершины $v', v'', v'''\in V(K_5)$ такие, что одновременно $|A_1(v')\cap V(C_p)|>p/2$, $|A_1(v'')\cap V(C_p)|>p/2$, $A_1(v''')\cap V(C_p)|>p/2$, либо одновременно $|A_1(v')\cap V(C_q)|>q/2$, $|A_1(v'')\cap V(C_q)|>p/2$, $|A_1(v''')\cap V(C_q)|>q/2$. Мы предположим, что

(41) $$|A_1(v)\cap V(C_p)|>p/2, \quad v=v', v'', v'''.$$

Так как нет монохроматических треугольников, то из (38) вытекает, что хотя бы одна из сторон треугольника $[v', v'', v''']$ принадлежит E_1. Пусть, например, $[v', v'']\in E_1$. Согласно (41), существует вершина $v_0\in A_1(v')\cap A_1(v'')$. Из этого следует, что $[v_0, v', v'']$ является монохроматическим треугольником первого цвета. Это противоречит нашему допущению.

Осталось показать, что $F_5(p, q, r, s)$ является критическим (3, 3, 3)-графом Рамсея. Это, однако, очевидно, так как любой собственный подграф этого графа имеет хроматическое число меньше 17. Согласно лемме 3, эти подграфы не являются (3, 3, 3)-графами Рамсея.

Теорема 3 доказана полностью.

Следствие 1. $N(3, 3, 3, 14)=25$.

Доказательство. Согласно теореме 1, $N(3, 3, 3;\ 14)\geq 25$. Рассмотрим граф $F_5(5, 5, 5, 5)$. Согласно теореме 3, этот граф является (3, 3, 3)-графом Рамсея. Так как он имеет кликовое число 13 и 25 вершин, то $N(3, 3, 3;\ 14)\leq 25$.

Используя известную теорему Кенига о том, что если граф имеет хроматическое число больше 2, тогда он содержит простой цикл нечетной длины, получаем

Следствие 2. Пусть A_i, $1\leq i\leq 4$, — графы и $\chi(A_i)\geq 3$. Тогда граф $K_5+A_1+A_2+A_3+A_4$ является (3, 3, 3)-графом Рамсея.

Ясно, что $N(3, 3, 3;\ q)=17$, если $q>17$. Кроме числа $N(3, 3, 3;\ 14)$, известны еще следующие константы: $N(3, 3, 3;\ 17)=19$ [15], $N(3, 3, 3;\ 16)=21$ [3] и $N(3, 3, 3;\ 15)=23$ [4].

ЛИТЕРАТУРА

1. Ненов Н. Графи на Ремзи и някои константи, свързани с тях. Дисертация, Соф. унив., 1980.
2. Ненов Н., Хаджииванов Н. О графах, содержащих монохроматический треугольник при произвольной двухцветной раскраске ребер. — Сердика, 5, 1979, 303 — 305.
3. Ненов Н. Об одном предположении Лина, относящемся к числам Рамсея — Грахама—Спенсера.— Докл. БАН, 33, 1980, 1171 — 1174.
4. Ненов Н. Обобщение одной теоремы Грийнвуда и Глисона о трицветных раскрасках ребер полного графа с 17 вершинами. — Докл. БАН. 34, 1981, 1209 — 1212.
5. Ненов Н. Усиление неравенств Лина, относящихся к теории Рамсея. — Докл. БАН, 34, 1981, 307 — 310.
6. Ненов Н. Некоторые применения чисел Зыкова в теории Рамсея. — Год. Соф. унив., Фак. мат. и мех., 74 (в печати).
7. Ненов Н. О числах Зыкова и некоторых их применениях в теории Рамсея. — Сердика, 9, 1983, 161—167.
8. Ненов Н., Хадживанов Н. О минимальных t-графах. — Сердика, 6, 1980, 128 — 142.
9. Ненов Н. Об одной константе, связанной с (3, 4)-графами Рамсея. — Сердика, 7, 1981, 336—371.
10. Ненов Н. О настоящих трехцветных раскрасках ребер полных графов — В: Математика и математическо образование. Докл. Единадесета пролетна конф., април, 1982. София, 1982, 242—247.
11. Зыков А. О некоторых свойствах линейных комплексов. — Мат. сборник, 24, 1949, 163 — 188.
12. Ramsey P. On a problem of formal logic. — London Math. Soc., 30, 1930, 264—286.
13. Greenwood R., Gleason A. Combinatorial relation and chromatic graphs. — Canad. J. Math., 7 1955, 1—7.
14. Graver J., Yackel J. Some graph theoretic results associated with Ramsey theorem. — J. Combin. Theory, 3, 1968, 1—51.
15. Lin S. On Ramsey number and $\overrightarrow{K_r}$-coloring of graphs. — J. Combin. Theory, Ser B, 12, 1972, 82—92.
16. Nesetril J., Rödl V. The Ramsey property for graphs with forbinden complete subgraphs. — J. Combin. Theory, Ser. B, 20, 1976, 243—249.
17. Street A. Summe-free sets. — Lecture Notes Math., 292, 1972, 123—271.
18. Kery G. Ramsey egy grafelmeleti teteleröl. — Math. Lapok, 15, 1964, 264—286.

Поступила 18. 2. 1982

A LOWER BOUND FOR SOME CONSTANTS RELATED TO THE RAMSEY GRAPHS

N. D. Nenov

(SUMMARY)

In this paper only finite non-oriented graphs without loops and without multiple edges are considered. For a graph G, the symbols $V(G)$ and $E(G)$ denote respectively the sets of vertices and edges of G. A subset $v_1,\dots, v_p$ of vertices of G is called a p-clique if any two of them are adjacent. The biggest number p, for which G contains a p-clique is denoted by $\mathrm{cl}(G)$. Any decomposition:

$$E(G)=E_1\cup E_2\cup\dots\cup E_s,\ E_i\cap E_j=\varnothing,\ i\neq j, \tag{1}$$

is called an s-colouring of the edges of graph G. In case that all edges of some p-clique belong to a given E_i, we say that this is a monochromatic p-clique of the i-th colour for the s-colouring (1).

Definition. The graph G is called a $(p_1, \ldots, p_s)$-Ramsey graph, for some set of integers $p_1, \ldots, p_s$ if for every s-colouring of the edges of G there exists an i, $1 \leqq i \leqq s$, such that G contains a monochromatic p_i-clique of the i-th colour.

The symbol $R(p_1, \ldots, p_s)$ denotes the minimal natural number s such that the complete graph with n vertices is a $(p_1, \ldots, p_s)$-Ramsey graph and the symbol $N(p_1, \ldots, p_s;\ q)$ — the minimal natural number n such that there exists a $(p_1, \ldots, p_s)$-Ramsey graph G with $|V(G)| = n$ and $\mathrm{cl}(G) < q$.

In this paper we prove the following theorems:

Theorem 1. Let $R(p_1, \ldots, p_s) > 6$. Then

$$N(p_1, \ldots, p_s);\ R(p_1, \ldots, p_s) - 3) \geqq R(p_1, \ldots, p_s) + 8.$$

Theorem 3. Let $p \geqq 3$, $q \geqq 3$, $r \geqq 3$, $s \geqq 3$ be odd integers. Then $K_s + C_p + C_q + C_r + C_s$ is a (3, 3, 3)-Ramsey graph. Moreover, this graph is critical in the sense that every proper subgraph is not a (3, 3, 3)-Ramsey one.

From Theorem 1 and 3 it follows that $N(3, 3, 3;\ 14) = 25$.

ГОДИШНИК НА СОФИЙСКИЯ УНИВЕРСИТЕТ „КЛИМЕНТ ОХРИДСКИ“

ФАКУЛТЕТ ПО МАТЕМАТИКА И МЕХАНИКА

Том 75 Книга 1 — Математика 1981

ANNUAIRE DE L'UNIVERSITÉ DE SOFIA „KLIMENT OHRIDSKI"

FACULTÉ DE MATHÉMATIQUES ET MÉCANIQUE

Tome 75 Livre 1 — Mathématiques 1981

ИНВАРИАНТНИ ЛИНЕЙНИ СВЪРЗАНОСТИ ВЪРХУ ЕЛИПТИЧНОТО ДВУОСНО ПРОСТРАНСТВО

Дечко Митов, Адриян Борисов

Дечко Митов, Адриян Борисов. **Инвариантные линейные связности на биаксиальном пространстве эллиптического типа.**

Фундаментальная группа G_7 биаксиального пространства эллиптического типа B^e 7-мерна. Доказывается, что на B^e не существует ни одной G_7-инвариантной линейной связности и что среди подгрупп группы G_7 только 4-мерная $G_4=G_7\cap O(4)$ является подгруппой, относительно которой существуют инвариантные линейные связности. Проводится описание этих связностей. Показывается, что однородное пространство, соответствующее группе G_4, редуктивно. Выделяется класс полусимметрических G_4-инвариантных линейных связностей, как и тех, удовлетворяющих аксиому плоскости.

Dečko Mitov, Adrijan Borisov. **Invariant Linear Connections on the Elliptic Biaxial Space.**

The fundamental group G_7 of the elliptic biaxial space B^e is of dimension 7. It is shown that no G_7-invariant linear connection exists on B^e and, among the subgroups of G_7, only the 4-dimensional $G_4=G_7\cap O(4)$ admits invariant linear connections. These connections are described It is shown that the homogeneous space corresponding to G_4 is reductive. The class of all semi-symmetric G_4-invariant linear connections is separated, as well as the class of all ones satisfying the plane axiom.

Елиптичното двуосно пространство B^e се определя посредством групата G_7 от всички колинеации на тримерното реално проективно пространство $\mathbf{RP}^3$, които запазват две различни комплексно спрегнати прави j_1 и j_2. Именно B^e е клайновото пространство с основно пространство $\mathbf{RP}^3$ и основна група G_7.

Нека ∇ е линейна свързаност върху хомогенното пространство G/H. Всеки елемент $g\in G$ определя лява транслация върху G/H с диференциал g_*. Ако $g_*(\nabla_X Y)=\nabla_{gX}(g_*Y)$ за всяко $g\in G$ и за всеки две векторни полета X, Y върху G/H, то ∇ се нарича G-инвариантна (или инвариантна относно G). Цел на изследването е да се намерят подгрупите на G_7 с максимален брой измерения, относно които съществува инвариантна линейна свързаност върху B^e, представено като факторпространство [2].

Нека A_1, A_2, A_3, A_4 са върховете на координатния тетраедър на фиксирана реална проективна координатна система. Предполагаме, че правата j_1 минава през точките A_1+iA_3 и A_2+iA_4, а j_2 — през A_1-iA_3 и A_2-iA_4, където i е имагинерната единица. Тогава след нормиране групата G_7 може да се представи посредством специалната линейна група $SL(4, \mathbf{R})$ по следния начин:

$$(1)\qquad G_7=\left\{\left\|\begin{array}{cccc} a & b & f & k \\ c & d & m & n \\ -f & -k & a & b \\ -m & -n & c & d \end{array}\right\| \in SL(4, \mathbf{R})\right\}/\{\pm I_4\},$$

където I_4 е единична матрица 4×4; необходимостта на нормировката ще бъде изяснена по-късно. Чрез матрично умножение на елемент на G_7 от вида (1) с матрица-стълб от четворка хомогенни координати на точка от B^e е определено изображение $G_7\times B^e \to B^e$ от клас C^∞, т. е. ляво действие на лиевата група G_7 върху B^e. Това действие е транзитивно. Да означим точката A_1 с o. Условията за неподвижност на o, а именно $c=f=m=0$ в (1), определят подгрупа (групата на изотропия на o) на G_7:

$$(2)\qquad H_4=\left\{\left\|\begin{array}{cccc} a & b & 0 & k \\ 0 & d & 0 & n \\ 0 & -k & a & b \\ 0 & -n & 0 & d \end{array}\right\| \in G_7\right\}.$$

Понеже в (2) $a^2(d^2+n^2)=1$ и $a>0$, групата H_4 е свързана. Освен това [3, гл. II] многообразието G_7/H_4 е хомеоморфно (дори дифеоморфно) на B^e, понеже G_7 е локално компактна група, удовлетворяваща втората аксиома за изброимост, а B^e е локално компактно (дори компактно). Следователно [3, гл. II] групата G_7 е свързана. Дифеоморфизмът $gH_4 \to go$ отъждествява G_7/H_4 с B^e.

Нека $\mathrm{Aut}\,(T_o(B^e))$ е групата на автоморфизмите на допирателното пространство $T_o(B^e)$ към B^e в точката o. Хомоморфизмът $H_4 \to \mathrm{Aut}\,(T_o(B^e))$, който на $h\in H_4$ съпоставя диференциала $h_{*o}: T_o(B^e) \to T_o(B^e)$, се нарича линейно изотропно представяне на H_4. Нека $\{e_1, e_2, e_3\}$ е естествената база на $\mathbf{R}^3$. За всеки три линейно независими вектора X_1, X_2, $X_3 \in T_o(B^e)$ линейният репер $u_o=(X_1, X_2, X_3)$ може да се разглежда като изоморфизъм $u_o:\mathbf{R}^3 \to T_o(B^e)$, а именно $u_o e_i=X_i$ за $i=1, 2, 3$. По такъв начин $T_o(B^e)$ се отъждествява с $\mathbf{R}^3$, а линейното изотропно представяне на H_4 — с хомоморфизма $\lambda: H_4 \to GL(3, \mathbf{R})$, за който

$$(3)\qquad \lambda(h)=u_0^{-1}\,.\,h_{*o}\,.\,u_0 \text{ за } h\in H_4.$$

Нека $B^e_o=\{\, p={}^t(p^0, p^1, p^2, p^3)\in B^e \,|\, p^0 \neq 0\}$ (горният индекс t означава транспониране на матрицата). Използуваме координатното изображение $x: B_o^e \to \mathbf{R}^3$ с координатни функции x^1, x^2, x^3, определени по следния начин:

$$x^i(p) = p^i/p^0, \quad i = 1, 2, 3. \tag{4}$$

Специално за точката o имаме $x(o) = (0, 0, 0)$. Всеки елемент $h \in H_4$ от вида (2) трансформира точката ${}^t(p^0, p^1, p^2, p^3)$ в точката ${}^t(ap^0 + bp^1 + kp^3, dp^1 + np^3, -kp^1 + ap^2 + bp^3, -np^1 + dp^3)$. Посредством (4) получаваме

$$h(x^{-1}(u^1, u^2, u^3)) = x^{-1}((du^1 + nu^3)/(a + bu^1 + ku^3), (-ku^1 + au^2 + bu^3)/ (a + bu^1 + ku^3), (-nu^1 + du^3)/(a + bu^1 + ku^3)) \text{ за } (u^1, u^2, u^3) \in \mathbf{R}^3. \tag{5}$$

Векторите $(\partial/\partial x^1)_o$, $(\partial/\partial x^2)_o$, $(\partial/\partial x^3)_o$ са допирателни в o съответно към линиите $\{x^{-1}(s, 0, 0)\}$, $\{x^{-1}(0, s, 0)\}$, $\{x^{-1}(0, 0, s)\}$, където s описва реален интервал. Въз основа на (5) намираме

$$\frac{d}{ds} h(x^{-1}(s, 0, 0))|_{s=0} = x^{-1}(d/a, -k/a, -n/a),$$

$$\frac{d}{ds} h(x^{-1}(0, s, 0))|_{s=0} = x^{-1}(0, 1, 0),$$

$$\frac{d}{ds} h(x^{-1}(0, 0, s))|_{s=0} = x^{-1}(n/a, b/a, d/a).$$

Полагаме $u_o = ((\partial/\partial x^1)_o, (\partial/\partial x^2)_o, (\partial/\partial x^3)_o)$ и заместваме в (3)

$$\lambda(h) = \left\| \begin{matrix} d/a & 0 & n/a \\ -k/a & 1 & b/a \\ -n/a & 0 & d/a \end{matrix} \right\|. \tag{6}$$

Непосредствената проверка показва, че намереното линейно изотропно представяне е точно, т. е. хомоморфизмът $\lambda: H_4 \to GL(3, \mathbf{R})$ е мономорфизъм. Точността на представянето (6) се постига благодарение на нормировката в (1). До същата нормировка може да се стигне и по друг начин. Групата G_7 действува транзитивно върху B^e и следователно индуцира по очевиден начин транзитивно действие върху разслоението на линейните репери $L(B^e)$. Това действие е свободно (т. е. ако даден елемент $g \in G_7$ запазва неподвижна една точка на $L(B^e)$, то g е единицата на G_7) тогава и само тогава, когато представянето λ е точно.

И така групите G_7 и H_4 са свързани, G_7 действува транзитивно върху B^e и линейното изотропно представяне на H_4 е точно. Нека $\mathfrak{g}$ и $\mathfrak{h}$ са лиевите алгебри съответно на G_7 и H_4, а λ_* е диференциалът на λ. Тогава [5; 1, гл. X] множеството на G_7-инвариантните линейни свързаности върху хомогенното пространство G_7/H_4 е в биективно съответствие с множеството на онези линейни изображения $\Lambda: \mathfrak{g} \to GL(3, \mathbf{R})$ на $\mathfrak{g}$ в лиевата алгебра на $GL(3, \mathbf{R})$, за които

$$\Lambda(Y) = \lambda_*(Y), \quad \Lambda([Y, X]) = [\lambda_*(Y), \Lambda(X)]; \quad Y \in \mathfrak{h}, X \in \mathfrak{g}. \tag{7}$$

Твърдение 1. Върху хомогенното пространство $B^e = G_7/H_4$ не съществува G_7-инвариантна линейна свързаност.

Доказателство. Нека $Y \in \mathfrak{h}$. Тогава от (2) получаваме

$$
(8) \qquad Y=\left\|\begin{matrix} \bar\alpha & \bar\beta & 0 & \bar\varkappa \\ 0 & -\bar\alpha & 0 & \bar\nu \\ 0 & -\bar\varkappa & \bar\alpha & \bar\beta \\ 0 & -\bar\nu & 0 & -\bar\alpha \end{matrix}\right\|,
$$

където $\bar\alpha$, $\bar\beta$, $\bar\varkappa$, $\bar\nu \in \mathbf{R}$. Нека $s \in \mathbf{R}$. Тогава

$$
\exp(sY)
$$

$$
=\left\|\begin{matrix} e^{s\bar\alpha} & s(-\bar\varkappa\sin(s\bar\nu)+\bar\beta\cos(s\bar\nu))e^{s\bar\alpha} & 0 & s(\bar\beta\sin(s\bar\nu)+\bar\varkappa\cos(s\bar\nu))e^{s\bar\alpha} \\ 0 & \cos(s\bar\nu)e^{-s\bar\alpha} & 0 & \sin(s\bar\nu)e^{-s\bar\alpha} \\ 0 & -s(\bar\beta\sin(s\bar\nu)+\bar\varkappa\cos(s\bar\nu))e^{s\bar\alpha} & e^{s\bar\alpha} & s(-\bar\varkappa\sin(s\bar\nu)+\bar\beta(\cos(s\bar\nu))e^{s\bar\alpha} \\ 0 & -\sin(s\bar\nu)e^{-s\bar\alpha} & 0 & \cos(s\bar\nu)e^{-s\bar\alpha} \end{matrix}\right\|.
$$

Използуваме (6) и намираме

$$
(9) \qquad \lambda_*(Y)=\frac{d}{ds}\,\lambda(\exp(sY))\big|_{s=0}=\left\|\begin{matrix} -2\bar\alpha & 0 & \bar\nu \\ -\bar\varkappa & 0 & \bar\beta \\ -\bar\nu & 0 & -2\bar\alpha \end{matrix}\right\|.
$$

Нека $X \in \mathbf{g}$, т. е. съгласно (1)

$$
(10) \qquad X=\left\|\begin{matrix} \alpha & \beta & \varphi & \varkappa \\ \zeta & -\alpha & \mu & \nu \\ -\varphi & -\varkappa & \alpha & \beta \\ -\mu & -\nu & \zeta & -\alpha \end{matrix}\right\|,
$$

където α, β, ζ, φ, $\varkappa$, μ, $\nu \in \mathbf{R}$. Тогава $\Lambda(X)$ е матрица 3×3 с компоненти

$$
(11) \qquad \Lambda_j^i(X)=A_j^i\alpha+B_j^i\beta+C_j^i\zeta+F_j^i\varphi+K_j^i\varkappa+M_j^i\mu+N_j^i\nu, \quad i,\ j=1,\ 2,\ 3,
$$

където с i са номерирани редовете, а с j — стълбовете на $\Lambda(X)$, а коефициентите $A_j^i, \ldots, N_j^i$ са реални числа. Заместваме в (11) X с Y от (8) и въз основа на полученото, формула (9) и първото равенство на (7) намираме

$$
A_1^1+2=A_2^1=A_3^1=A_1^2=A_2^2=A_3^2=A_1^3=A_2^3=A_3^3+2=0,
$$

$$
B_1^1=B_2^1=B_3^1=B_1^2=B_2^2=B_3^1-1=B_1^3=B_2^3=B_3^3=0,
$$

$$
K_1^1=K_2^1=K_3^1=K_1^2+1=K_2^2=K_3^2=K_1^3=K_2^3=K_3^3=0,
$$

$$
N_1^1=N_2^1=N_3^1-1=N_1^2=N_2^2=N_3^2=N_1^3+1=N_2^3=N_3^3=0.
$$

Пресмятаме матричните комутатори във второто равенство на (7), като използуваме (8), (9), (10) и (11). Заместваме X в (11) с намерения комутатор $[Y, X]$. Сега за компонентите с горен и долен индекс 1 на матриците в двете страни на първото равенство на (7) получаваме

$$-2\beta\zeta+2\varkappa\mu+C_1^1(-2\bar{\alpha}\zeta-\nu\mu)+M_1^1(\nu\zeta-2\bar{\alpha}\mu)+F_1^1(\bar{\varkappa}\zeta+\bar{\beta}\mu)$$

$$=-\bar{\nu}(C_1^3\zeta+M_1^3\mu-\nu+F_3^1\varphi)+\bar{\varkappa}(C_2^1\zeta+M_2^1\mu+F_2^1\varphi)+\bar{\nu}(C_3^1\zeta+M_3^1\mu+\nu+F_3^1\varphi),$$

което трябва да бъде тъждествено удовлетворено за всички реални $\bar{\alpha}$, $\bar{\beta}$, $\varkappa$, ν, α, β, ζ, φ, $\varkappa$, μ, ν. Както се вижда от коефициентите пред $\bar{\beta}\zeta$, това е невъзможно.

При свързана група H хомогенното пространство G/H се нарича редуктивно, ако за лиевите алгебри $\mathbf{g}$ и $\mathbf{h}$ съответно на G и H съществува векторно подпространство $\mathbf{m}$ на $\mathbf{g}$, така че

(12) $$\mathbf{g}=\mathbf{h}\oplus\mathbf{m}, \quad [\mathbf{h}, \mathbf{m}]\subset\mathbf{m}.$$

Подпространството $\mathbf{m}$ се нарича редуктивно допълнение. При фиксирано редуктивно допълнение $\mathbf{m}$ множеството на G-инвариантните линейни свързаности върху G/H е в биективно съответствие [5; 1, гл. X] с множеството на линейните изображения $\Lambda_{\mathrm{m}}:\mathbf{m}\to\mathbf{gl}(\dim G/H, \mathbf{R})$, за които

(13) $$\Lambda_{\mathrm{m}}[(Y, X])=[\lambda_*(Y), \Lambda_{\mathrm{m}}(X)]; \quad Y\in\mathbf{h}, \ X\in\mathbf{m}.$$

Тук λ_* е диференциалът на линейното изотропно представяне $\lambda: H\to GL(\dim G/H, \mathbf{R})$. При това за Λ_{m} и Λ със свойствата (7) (за G и H вместо G_7 и H_4) е в сила

(14) $$\Lambda_{\mathrm{m}}=\Lambda/\mathbf{m}$$

Под канонична свързаност от II род (съответна на редуктивното допълнение $\mathbf{m}$) се разбира G-инвариантната линейна свързаност върху G/H, съответна на тривиалното изображение $\Lambda_{\mathrm{m}}=0$. Каноничната свързаност от I род (съответна на $\mathbf{m}$) се определя като онази G-инвариантна линейна свързаност върху G/H, която е без торзия и чиито геодезични съвпадат с геодезичните на съответната канонична свързаност от II род.

Тъй като върху всяко редуктивно хомогенно пространство G/H съществуват G-инвариантни линейни свързаности (очевидно поне каноничните свързаности от II род), то от твърдение 1 непосредствено получаваме

Следствие 2. Хомогенното пространство G_7/H_4 не е редуктивно.

Сега преминаваме към подгрупите на G_7, като използуваме класификацията им в [4].

Има само една 6-мерна подгрупа на G_7-групата:

(15) $$G_6=\{\exp\begin{Vmatrix} a & b & f & k \\ c & d & m & -f \\ -f & -k & a & b \\ -m & f & c & d \end{Vmatrix}\in SL(4, \mathbf{R})\}/\{\pm I_4\}.$$

Лиевата група G_6 действува транзитивно върху B^e. Тя е локално компактна и удовлетворява втората аксиома за изброимост. Групата на изотропия $H_3 \subset G_6$ на точката o е

$$(16) \qquad H_3 = \left\{ \left\| \begin{matrix} a & b & 0 & k \\ 0 & 1/a & 0 & o \\ 0 & -k & a & b \\ 0 & 0 & 0 & 1/a \end{matrix} \right\| \in GL(4, \mathbf{R}) \mid a > 0 \right\}$$

и очевидно е свързана. Следователно групата G_6 е свързана.

Твърдение 3. Върху хомогенното пространство $B^e = G_6/H_3$ не съществува G_6-инвариантна линейна свързаност.

Доказателство. Означаваме с $\mathfrak{g}$ и $\mathfrak{h}$ лиевите алгебри съответно на G_6 и H_3. Нека $Y \in \mathfrak{h}$. Според (16) Y има вида (8), където е положено $\bar{\nu} = 0$. Следователно за диференциала λ_* на линейното изотропно представяне на H_3 се получава (9), където $\nu = 0$. Непосредствената проверка показва, че това представяне е точно. Нека $X \in \mathfrak{g}$. От (15) виждаме, че X има вида (10), където сме положили $\nu = -\varphi$. Тогава $\Lambda(X)$ е матрица 3×3 с компоненти (11), където $N_i{}^j = 0$, $i, j = 1, 2, 3$. Сега от първото равенство на (7)

$$A_1^1 + 2 = A_2^1 = A_3^1 = A_1^2 = A_2^2 = A_3^2 = A_1^3 = A_2^3 = A_3^3 + 2 = 0,$$

$$B_1^1 = B_2^1 = B_3^1 = B_1^2 = B_2^2 = B_3^2 - 1 = B_1^3 = B_2^3 = B_3^3 = 0,$$

$$K_1^1 = K_2^1 = K_3^1 = K_1^2 + 1 = K_2^2 = K_3^2 = K_1^3 = K_2^3 = K_3^3 = 0.$$

След заместване във второто равенство на (7) за компонентите с горен и долен индекс 1 на матриците в лявата и в дясната страна на равенството получаваме

$$-2\bar{\beta}\zeta + 2\bar{\varkappa}\mu - 2C_1^1\bar{\alpha}\zeta - 2M_1^1\bar{\alpha}\mu + F_1^1(\bar{\beta}\mu + \bar{\varkappa}\zeta) = \bar{\varkappa}(C_2^1\zeta + M_2^1\mu + F_2^1\varphi),$$

което обаче не е тъждествено удовлетворено за всички $\bar{\alpha}$, $\bar{\beta}$, $\bar{\varkappa}$, α, β, ζ, φ, $\varkappa$, μ, както се вижда от коефициентите пред $\bar{\beta}\zeta$.

Следствие 4. Хомогенното пространство G_6/H_3 не е редуктивно.

Транзитивни 5-мерни подгрупи на G_7 няма. Измежду 4-мерните подгрупи на G_7 транзитивна е единствено групата G_4, представляваща сечение на G_7 с ортогоналната група $O(4)$. Групата G_4 е локално компактна и удовлетворява втората аксиома за изброимост. Групата на изотропия $H \subset G_4$ на точката o е

$$(17) \qquad H = \left\{ \left\| \begin{matrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos n & 0 & \sin n \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\sin n & 0 & \cos n \end{matrix} \right\| \mid n \in \mathbf{R} \right\} / \{\pm I_4\}.$$

Очевидно H е свързана. Следователно групата G_4 е свързана.

Твърдение 5. Линейните свързаности върху хомогенното пространство $B^e = G_4/H$, инвариантни относно G_4, образуват 7-параметрично семейство.

Доказателство. Нека $Y \in \mathbf{h}$, където $\mathbf{h}$ е лиевата алгебра на H. От (17) получаваме

$$Y = \begin{Vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \bar{\nu} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\bar{\nu} & 0 & 0 \end{Vmatrix}, \tag{18}$$

където $\bar{\nu} \in \mathbf{R}$. Като използуваме (9), за линейното изотропно представяне $\lambda : H \to GL(3, \mathbf{R})$ намираме

$$\lambda_*(Y) = \begin{Vmatrix} 0 & 0 & \bar{\nu} \\ 0 & 0 & 0 \\ -\bar{\nu} & 0 & 0 \end{Vmatrix}. \tag{19}$$

Нека $X \in \mathbf{g}$, където $\mathbf{g}$ е лиевата алгебра на G_4. Понеже $G_4 = G_7 \cap O(4)$, то X е от вида в (10), като същевременно матрицата е антисиметрична:

$$X = \begin{Vmatrix} 0 & \beta & \varphi & \varkappa \\ -\beta & 0 & \varkappa & \nu \\ -\varphi & -\varkappa & 0 & \beta \\ -\varkappa & -\nu & -\beta & 0 \end{Vmatrix} \tag{20}$$

и за линейното изображение $\Lambda : \mathbf{g} \to \mathbf{gl}\,[(3, \mathbf{R})$ компонентите на матрицата $\Lambda(X)$ (3×3) имат вида $B_j{}^i\beta + F_j{}^i\varphi + K_j{}^i\varkappa + N_j{}^i\nu$ с реални коефициенти $B_j{}^i$, $F_j{}^i$, $K_j{}^i$, $N_j{}^i$, i, $j = 1, 2, 3$. От първото равенство на (7) получаваме $N_3^1 = -N_1^3 = 1$, а всички останали $N_j{}^i = 0$. След заместване на Y от (18), X от (20) и $\lambda_*(Y)$ от (19) във второто равенство на (7) получаваме системата

$$-\bar{\nu}(B_3^1\beta + F_3^1\varphi + K_3^1\varkappa + B_1^3\beta + F_1^3\varphi + K_1^3\varkappa) = (-B_1^1\varkappa + K_1^1\beta)\bar{\nu},$$

$$-\bar{\nu}(B_2^3\beta + F_2^3\varphi + K_2^3\varkappa) = (-B_2^1\varkappa + K_2^1\beta)\bar{\nu},$$

$$-\bar{\nu}(B_1^1\beta + F_1^1\varphi + K_1^1\varkappa - B_3^3\beta - F_3^3\varphi - K_3^3\varkappa) = (-B_3^1\varkappa + K_3^1\beta)\bar{\nu},$$

$$-\bar{\nu}(B_3^2\beta + F_3^2\varphi + K_3^2\varkappa) = (-B_1^2\varkappa + K_1^2\beta)\bar{\nu},$$

$$0 = (-B_2^2\varkappa + K_2^2\beta)\bar{\nu},$$

$$\bar{\nu}(B_1^2\beta + F_1^2\varphi + K_1^2\varkappa) = (-B_3^2\varkappa + K_3^2\beta)\bar{\nu},$$

$$\bar{\nu}(B_1^1\beta + F_1^1\varphi + K_1^1\varkappa - B_3^3\beta - F_3^3\varphi - K_3^3\varkappa) = (-B_1^3\varkappa + K_1^3\beta)\bar{\nu},$$

$$\nu(B_2^1\beta + F_2^1\varphi + K_2^1\varkappa) = (-B_2^3\varkappa + K_2^3\beta)\bar{\nu},$$

$$\nu(B_1^3\beta + F_1^3\varphi + K_1^3\varkappa + B_3^1\beta + F_3^1\varphi + K_3^1\varkappa) = (-B_3^3\varkappa + K_3^3\beta)\bar{\nu},$$

която трябва да се удовлетворява тъждествено за всички реални $\bar{\nu}$, β, φ, $\varkappa$, ν. От тази система получаваме

$$B_1^1 = B_3^1 = B_2^2 = B_1^3 = B_3^3 = 0,$$

$$F_2^1 = F_1^2 = F_3^2 = F_1^3 + F_3^1 = F_2^3 = F_3^3 - F_1^1 = 0,$$

$$K_1^1 = K_2^1 + B_2^3 = K_3^1 = K_1^2 + B_3^2 = K_2^2 = K_3^2 - B_1^2 = K_1^3 = K_2^3 - B_2^1 = K_3^3 = 0$$

и следователно

$$(21) \qquad \Lambda(X) = \begin{Vmatrix} F_1^1\varphi & B_2^1\beta - \beta_2^3\varkappa & F_3^1\varphi + \nu \\ B_1^2\beta - B_3^2\varkappa & F_2^2\varphi & B_3^2\beta + B_1^2\varkappa \\ -F_3^1\varphi - \nu & B_2^3\beta + B_2^1\varkappa & F_1^1\varphi \end{Vmatrix}$$

с независими параметри B_2^1, B_1^2, B_3^2, B_2^3, F_1^1, F_3^1, $F_2^2 \in \mathbf{R}$.

Следващият резултат дава възможност за по-прецизно описание на G_4-инвариантните линейни свързаности.

Твърдение 6. Хомогенното пространство G_4/H е редуктивно. Редуктувните допълнения образуват 1-параметрично семейство $\{\mathbf{m}_\rho\}$, където

$$(22) \qquad \mathbf{m}_\rho = \left\{ \begin{Vmatrix} 0 & \beta & \varphi & \varkappa \\ -\beta & 0 & \varkappa & \rho\varphi \\ -\varphi & -\varkappa & 0 & \beta \\ -\varkappa & -\rho\varphi & -\beta & 0 \end{Vmatrix} \;\middle|\; \beta, \varphi, \varkappa \in \mathbf{R} \right\}$$

с параметър $\rho \in \mathbf{R}$.

Доказателство. От (20) виждаме, че векторното пространство $\mathbf{g}$ притежава база $\{X_1, X_2, X_3, X_4\}$, където

$$(23) \qquad X_1 = \begin{Vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{Vmatrix}, \quad X_2 = \begin{Vmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix},$$

$$X_3 = \begin{Vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix}, \quad X_4 = \begin{Vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{Vmatrix}.$$

От (18) следва, че $\mathfrak{h}=\{\alpha X_4 \mid \alpha \in \mathbf{R}\}$. Нека $\mathfrak{m}$ е подпространство на $\mathfrak{g}$, удовлетворяващо първото равенство на (12). Това означава, че $\mathfrak{m}$ има база от вида $\{X_1+\pi X_4,\ X_2+\rho X_4,\ X_3+\sigma X_4\}$, като π, ρ, $\sigma \in \mathbf{R}$. Подпространството $\mathfrak{m}$ изпълнява второто равенство на (12) тогава и само тогава, когато $[X_4, X_i] \in \mathfrak{m}$ за $i=1, 2, 3$. От (23) получаваме

$$[X_4, X_1]=-X_3, \quad [X_4, X_2]=0, \quad [X_4, X_3]=X_1.$$

Следователно второто равенство на (12) е изпълнено тогава и само тогава, когато $\pi=\sigma=0$. По такъв начин при фиксирано ρ елементите на съответното редуктивно допълнение имат вида на матриците в (22).

От твърдение 5, твърдение 6, (20), (21) и (14), като пишем Λ_ρ, вместо $\Lambda_{\mathfrak{m}_\rho}$ получаваме

Следствие 7. За всяко редуктивно допълнение $\mathfrak{m}_\rho$ линейните свързаности върху хомогенното пространство $B^e = G_4/H$, инвариантни относно G_4, образуват 7-параметрично семейство, намиращо се в биективно съответствие с множеството на изображенията $\Lambda_\rho : \mathfrak{m}_\rho \to \mathfrak{gl}(3, \mathbf{R})$ от вида

$$(24) \qquad \Lambda_\rho(X) = \left\| \begin{matrix} F_1^1\varphi & B_2^1\beta - B_2^3\varkappa & (F_3^1+\rho)\varphi \\ B_1^2\beta - B_3^2\varkappa & F_2^2\varphi & B_3^2\beta + B_1^2\varkappa \\ -(F_3^1+\rho)\varphi & B_2^3\beta + B_2^1\varkappa & F_1^1\varphi \end{matrix} \right\|,$$

$$X = \left\| \begin{matrix} 0 & \beta & \varphi & \varkappa \\ -\beta & 0 & \varkappa & \rho\varphi \\ -\varphi & -\varkappa & 0 & \beta \\ -\varkappa & -\rho\varphi & -\beta & 0 \end{matrix} \right\|$$

с независими параметри B_2^1, B_1^2, B_3^2, B_2^3, F_1^1, F_3^1, $F_2^2 \in \mathbf{R}$.

За да намерим явния вид на G_4-инвариантните линейни свързаности върху G_4/H, достатъчно е да получим стойностите им o. Използуваме координатното изображение $y: B_o^e \to \mathbf{R}^3$ с координатни функции $y^i=-x^i$, $i=1, 2, 3$. Ако $X \in \mathfrak{g}$, то 1-параметричната подгрупа $\{\exp(sX)\}$ действува върху B^e и определя там векторно поле $\bar{X}$. Специално за $Y_1=X_1$, $Y_2=X_2+\rho X_4$, $Y_3=X_3$ имаме

$$\exp(sY_1) = \left\| \begin{matrix} \cos s & \sin s & 0 & 0 \\ -\sin s & \cos s & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos s & \sin s \\ 0 & 0 & -\sin s & \cos s \end{matrix} \right\|,$$

$$\exp(sY_2) = \left\| \begin{matrix} \cos s & 0 & \sin s & 0 \\ 0 & \cos(s\rho) & 0 & \sin(s\rho) \\ -\sin s & 0 & \cos s & 0 \\ 0 & -\sin(s\rho) & 0 & \cos(s\rho) \end{matrix} \right\|,$$

$$\exp(sY_3) = \begin{Vmatrix} \cos s & 0 & 0 & \sin s \\ 0 & \cos s & \sin s & 0 \\ 0 & -\sin s & \cos s & 0 \\ -\sin s & 0 & 0 & \cos s \end{Vmatrix}.$$

Ако $p \in B_o^e$ и вместо локалните координати $y^1(p)$, $y^2(p)$, $y^3(p)$ пишем съответно p_o^1, p_o^2, p_o^3, то

$$y((\exp(sY_1))(p)) = ((\operatorname{tg} s + p_o^1)/(1 - p_o^1 \operatorname{tg} s),\ (p_o^2 + p_o^3 \operatorname{tg} s)/(1 - p_o^1 \operatorname{tg} s),$$
$$(-p_o^2 \operatorname{tg} s + p_o^3)/(1 - p_o^1 \operatorname{tg} s)),\ y((\exp(sY_2))(p)) = ((p_o^1 + p_o^3 \operatorname{tg}(s\rho))/(1 - p_o^2 \operatorname{tg} s),$$
$$(\operatorname{tg} s + p_o^2)/(1 - p_o^2 \operatorname{tg} s),\ (-p_o^1 \operatorname{tg}(s\rho) + p_o^3)/(1 - p_o^2 \operatorname{tg} s)),\ y((\exp(sY_3))(p))$$
$$= ((p_o^1 + p_o^2 \operatorname{tg} s)/(1 - p_o^3 \operatorname{tg} s),\ (-p_o^1 \operatorname{tg} s + p_o^2)/(1 - p_o^3 \operatorname{tg} s),$$
$$(\operatorname{tg} s + p_o^3)/(1 - p_o^3 \operatorname{tg} s)).$$

Понеже за j-тата координатна функция на $\overline{Y}_i$ имаме

$$(\overline{Y}_i)^j = \frac{d}{ds} y^j((\exp(sY_i))(p))\big|_{s=0}, \quad i, j = 1, 2, 3,$$

то

(25) $$\overline{Y}_1 = (1 + (y^1)^2)\,\partial/\partial y^1 + (y^3 + y^1 y^2)\partial/\partial y^2 + (-y^2 + y^1 y^3)\,\partial/\partial y^3,$$
$$\overline{Y}_2 = (\rho y^3 + y^1 y^2)\partial/\partial y^1 + (1 + (y^2)^2\partial/\partial y^2 + (-\rho y^1 + y^2 y^3)\partial/\partial y^3,$$
$$\overline{Y}_3 = (y^2 + y^1 y^3)\partial/\partial y^1 + (-y^1 + y^2 y^3)\partial/\partial y^2 + (1 + (y^3)^2)\partial/\partial y^3.$$

Специално за $\partial_i = (\partial/\partial y^i)_o$ имаме $\partial_i = (\overline{Y}_i)_o$, $i = 1, 2, 3$.

Твърдение 8. Инвариантните линейни свързаности ∇ в следствие 7 имат в o следните стойности:

$$\nabla_{\partial_1} \partial/\partial y^1 = B_1^2 \partial_2,\ \nabla_{\partial_1} \partial/\partial y^2 = B_2^1 \partial_1 + (1 + B_2^3)\,\partial_3,\ \nabla_{\partial_1} \partial/\partial y^3 = (B_3^2 - 1)\,\partial_2,$$
(26) $$\nabla_{\partial_2} \partial/\partial y^1 = F_1^1 \partial_1 - F_3^1 \partial_3,\ \nabla_{\partial_2} \partial/\partial y^2 = F_2^2 \partial_2,\ \nabla_{\partial_2} \partial/\partial y^3 = F_3^1 \partial_1 + F_3^3 \partial_3,$$
$$\nabla_{\partial_3} \partial/\partial y^1 = (1 - B_3^2)\partial_2,\ \nabla_{\partial_3} \partial/\partial y^2 = -(1 + B_2^3)\partial_1 + B_2^1 \partial_3,\ \nabla_{\partial_3} \partial/\partial y^3 = B_1^2 \partial_2.$$

Доказателство. За $i, j = 1, 2, 3$ имаме [1, гл. X]

(27) $$(\nabla_{\overline{Y}_i} \overline{Y}_j)_o = (u_o \circ (\Lambda_\rho(Y_i)) \circ u_o^{-1})(\partial_j) + [\overline{Y}_i\ \overline{Y}_j]_o,$$

където u_0 е линеен репер в o. За намиране на $[\overline{Y}_i, \overline{Y}_j]_o$ е удобно да се използува равенството $[\overline{Y}_i, \overline{Y}_j]_o = \overline{[Y_i, Y_j]}_o$. Получаваме

(28) $$[\overline{Y}_1, \overline{Y}_2]_o = (1 - \rho)\partial_3, [\overline{Y}_1\ \overline{Y}_3]_o = -2\partial_2, [\overline{Y}_2, \overline{Y}_3] = (1 - \rho)\partial_1,$$

като за второто равенство е използувана валидността на импликацията, „ако $X \in \mathfrak{h}$, то $\overline{X}_0 = 0$“. Избираме $u_0 = (\partial_1, \partial_2, \partial_3)$ и от (24), (27) и (28) намираме

$$\nabla_{\partial_1} \overline{Y}_1 = B_1^2 \partial,\ \nabla_{\partial_1} \overline{Y}_2 = B_2^1 \partial_1 + (B_2^3 + 1 - \rho)\partial_3,\ \nabla_{\partial_1} \overline{Y}_3 = (B_3^2 - 2)\partial_2,$$

$$\nabla_{\partial_2}\overline{Y}_1=F^1_1\partial_1-(F^1_3+1)\partial_3,\quad \nabla_{\partial_2}\overline{Y}_2=F^2_2\partial_2,\quad \nabla_{\partial_2}\overline{Y}_3=(F^1_3+1)\partial_1+F^1_1\partial_3,$$

$$\nabla^{\partial_3}\overline{Y}_1=(2-B^2_3)\partial_2,\quad \nabla_{\partial_3}\overline{Y}_2=(\rho-1-B^3_2)\,\partial_1+B^1_2\partial_3,\quad \nabla_{\partial_3}\overline{Y}_3=B^2_1\,\partial_2.$$

След заместване на Y_i с равните им от (25) получаваме (26).

Многообразията с линейна свързаност, удовлетворяваща аксиомата на равнината, се характеризират по определение със съществуване на автопаралелни подмногообразия през всяка точка и във всяко направление. Необходимо условие за това е свързаността да бъде полусиметрична. Определението на полусиметрична линейна свързаност ще бъде приведено в доказателството на

Твърдение 8. В следствие 7 инвариантните полусиметрични линейни свързаности ∇ образуват 5-параметрично семейство, определено чрез (26) при

(29) $$B^2_3-1=F^1_3+B^3_2+1=0.$$

Доказателство. Полусиметричността на ∇ означава, че торзията ѝ T има вида

(30) $$T(\partial_i,\ \partial_j)=(t(\partial_j)\partial_i-t(\partial_i)\partial_j)/2,\quad i,\ j=1\ ,2,\ 3,$$

където $t(\partial_i)=\mathrm{trace}\ (X\rightarrow T(X,\ \partial_i)$. От (26) намираме

$$T(\partial_1,\ \partial_2)=B^1_2-F^1_1)\partial_1+(F^1_3+B^3_2+1)\partial_3,$$

$$T(\partial_1,\ \partial_3)=2(B^2_3-1)\partial_2,$$

$$T(\partial_2,\ \partial_3)=(F^1_3+B^3_2+1)\partial_1+(F^1_1-B^1_2)\partial_3,$$

Следователно

$$t(\partial_1)=0,\quad t(\partial_2)=2\,(B^1_2-F^1_1),\quad t(\partial_3)=0.$$

Заместването им в (30) води до (29).

Въпреки че в известен смисъл каноничните свързаности от II род са „най-прости", те не са полусиметрични. Наистина според твърдение 9 необходимо условие за полусиметричност е $B^2_3=1$, което противоречи на дефиниционното равенство $\Lambda_\rho=0$ за каноничност от II род.

Отделяме семейството на G_4-инвариантните линейни свързаности, удовлетворяващи аксиомата на равнината:

Твърдение 10. В следствие 7 инвариантните линейни свързаности ∇, удовлетворяващи аксиомата на равнината, образуват 2-параметрично семейство, определено чрез (26) при

(31) $$B^2_1=B^2_3-1=B^3_2+1=F^1_3=F^2_2-B^1_2-F^1_1=0.$$

Доказателство. Нека линейната свързаност ∇ в следствие 7 е полусиметрична. Тогава необходимо и достатъчно условие ∇ да удовлетворява аксиомата на равнината е кривината ѝ R да има вида

(32) $$R(\partial_j,\ \partial_k)\partial_m=(-5S(\partial_m,\ \partial_j)\partial_k+S(\partial_j,\ \partial_m)\partial_k+2r(\partial_m,\ \partial_j)\partial_k$$

$$+5S(\partial_m,\ \partial_k)\partial_j-S(\partial_k,\ \partial_m)\partial_j-2r(\partial_m,\ \partial_k)\partial_j-2S(\partial_j,\ \partial_k)\partial_m+2S(\partial_k,\ \partial_j)\partial_m$$

$$+4r(\partial_j,\ \partial_k)\partial_m)/8,\quad j,\ k,\ m=1,\ 2,\ 3,$$

където $S(\partial_m, \partial_j) = \operatorname{trace}(X \to R(X, \partial_j)\partial_m)$ и $r(\partial_m, \partial_j) = \operatorname{trace}(X \to R(\partial_m, \partial_j)X)$. Понеже хомогенното пространство G_4/H е редуктивно, пресмятаме R по формулата [1, гл. X]

$$R(\partial_j, \partial_k) = u_o \circ ([\Lambda_\rho(Y_j), \Lambda_\rho(Y_k)] - \Lambda_\rho([Y_j, Y_k]_{\mathfrak{m}_\rho})$$

$$-\lambda_*([Y_j, Y_k] \mid \mathfrak{h})) \circ u_o^{-1},$$

където $u_o = (\partial_1, \partial_2, \partial_3)$. Като имаме пред вид (29), получаваме

$$R(\partial_1, \partial_2) = \left\| \begin{matrix} 0 & B_2^1(F_2^2 - F_1^1) + (B_2^3)^2 & 0 \\ B_1^2(F_1^1 - F_2^2) + B_2^3 & 0 & F_1^1 - F_2^2 - B_1^2 B_2^3 \\ 0 & 0 & 0 \end{matrix} \right\|,$$

$$R(\partial_1, \partial_3) = \left\| \begin{matrix} B_1^2 B_2^3 - B_2^1 - 2F_1^1 & 0 & B_2^1 B_1^2 + 3B_2^3 + 4 \\ 0 & 2(B_2^1 - B_1^2 B_2^3 - F_2^2) & 0 \\ -3B_2^3 - B_2^1 B_1^2 - 4 & 0 & B_1^2 B_2^3 - B_2^1 - 2F_1^1 \end{matrix} \right\|,$$

$$R(\partial_2, \partial_3) = \left\| \begin{matrix} 0 & 0 & 0 \\ F_1^1 - F_2^2 - B_1^2 B_2^3 & 0 & B_1^2(F_2^2 - F_1^1) - B_2^3 \\ 0 & B_2^1(F_1^1 - F_2^2) - (B_2^3)^2 & 0 \end{matrix} \right\|,$$

откъдето

$$S(\partial_1, \partial_1) = B_1^2(F_2^2 - F_1^1) + 2B_2^3 + B_2^1 B_1^2 + 4, \quad S(\partial_1, \partial_2) = 0,$$

$$S(\partial_1, \partial_3) = -B_2^1 - F_1^1 - F_2^2,$$

$$S(\partial_2, \partial_1) = 0, \quad S(\partial_2, \partial_2) = 2(B_2^1(F_2^2 - F_1^1) + (B_2^3)^2), \quad S(\partial_2, \partial_3) = 0,$$

$$S(\partial_3, \partial_1) = B_2^1 + F_1^1 + F_2^2, \; S(\partial_3, \partial_2) = 0, \; S(\partial_3, \partial_3) = B_1^2(F_2^2 - F_1^1) + 2B_2^3 + B_2^1 B_1^2 + 4,$$

$$r(\partial_1, \partial_2) = 0, \quad r(\partial_1, \partial_3) = -4F_1^1 - 2F_2^2, \quad r(\partial_2, \partial_3) = 0.$$

Заместваме в (32) и получаваме (31), като пак сме използували (29). Независими остават само два от параметрите B_2^1, F_1^1, F_2^2.

Понеже каноничните свързаности от II род не са полусиметрични, те не удовлетворяват аксиомата на равнината. Каноничните свързаности от I род са без торзия и следователно са полусиметрични.

Твърдение 11. Измежду каноничните свързаности от I род върху хомогенното пространство G_4/H само съответната на редуктивното допълнение $\mathfrak{m}_{-1}$ удовлетворява аксиомата на равнината.

Доказателство. Каноничната свързаност от I род ∇, съответна на редуктивното допълнение $\mathfrak{m}_\rho$, се определя [1, гл. X] от равенствата (27) и

(33) $$2(\Lambda_\rho(Y_i))(u_0^{-1}\partial_j) = -u_0^{-1}([\bar{Y}_i \; \bar{Y}_j]_0), \quad i, j = 1, 2, 3.$$

От (24), (28) и (33) получаваме $B_2^1 = B_1^2 = B_3^2 - 1 = 2B_2^3 - \rho + 1 = F_1^1 = F_2^2 = 2F_3^1 + \rho + 1$. Тези равенства и (31) дават $\rho = -1$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Кобаяси Ш., Номидзу К. Основы дифференциальной геометрии. Т. 2. Москва, 1981.
2. Митов Д. Инвариантни линейни свързаности върху хиперболичното двуосно пространство. — В: Математика и математическо образование. Докл. Единадесета пролетна конф., април 1982. С., 1982, 235 — 241.
3. Хелгасон С. Дифференциальная геометрия и симметрические пространства. Москва, 1964.
4. Широков А. П. Классификация групп движений биаксиального пространства эллиптического типа. — Уч. зап. КГУ, 123, 1963, № 1, 208—221.
5. Wang H. C. On invariant connections over a principal fibre bundle. — Nagoya Math. J., 13, 1958, 1—19.

Постъпила на 3. 3. 1982 г.

INVARIANT LINEAR CONNECTIONS ON THE ELLIPTIC BIAXIAL SPACE

D. Mitov , A. Borisov

(SUMMARY)

The elliptic biaxial space B^e is defined by the group G_7 of all collineations of the projective space $\mathbf{RP}^3$ preserving two distinct complex conjugate lines. Namely, B^e is the Kleinian space with underlying space $\mathbf{RP}^3$ and fundamental group G_7.

The 7-dimensional Lie group G_7 is isomorphic to $(GL(2, \mathbf{C})_{\mathbf{R}} \cap SL(4, \mathbf{R}))/\{\pm I_4\}$:

$$G_7=\left\{\left\|\begin{matrix} a & b & f & k \\ c & d & m & n \\ -f & -k & a & b \\ -m & -n & c & d \end{matrix}\right\| \in SL(4,\mathbf{R})\right\}/\{\pm I_4\},$$

where I_4 is the unit of $GL(4, \mathbf{R})$. The group G_7 is connected and it acts transitively on B^e. Its isotropy group H_4 of the point $o=(1, 0, 0, 0)$ of B^e is connected. On the homogeneous space $B^e=G_7/H_4$ there is no G_7-invariant linear connection. Hence the space G_7/H_4 is not reductive.

There exists only one 6-dimensional subgroup G_6 of G_7:

$$G_6=\left\{\exp\left\|\begin{matrix} a & b & f & k \\ c & d & m & -f \\ -f & -k & a & b \\ -m & f & c & d \end{matrix}\right\| \in SL(4,\mathbf{R})\right\}/\{\pm I\}.$$

The connected Lie group G_6 acts transitively on B^e. Its isotropy group H_3 of o is connected. On the homogeneous space $B^e = G_6/H_3$ there is no G_6-invariant linear connection. Hence the space G_6/H_3 is not reductive.

There is no 5-dimensional subgroup of G_7 with transitive action on B^e. Among the 4-dimensional subgroup of VG_7 only $G_4 = G_7 \cap O(4)$ acts transitively on B^e. The group G_4 and its isotropy group H of o are connected. The homogeneous space G_4/H is reductive. It admits a 1-parameter family of reductive complements. There exists a 7-parameter family G_4-invariant linear connections on $B^e = G_4/H$. The G_4-invariant semi-symmetric linear connections form a 5-parameter family. No canonical connection of the second kind is semi-symmetric. The G_4-invariant linear connections satisfying the plane axiom form a 2-parameter family. Only one canonical connection of the first kind satisfies the plane axiom.

ГОДИШНИК НА СОФИЙСКИЯ УНИВЕРСИТЕТ „КЛИМЕНТ ОХРИДСКИ"

ФАКУЛТЕТ ПО МАТЕМАТИКА И МЕХАНИКА

Том 75 Книга 1 — Математика 1981

ANNUAIRE DE L'UNIVERSITÉ DE SOFIA „KLIMENT OHRIDSKI"

FACULTÉ DE MATHÉMATIQUES ET MÉCANIQUE

Tome 75 Livre 1 — Mathématiques 1981

THE AXIOM OF θ-HOLOMORPHIC 2-PLANES IN THE ALMOST HERMITIAN GEOMETRY

Grozjo Stanilov, Ognjan Kasabov

Грозе Станилов, Огнян Касабов. **Аксиома θ-холоморфных 2-плоскостей в почти Эрмитовой геометрии.**

Доказано, что если почти эрмитовое многообразие удовлетворяет аксиому о θ-голоморфных 2-плоскостях, оно является пространством постоянной секционной кривизны.

Grozjo Stanilov, Ognjan Kasabov. **The Axiom of θ-holomorphic 2-planes in the Almost Hermitian Geometry.**

The axiom of θ-holomorphic 2-planes is introduced. It is proved, that if an almost Hermitian manifold satisfies this axiom for a fixed $\theta \in (0, \pi/2)$ then it is a real space form.

Let N be an n-dimensional submanifold of a 2m-dimensional almost Hermitian manifold M with Riemannian metric g, almost complex structure J and curvature tensor R. Let $\tilde{\nabla}$ and ∇ denote the covariant differentiations on M and N, respectively. The second fundamental form σ is a normal-bundle-valued symmetric 2-form, defined by $\sigma(X, Y)=\tilde{\nabla}_X Y-\nabla_X Y$, where $X, Y \in \mathfrak{X}(N)$. The submanifold N is said to be totally umbilical, if $\sigma(X, Y) =g(X, Y)H$, H being the mean curvature vector of N, i. e. $H=(1/n)$ trace σ. In particular, if $\sigma=0$ N is called a totally geodesic submanifold of M. For $X \in \mathfrak{X}(N)$, $\xi \in \mathfrak{X}(N)^{\perp}$, we write $\tilde{\nabla}_X \xi=-A_\xi X+D_X \xi$, where $-A_\xi X$ (resp. $D_X \xi$) denotes the tangential (resp. the normal) component of $\tilde{\nabla}_X \xi$. A normal vector field ξ is said to be parallel, if $D_X \xi=0$ for each $X \in \mathfrak{X}(N)$.

An almost Hermitian manifold M is said to be a Kähler manifold if $\tilde{\nabla} J \doteq 0$. A Riemannian manifold (resp. a Kähler manifold) is called a real space-form (resp. a complex space-form) if it is of constant sectional curvature (resp. of constant holomorphic sectional curvature).

An n-plane α in a tangent space $T_p(M)$, $p \in M$, i. e. an n-dimensional linear subspace α of $T_p(M)$ is said to be holomorphic (resp. antiholomorphic) if $\alpha=J\alpha$ (resp, $\alpha \perp J\alpha$). An almost Hermitian manifold M is said to satisfies the axiom of holomorphic $2n$-planes (resp. $2n$-spheres) if for each point $p \in M$ and for any holomorphic $2n$-plane α in $T_p(M)$ there exists a totally geodesic submanifold N of M (resp. a totally umbilical submanifold N of M with non-zero parallel mean curvature vector) such that $p \in N$ and $T_p(N) = \alpha$. By changing the holomorphic $2n$-planes with antiholomorphic n-planes, we obtain the axiom of antiholomorphic n-planes (resp. n-spheres).

The second author has proved in [2]:

Theorem A. Let M be a $2m$-dimensional almost Hermitian manifold, $m \geqq 2$. If M satisfies the axiom of holomorphic $2n$-planes or $2n$-spheres for some fixed integer n, $1 \leqq n < m$, it is an R-manifold (i. e. $R(X, Y, Z, U) = R(JX, JY, JZ, JU)$ for all $X, Y, Z, U \in \mathfrak{X}(M)$) of pointwise constant holomorphic sectional curvature.

Theorem B. Let M be a $2m$-dimensional almost Hermitian manifold, $m > 2$. If M satisfies the axiom of antiholomorphic n-planes or n-spheres for some fixed integer n, $1 < n \leqq m$, it is a real space-form or a complex space-form.

For the case of a Kähler manifold see e. g. [1, 3, 4].

For a 2-plane α in $T_p(M)$ the angle $\sphericalangle(\alpha, J\alpha) \in [0, \pi/2]$ between α and $J\alpha$ is defined by

$$\cos \sphericalangle(\alpha, J\alpha) = |g(x, Jy)|,$$

where $\{x, y\}$ is an orthonormal basis of α. Then α is holomorphic (resp. antiholomorphic) if and only if $\sphericalangle(\alpha, J\alpha) = 0$ (resp. $\sphericalangle(\alpha, J\alpha) = \pi/2$). In general, if $\sphericalangle(\alpha, J\alpha) = \theta$, α is called θ-holomorphic 2-plane. Now we propose the next axiom:

Axiom of θ-holomorphic 2-plane (resp. 2-spheres). For each point $p \in M$ and for any θ-holomorphic 2-plane α in $T_p(M)$ there exists a totally geodesic submanifold N of M (resp. a totally umbilical submanifold N of M with nonzero parallel mean curvature vector) such that $p \in N$ and $T_p(N) = \alpha$.

Theorem. Let M be a $2m$-dimensional almost Hermitian manifold, $m \geqq 2$. If M satisfies the axiom of θ-holomorphic 2-planes or the axiom of θ-holomorphic 2-spheres for a fixed $\theta \in (0, \pi/2)$, then M is a real space-form.

Proof. Let $p \in M$ and x, y be arbitrary unit vectors in $T_p(M)$, such that $x \perp y, Jy$. Then the 2-plane α with a basis $\{x, Jx \cos\theta + y \sin\theta\}$ is θ-holomorphic Let N be a totally umbilical submanifold of M with parallel mean curvature vector, such that $p \in N$ and $T_p(N) = \alpha$. From the Codazzi's equation

$$\{R(X, Y)Z\}^{\perp} = (\bar\nabla_X \sigma)(Y, Z) - (\bar\nabla_Y \sigma)(X, Z)$$

for $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(N)$, where $\{R(X, Y)Z\}^{\perp}$ denotes the normal component of $R(X, Y)Z$ and

$$(\bar\nabla_X \sigma)(Y, Z) = D_X \sigma(Y, Z) - \sigma(\nabla_X Y, Z) - \sigma(Y, \nabla_X Z)$$

it is easy to find

$$R(Jx \cos\theta + y \sin\theta, x, x, Jy) = 0, \tag{1}$$

$$R(Jx \cos\theta + y \sin\theta, x, x, Jx \sin\theta - y \cos\theta) = 0. \tag{2}$$

We change x by $-x$ in (1) and combining the result with (1) we derive

$$(3) \qquad R(Jx, x, x, Jy) = 0.$$

On the other hand, from (2) and (3) we obtain

$$(4) \qquad H(x) = K(x, y),$$

where

$$H(x) = R(x, Jx, Jx, x), \quad K(x, y) = R(x, y, y, x).$$

It follows from (4) that

$$(5) \qquad H(x) = H(y).$$

Let $m > 2$ and u, v be arbitrary unit vectors in $T_p(M)$. We choose a unit vector x in $T_p(M)$, such that $x \perp u, Ju, v, Jv$. According to (5)

$$H(u) = H(x) = H(v)$$

i. e. M is of pointwise constant holomorphic sectional curvature. Let $c = H(x)$. Using (4) we conclude, that M is of pointwise constant antiholomorphic sectional curvature c.

Now, let β be an arbitrary 2-plane in $T_p(M)$ and let $\measuredangle(\beta, J\beta) = \varphi$. Then it is easy to prove, that β has an arthonormal basis $\{x, Jx \cos\varphi + y \sin\varphi\}$, where x, y are unit vectors in $T_p(M)$, $x \perp y, Jy$. Then the sectional curvature of β is

$$K(\beta) = R(x, Jx\cos\varphi + y\sin\varphi, Jx\cos\varphi + y\sin\varphi, x)$$

and using (3), (4) and (5) we find $K(\beta) = c$. Now the assertion follows from the Schurs's theorem.

If $m = 2$, let $T = R - c\pi_1$, where $c = H(x)$ and

$$\pi_1(x, y, z, u) = g(x, u) g(y, z) - g(x, z) g(y, u).$$

Then from (3), (4) and (5) we obtain easily $T = 0$ and consequently M is a real space-form.

Corollary. Let M be a $2m$-dimensional Kähler manifold, $m \geqq 2$. If M satisfies the axiom of θ-holomorphic 2-planes or the axiom of θ-holomorphic 2-spheres for a fixed $\theta \in (0, \pi/2)$ then M is flat.

REFERENCES

1. Chen B.-Y., Ogiue K. Some characterizations of complex space forms. — Duke Math J., 40, 1973, 797—799.
2. Kassabov O. On the axiom of planes and the axiom of spheres in the almost Hermitian geometry. — Сердика, 8, 1982, 109—114.
3. Nomizu K. Conditions for constancy of the holomorphic sectional curvature. — J. Differ. Geom., 8, 1973, 335—339.
4. Yano K., Mogi I. On real representation of Kaehler manifolds. — Ann. Math., 61, 1955, 170—189.

Received 13. 3. 1982

АКСИОМА НА θ-ХОЛОМОРФНИТЕ 2-МЕРНИ РАВНИНИ В ПОЧТИ ЕРМИТОВАТА ГЕОМЕТРИЯ

Г. Станилов, О. Касабов

(РЕЗЮМЕ)

Нека M е $2m$-мерно почти ермитово многообразие с комплексна структура J. За произволна точка $p \in M$ и 2-мерна равнина α през нея в допирателното пространство $T_p(M)$ се разглежда $\sphericalangle(\alpha, J\alpha) \in [0, \pi/2]$. Ако $\sphericalangle(\alpha, J\alpha) = \theta$, α се нарича θ-холоморфна 2-мерна равнина на M в p. Доказано е, че ако M удовлетворява аксиомата на θ-холоморфните 2-мерни равнини или аксиомата на θ-холоморфните 2-мерни сфери за едно фиксирано $\theta \in (0, \pi/2)$, то M е реална пространствена форма. Аксиомата за θ-холоморфните 2-мерни равнини (респ. θ-холоморфните 2-мерни сфери) гласи: за всяка точка $p \in M$ и всяка θ-холоморфна 2-мерна равнина α в $T_p(M)$ съществува тотално геодезично подмногообразие N на M (респ. тотално омбилично подмногообразие N на M с ненулев паралелен вектор на средната кривина), така че $p \in N$ и $T_p(N) = \alpha$. Едно риманово (респ. келерово) многообразие се нарича реална (респ. комплексна) пространствена форма, ако е с постоянна секционна (респ. постоянна секционна) кривина.

ГОДИШНИК НА СОФИЙСКИЯ УНИВЕРСИТЕТ „КЛИМЕНТ ОХРИДСКИ"
Том 75 1981
ФАКУЛТЕТ ПО МАТЕМАТИКА И МЕХАНИКА
Книга 1 — Математика
ANNUAIRE DE L'UNIVERSITÉ DE SOFIA „KLIMENT OHRIDSKI"
Tome 75 1981
FACULTÉ DE MATHÉMATIQUES ET MÉCANIQUE
Livre 1 — Mathématiques

НЕОБХОДИМО УСЛОВИЕ ЗА ЛОКАЛНА РАЗРЕШИМОСТ НА ОПЕРАТОРИ С ДВУКРАТНИ ХАРАКТЕРИСТИКИ

Петър Попиванов, Чавдар Георгиев

Петър Попиванов, Чавдар Георгиев. **Необходимое условие для локальной разрешимости одного оператора с двукратными характеристиками.**

Доказываются неразрешимость и негипоэллиптичность одного класса псевдодифференциальных операторов с двукратными характеристиками. Главный символ является квадратом вещественного символа главного типа, а субглавный символ не обращается в нуль. Мнимая часть субглавного символа меняет знак при движении вдоль нулевой бихарактеристики главного символа. В частности, доказана теорема о микролокальной неразрешимости и построено решение с заданным волновым фронтом и гладкой правой частью. Мы пользуемся идеей Мойера и одним результатом Хермандера. В процессе доказательства мы нарушаем априорную оценку — необходимое условие для локальной разрешимости.

Petar Popivanov, Tchavdar Georgiev. **A Necessary Condition for the Local Solvability of a Class of Operators Having Double Characteristics.**

A result concerning nonsolvability and nonhypoellipticity for a class of pseudodifferential operators with double characteristics is proved in this paper. The principal symbol is supposed to be a square of a realvalued principal type operator and the subprincipal symbol is nonvanishing. The imaginary part of the subprincipal symbol changes its sign along a null-bicharacteristic of the principal symbol. In particular, a theorem about microlocal nonsolvability is proved and a solution with smooth data and given wave front set is constructed. An idea of Moyer and a recent paper of Hörmander are used in the proof. To do this an a-priory estimate, sufficient for the local solvability, is violated.

§ 1. ПОСТАНОВКА НА ЗАДАЧАТА

В тази статия формулираме и доказваме необходимо условие за локална разрешимост на един клас псевдодиференциални оператори (п. д. о.) над $X\subset\mathbf{R}^n$. За да определим нужния клас оператори, въвеждаме означенията, възприети в [1]. Със Σ означаваме конично подмножество на $T^*(X)$ с коразмерност единица, а със Σ_0 — сечението $\Sigma \cap S^*(X)$.

Дефиниция 1. 1. Казваме, че класическият п. д. о. $P \in L^{2,1,1}(\Sigma)$, ако p е от втори ред, има реален главен символ и за всеки компакт съществува константа C_k, за която е изпълнено

$$(i)\quad |p_2(x, \xi)| \geqq C_k d^2(x, \xi),$$

където

$$d(x, \xi) = \inf(|x-y| + |\xi/|\xi| - \eta|), \quad (x, \xi) \in T^*(X)\backslash 0,$$

а p_2 е главният символ на $P(x, D)$ (дефиницията на клас $L^{M,m,k}(\Sigma)$ е от [1, с. 5]).

Без ограничения на общността ще предполагаме, че $p_2(x, \xi) \geqq 0$. Условието (i) и това, че коразмерността на Σ е единица, ни позволява да извлечем от p_2 гладък квадратен корен $p(x, \xi) = \sqrt{p_2(x, \xi)}$ в конична околност на всяка точка $\rho_0 = (x_0, \xi^0)$. Освен това можем да предполагаме, че (px, ξ) е реалнозначен символ от главен тип. И така разглежданите п. д. о. са от вида

$$P(x, D) = p_2(x, D) + p_1(x, D) + p_0(x, D) + \ldots; \; P \in L^{2,1,1}(\Sigma).$$

В нашите разсъждения основна роля играе поведението на субглавния символ $q_1(x, \xi) = \frac{1}{2i} \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 p_2}{\partial x_j \partial \xi_j}(x, \xi) + p_1(x, \xi)$ на оператора P върху критичното множество Σ. За така дефинирания клас п. д. о. доказваме основната теорема

Теорема 1. 2. Нека $P \in L^{2,1,1}(\Sigma)$ и е изпълнено условието

(A) $q_1(x, \xi) \neq 0$ върху Σ.

Тогава условието

(B) $\operatorname{Im} q_1(x, \xi)$ не си сменя знака, ако се движим в положителна посока по нулевите бихарактеристики на $p(x, \xi)$,

е необходимо за локалната разрешимост на $P(x, D)$.

Теорема 1. 2 е еквивалентна на

Теорема 1. 2'. Нека е изпълнено (A), но (B) не е, т. е. за P съществува нулева бихарактеристика $\gamma(\rho_0, t)$, $a \leqq t \leqq b$, върху която $\operatorname{Im} q_1$ сменя знака си, когато t расте. Тогава P е локално неразрешим в смисъла на дефинициите, дадени в следващия параграф.

§ 2. ДЕФИНИЦИЯ ЗА ЛОКАЛНА РАЗРЕШИМОСТ НА П. Д. О. ВЪРХУ КОМПАКТ

В този параграф даваме няколко еквивалентни дефиниции на локална разрешимост и необходимото условие, формулирано във вид на априорна оценка. Те са изложени подробно от Hörmander [2].

Нека P е п. д. о. с правилен носител върху C^∞- многообразието X и нека K е компакт в X.

Дефиниция 2.1. Казваме, че P е локално разрешим върху K, ако за всяка функция f, принадлежаща на подпространство на $C^\infty(X)$ с крайна коразмерност, можем да намерим $u \in D'(X)$ такова, че

(2.1) $Pu = f$ в околност на K.

Забележка. Това подпространство евентуално зависи от компакта K, околността Y може да зависи от f.

Ако изберем фундаментална редица $K\subset\ldots\subset Y_1\subset Y$ от околности на K, разрешимостта на P върху K означава според дефиниция 2.1, че можем да изберем функции $f_1, f_2, \ldots, f_r \in C^\infty(X)$, такива, че за всяка $f \in C^\infty(X)$ е в сила

$$Pu = f + \sum_{j=1}^{r} a_j f_j \text{ в } Y_N, \quad u \in D'(X). \tag{2.2}$$

Тук

$$H_{(s)}^{\mathrm{loc}} = \{u \in D'(X);\ \mathrm{E}\wedge \in L_{1,0}^{(s)};\ \wedge u \in L_{\mathrm{loc}}^2(X)\},$$

$$H_{(s)}^{(0)}(M) = H_{(s)}^{\mathrm{loc}} \cap \varepsilon'(M);\ \|u\|_s^2 = (2\pi)^{-n} \int (1+|\xi|^2)^s |\hat{u}(\xi)|^2 d\xi.$$

Свързваме така въведените функционални пространства с дефиницията 2.1. за локална разрешимост. В сила е

Предложение 2.2. Ако P е разрешим върху K, тогава може да намерим цяло число N и такава околност Y на K, че за всяка функция $f \in H_{(N)}^{\mathrm{loc}}(X)$ съществува разпределение $u(x)$, за което $Pu-f \in C^\infty(Y)$ (или все едно, операторът P е разрешим по модул C^∞ в Y).

В сила е и обратното твърдение на предложение 2.2.

Предложение 2.3. Ако за всяка функция $f \in H_{(N)}^{\mathrm{loc}}$ съществува $u \in D'(X)$, такова, че $Pu-f \in H_{(N+1)}^{\mathrm{loc}}(Y)$ за някоя околност Y на K (Y може да зависи от f), то P е локално разрешим върху K.

В духа на предложения 2.2 и 2.3 можем да дефинираме разрешимост върху компактно множество от котангенциалното разслоение на X.

Дефиниция 2.4. Нека K е компактно подмножество на $S^*(X)$. Тогава P е локално разрешим върху K, ако съществува $N \in \mathbf{Z}^{+1}$, такава, че за всяка функция $f \in H_{(N)}^{\mathrm{loc}}(X)$ може да се намери разпределение $u(x)$ със свойството

$$K \cap \operatorname{singspec}(Pu-f) = \varnothing. \tag{2.3}$$

От предложения 2.2 и 2.3 следва, че разрешимостта върху компактно множество $M\subset X$ в смисъл на дефиниция 2.1 е еквивалентна на разрешимост върху $S^*(X)$ в смисъл на дефиниция 2.4.

Остава да покажем как от дефиниция 2.4 следва априорна оценка, която съществено използуваме в нашите изследвания.

Предложение 2.5. Нека K е компакт от косферичното разслоение на X и такъв, че $P(x, D)$ е разрешим върху K в смисъл на дефиниция 2.4. Избираме околност $Y\subset X$, такава, че $K\subset S^*(Y)$.

Ако N е числото от дефиниция 2.4, то можем да намерим $\nu \in \mathbf{Z}^+$ и п. д. о. A, такъв, че $\operatorname{singspec} A \cap K = \varnothing$, за който е в сила оценката

$$\|u\|_{(-N)} \leq c(\|P^* u\|_{(\nu)} + \|u\|_{(-N-n)} + \|Au\|_0), \tag{2.4}$$
$$u \in C_0^\infty(Y), \quad c = \mathrm{const} > 0.$$

Тази априорна оценка използуваме при доказателството на теорема 1.2'.

§ 3. МНОЖЕСТВА, ИНВАРИАНТНИ ОТНОСНО ВЕКТОРНО ПОЛЕ

При доказване на основната теорема се придържаме към схемата на Hörmander [2], нарушавайки оценката (2.4). Това означава да намерим асимптотично решение на оператора P^*, който е от специален тип. За тази цел е необхомимо да използуваме резултатите на Бони и Брезис, свързани с инвариантността на множества под действието на векторно поле. Тези резултати играят основна роля при метода на Мойер, който използуваме за построяване на търсеното асимптотично решение. Ограничаваме се само с формулирането им, тъй като подробното им доказателство се намира в [2, с. 78—80].

Нека X е C^2-многообразие и $F \subset X$ е затворено подмножество на X, а $v(x)$ е липшицово векторно поле в X. Трябва да определим условията които v трябва да удовлетворява, за да могат интегралните криви на полето, започващи в F, да останат там за всяко време, следващо t. Ако F има гладка граница, условието е v и външната нормала $n(x)$ към F да сключва ъгъл, по-голям от π. За да се използува този критерий, е необходимо да се направят обобщения на понятието външна нормала към затворено множество с произволна граница.

Дефиниция 3.1. Множеството $N(F)=\{(x, \xi)$, така че можем да намерим функция $f \in C^1$, $f(x)=0$, $df=\xi$ и $f \leqq 0$ в околност на $x \in F\}$.

Ако $g \in C^1$, $g(x)=dg(x)=0$ и положим $f=f+g$, то имаме $f<0$ в $F \backslash x$. В сила е

Теорема 3.2 (Бони). Нека $v(x)$ е липшицово непрекъснато векторно поле в X. Тогава следните две условия са еквивалентни:

(а) всяка интегрална крива на уравнението $\dot{x}(t)=v(x(t))$, $0 \leqq t \leqq T$, за която $x(0) \in F$, където F е затворено множество, се съдържа в F;

(б) $<v(x), n> \leqq 0$ за всяка двойка $(x, n) \in N(F)$.

Теоремата на Бони ни убеждава, че въведеното обобщение на понятието външна нормала към затворено множество има същите свойства по отношение на полето $v(x)$, както в случая на затворено множество с гладка граница. Тогава, като заменим $N(F)$ с $n(x)$, твърдението на теорема **3.2** е очевидно. За нашите цели е важно следствието, което може да се направи от теоремата на Бони.

Следствие 3.3 (Брезис). Нека $q \in C^1(X)$, където X е C^2-многообразие, и нека $v(x)$ е липшицово векторно поле в X, такова, че за всяка интегрална крива $t \to x(t)$ на $v(x)$ да е в сила

$$q(x(0))<0 \Rightarrow q(x(t)) \leqq 0, \quad t>0. \tag{3.1}$$

Нека w е друго C^1-векторно поле, такова, че

$$<w, \operatorname{grad}_x q> \leqq 0, \text{ когато } q=0, \tag{3.2}$$

$$w=v, \text{ когато } q=dq=0. \tag{3.3}$$

Тогава (3.1) остава валидно, ако $x(t)$ се замени с някоя пропорционална интегрална крива на w.

Доказателство. Нека F е затворената обвивка на обединението на всички орбити на полето v за $t>0$, започващи от точки, за които $q(x)<0$. От (3.1) следва, че $q \leqq 0$ върху F и $F \supset$ {затворената обвивка на множеството, където $q<0$}. Орбитите на $v(x)$, започващи в F, трябва да остават в F. Ако $(x, \xi) \in N(F)$, то $x \in \partial F \Rightarrow q(x)=0$. Ако $\operatorname{grad} q(x) \neq 0$, тогава F е ограничена от повърхнината $q=0$ в околност на x и ξ е положително число, кратно на $dq(x) \Rightarrow <w, \xi> <0$ съгласно с (3.2). Ако $dq(x)=0$, то от (**3.3**) следва, че $<w(x), \xi> \leqq 0$. Получихме, че $w(x)$ удовлетворява условие (б) на теорема **3.2** и следователно удовлетворява и условие (а). С това следствието е доказано.

§ 4. ФАКТОРИЗАЦИЯ НА ОПЕРАТОРА P

За въведения в § 1 клас от оператори Попиванов [3] показва, че те могат да бъдат факторизирани на произведения от п. д. о. от главен тип, които се изследват поотделно. В този параграф използуваме идеята за факторизацията, като следваме схемата, изложена в [1], и я прилагаме или микролокално, или в малка конична околност на компактен бихарактеристичен интервал. Нека $P \in L^{2,1,1}(\Sigma)$ удовлетворява предположенията на теорема 1.2′, т. е. съществува бихарактеристика $\gamma(\rho_0, t)$, върху която $\operatorname{Im} q_1(x, \xi)$ сменя знака си при нарастването на t. Нека a и b са такива, че

$$\operatorname{sgn} \operatorname{Im} q_1(\gamma(\rho_0, a)) \neq \operatorname{Sgn} \operatorname{Im} q_1(\gamma(\rho_0, b)).$$

Най-напред определяме околността, в която факторизираме P. За тази цел правим разликата $(b-a)$ възможно най-малка. Без ограничение на общността можем да считаме, че бихарактеристичният интервал $\gamma(\rho_0, t)$ е отворен, т. е. изображението $t \to \gamma(\rho_0, t)$, $t \in [a, b]$, е инективно.

Както в [2], полагаме $L(\rho) = \inf\{t-s,\ a < s < t < b;\ \operatorname{Im} q_1(\gamma(\rho, s))$ и $\operatorname{Im} q_1(\gamma(\rho, t))$ имат различни знаци и ρ е близко до ρ_0, а $\gamma(\rho, t)$ е нулевата бихарактеристика през $\rho \in \Sigma\}$.

Означаваме с L_0 долната граница на $L(\rho)$ за $\rho \to \rho_0$. За достатъчно малко $\varepsilon > 0$ можем да намерим такава отворена околност V_ε на ρ^0 с размерност $2n-2$, $V_\varepsilon \subset \Sigma$ и $\operatorname{diam} V_\varepsilon < \varepsilon$, че $L(\rho) > L_0 - \varepsilon/2$ в V_ε. Ще отбележим, че ρ_0 и ρ не лежат на една бихарактеристика. За някое $\rho_\varepsilon \in V_\varepsilon$ и s_ε, t_ε $(a < s_\varepsilon < t_\varepsilon < b)$ имаме $t_\varepsilon - s_\varepsilon < L_0 + \varepsilon/2$ и $\operatorname{Im} q_1(\gamma(\rho_\varepsilon, s_\varepsilon))$ и $\operatorname{Im} q_1(\gamma(\rho, t))$ имат различни знаци. Оттук заключаваме, че $\operatorname{Im} q_1(\gamma(\rho, t))$ и всичките ѝ производни по направления от V_ε трябва да се анулират в точката $\gamma(\rho, t)$, ако $s_\varepsilon + \varepsilon < t < t_\varepsilon - \varepsilon$. Избираме редицата $\varepsilon_\nu \to 0$, такава, че $\lim s_\varepsilon = a_0$, $\lim t_\varepsilon = b_0$, $L_0 = b_0 - a_0$ и $\operatorname{Im} q_{1(\beta)}^{(\alpha)}(\gamma(\rho_0, t)) = 0$, $a_0 < t < b_0$, за всяка двойка мултииндекси α и β с изключение на направлението, трансверзално на Σ. Означаваме $\Gamma_0 = \{\gamma(\rho_0, t);\ a_0 < t < b_0\}$, като Γ_0 може да бъде точка от Σ или компактен бихарактеристичен интервал. В околност на Γ_0 извършваме факторизация. Тъй като можем да извлечем еднозначен квадратен корен от $q_1(x, \xi)$ в достатъчно малка околност Γ на Γ_0 то в сила е

Теорема 4.1. Нека $P \in L^{2,1,1}(\Sigma)$ и P удовлетворява условието (A) от § 1 в конична околност на проекцията $\tilde{\Gamma}_0$ на Γ_0 върху $S^*(X)$. Тогава съществуват околност $V \supset \tilde{\Gamma}_0$ и функции $\mu_1^1(\rho)$ и $\mu_1^2(\rho)$ $(\rho \in V,\ \mu_1^1 = -\mu_1^2,\ \mu_1^1 = \sqrt{-q_1(x, \xi)})$, които са гладки корени на q_1 във V. Освен това съществуват конична околност Γ на Γ_0 и п. д. о. $S_j^{(\nu)}(x, D)$ със символи от степен на хомогенност $1-j/2$ $(j = 1, 2, \ldots;\ \nu = 1, 2)$, такива, че

$$P(x, D) - \prod_{\nu=1}^{2}\left[p(x, D) + \sum_{j=1}^{\infty} S_j^{(\nu)}(x, D)\right] \in L^{-\infty}(\Gamma), \tag{4.1}$$

$$S_1^{(\nu)}(x, \xi) = -\varepsilon_\nu \sqrt{-q_1(x, \xi)},\quad (x, \xi) \in \Gamma,\quad \varepsilon_\nu = (-1)^\nu. \tag{4.2}$$

На доказателството на теоремата няма да се спираме. И така имаме конична околност Γ на Γ_0 и символи $S_j^{(\nu)}(x, \xi)$, дефинирани в Γ, и $S_j^{(\nu)}(x, \lambda\xi) = \lambda^{1-j/2} S_j^{(\nu)}$. Означаваме $S_1(x, \xi) = \sqrt{-q_1(x, \xi)}$. Тъй като знаем поведението на $q_1(x, \xi)$ в Γ, изследваме свойствата на $S_1(x, \xi)$ в същия конус. Имаме

$$\sqrt{-q_1(x,\xi)}=(-\operatorname{Re} q_1-i\operatorname{Im} q_1)^{1/2}=(-\operatorname{Re} q_1)^{1/2}[1+i\binom{1/2}{1}\frac{\operatorname{Im} q_1}{\operatorname{Re} q_1}$$

$$+O(|\operatorname{Im} q_1|)^2]$$

в малка конична околност на Γ_0. Смятаме, че $\operatorname{Re} q_1<0$. Следователно $\operatorname{Im}\sqrt{-q_1}=\operatorname{Im} S_1(x,\xi)$ променя знака си тогава и само тогава, когато променя знака си $\operatorname{Im} q_1(x,\xi)$.

Върху $\gamma(\rho_0, t)$ знакът на $\operatorname{Im} q_1(\gamma(\rho_0, t))$, респ. знакът на $\operatorname{Im} S_1(\gamma(\rho_0, t))$, се сменя само по определен начин от $+$ на $-$ или от $-$ на $+$, започвайки със стойности, близки до a_0, и свършвайки със стойности, близки до b_0. За оператора P имаме

$$(4.3)\qquad P(x, D)=(P_1P_2)\bmod L^{-\infty}(\Gamma)=(p(x, D)-S_1(x, D)$$

$$+R_0^1(x, D))(p(x, D)+S_1(x, D)+R_0^2(x, D))\bmod L^{-\infty}(\Gamma),$$

където P_1 и P_2 са от главен тип. Попов [1] излага подробно начина, по който може да се опрости видът на някои от операторите P_1 или P_2 в конична околност на точка от $T^{\nu}(X)\backslash 0$. Без особени изменения тази схема функционира и в околност на Γ_0, независимо дали тя е точка или компактен бихарактеристичен интервал.

По-нататък определяме вида на оператора

$$P_2=p(x, D)+S_1(x, D)+R_0^2(x, D).$$

Най-напред в P_2 правим канонична хомогенна смяна на променливите, привеждаща $p(x,\xi)$ в η_1. Тъй като P_2 е от главен тип $\partial_\xi p(x,\xi)\neq 0$ в околност на Γ_0, можем да считаме, че там $\partial_{\xi_1} p(x,\xi)\neq 0$.

Въпреки че каноничната смяна на променливите има микролокален характер, в случая тя може да се реализира в околност на Γ_0, когато Γ_0 е отворен бихарактеристичен интервал. Търсената смяна на променливите се осъществява с умножаването на P_2 с каноничен и. о. Ф. (интегрален оператор на Фурие) с хомогенна фазова функция ψ и позитивен символ. Функцията ψ намираме като решение на задачата на Коши

$$(4.4)\qquad \begin{aligned} &p(x, \psi_x(x,\eta))=\eta_1\\ &\psi(x,\eta)=\langle x,\eta\rangle \text{ върху } V_\varepsilon. \end{aligned}$$

За малко $\varepsilon>0$ задачата има единствено решение в околност на бихарактеристиката $\gamma(\rho_0, t)$, $a_0\leqq t\leqq b_0$ и умножаването на оператора $P_2(x, D)$ с $\psi(x, D)$ отдясно го привежда във вида $D_1+\tilde{S}_1(x, D)+\tilde{R}_0^2(x, D)$. При смяна на променливите бихарактеристиката $\gamma(\rho_0, t)$ преминава в правата $(t, x_0', 0, \xi_0')$, $x=(x_1, x')$, $\xi=(\xi_1, \xi')$. Без ограничение на общността ще считаме, че $x_0'=0$, $\xi_0'=(0, 0,\ldots, 0, 1)$.

Свойството $\operatorname{Im} q_1$ да си сменя знака по определен начин върху бихарактеристиката $\gamma(\rho_0, t)$ се запазва за $\operatorname{Im}\tilde{S}_1(t, 0, 0, \xi_0)$, когато $a_0-\delta<t<b_0+\delta$ (δ е малко положително число). Като използуваме подготвителната теорема на Малгранж, можем да считаме, че в околност на Γ_0 символът $\tilde{S}_1(x,\xi)$ не зависи от ξ_1. И наистина можем да намерим такъв елиптичен п. д. о. B, че

$$(D_1+\tilde{S}_1(x, D)+\tilde{R}_0^2)B-(D_1+S(x, D')+R_0(x, D))\in L^{-\infty}.$$

Като умножим с подходящ п. д. о. A с позитивен символ, получаваме

$$(D_1+S(x,\ D')+R_0)A=\mathbf{A}(D_1+S(x,\ D')\ \mathrm{mod}\ L^{-\infty}.$$

Следващата стъпка е построяването на нехомогенна канонична трансформация в околност на Γ_0, която привежда P_2 в окончателния удобен за пресмятане вид. Искаме нехомогенната канонична трансформация $\varkappa:(x,\ \xi)\in\Gamma\to(y,\ \eta)\in\mathbf{R}^{2n}\backslash 0$ да е такава, че $\xi_1+\mathrm{Re}\,S(x,\ \xi')=\eta_1$. Освен това искаме

$$\eta(x\ ,\xi)=\xi+O(|\xi'|^{1/2}),$$

$$y(x,\ \xi)=x+O(|\xi'|^{1/2}).$$

В сила е

Теорема 4.2. За въведеното множество Γ_0 съществува конична околност Γ и канонична нехомогенна смяна на симплектичните променливи

$$\varkappa:\Gamma\to\mathbf{R}^{2/n}\backslash 0,$$

за която

$$y(x,\ \xi)=x+g(x,\ \xi'),\quad \eta\,(x,\ \xi)=\xi+h\,(x,\ \xi');$$

функциите g и h са от класа C^∞ и са хомогенни от степени съответно $-1/2$ и $1/2$ и $\eta_1=\xi_1+\mathrm{Re}\,S(x,\ \xi')$ за всяко $(x,\ \xi')\in\Gamma$.

Доказателство. Полагаме $\eta_1=\xi_1+\mathrm{Re}\,S(x,\ \xi')$ там, където това равенство е дефинирано (т. е. в околност на Γ_0). Построяваме симплектични координати $(y(x,\ \xi),\ \eta(x,\ \xi))$, или все едно функции $y_j(x,\ \xi)$, $\eta_j(x,\ \xi)\in C^\infty$ и такива, че $\{y_i,\ y_j\}=0$, $\{y_i,\ \eta_j\}=\delta_{ij}$, $\{\eta_i,\ \eta_j\}=0$. С $\{.,.\}$ е означена скобката на Поасон. Засега $h_1=\mathrm{Re}\,S(x,\ \xi')$, дефинирана в Γ, така че $\eta_1=\xi_1+h(x,\ \xi')$. Останалите функции η_j определяме по рекурентен път. Ако предположим, че сме построили $\eta_1,\ \eta_2,\dots,\ \eta_{q-1}$, за η_q получаваме $\{\eta_s,\ \eta_q\}(x,\ \xi)=0$, $1\leqq s\leqq q$, или все едно

$$0=(\xi_s+h_s(x,\ \xi'),\ \xi_q+h_q(x,\ \xi')\}=\frac{\partial}{\partial x_s}h_q+\{h_s,\ h_q\}-\frac{\partial}{\partial x_q}h_s.$$

Смятаме h_j за хомогенни от степен $1/2$. След приравняване на съответните степени на хомогенност получаваме

$$\frac{\partial h_q}{\partial x_s}(x,\ \xi)=\frac{\partial}{\partial x_q}h_s(x,\ \xi),\quad s=1,\dots,\ q-1,\quad (x,\ \xi)\in\Gamma. \tag{4.5}$$

Очевидно системата (4.5) е преопределена и има решение тогава и само тогава, когато

$$\frac{\partial^2}{\partial x_s\partial x_l}h_s(x,\ \xi)=\frac{\partial^2}{\partial x_l\partial x_s}h_l(x,\ \xi),\quad 1\leqq s,\ l\leqq q-1.$$

Това равенство е пряко следствие от $\{\eta_l,\ \eta_s\}(x,\ \xi)=0$, $1\leqq s,\ l\leqq q-1$. Следователно системата (4.5) притежава решение

$$h_q(x,\ \xi')=\sum_{s=1}^{q-1}\int h_s(0,\dots,\ 0,\ t,\ x_{s+1},\dots,\ x_n;\ \xi')\,dt.$$

По този начин определяме $\eta_q(x, \xi')$ в достатъчно малка конична околност на Γ_0, стига $\max_s(|x_s|+|\xi'/|\xi'|-\xi^0|)<\varepsilon$. Построяваме също $y_j(x, \xi)$, така че $\{y_s, y_l\}=0$, $\{\eta_s, y_l\}=\delta_{s,l}$. Следователно имаме връзките

$$\delta_{s,l}=\{\xi_s+h_s(x, \xi'), x_l+g_l(x, \xi')\}=\delta_{s,l}+\frac{\partial}{\partial x_s}g_l-\frac{\partial}{\partial \xi_l}h_s+\{h_s, g_l\},$$

$$\{y_s, y_l\}=\{x_s+g_s(x,\xi'), x_l+g_l(x, \xi')\}=\frac{\partial}{\partial \xi_s}g_l-\frac{\partial}{\partial \xi_l}g_s+\{g_s, g_l\}$$

и функциите g_j са хомогенни от степен $-1/2$. След приравняване на членовете от еднаква степен на хомогенност намираме

$$\frac{\partial}{\partial x_s}g_l(x, \xi')=\frac{\partial}{\partial \xi_l}h_s(x, \xi'),\quad s=1, 2,\dots, n,$$

(4.6)

$$\frac{\partial}{\partial \xi_s}g_l(x, \xi')=\frac{\partial}{\partial \xi_l}g_s(x, \xi'),\quad s=n, n-1,\dots, l+1.$$

Системата също е предопределена и е разрешима тогава и само тогава, когато са изпълнени равенствата

$$\frac{\partial}{\partial x_q}f_s=\frac{\partial}{\partial x_s}f_q,\quad 1\leqq s,\ q\leqq n,$$

$$\frac{\partial}{\partial \xi_q}f_s'=\frac{\partial}{\partial x_s}f_q',\quad 1\leqq s\leqq n,\ l+1\leqq q\leqq n,$$

$$\frac{\partial}{\partial \xi_q}f_s'=\frac{\partial}{\partial \xi_s}f_q',\ l+1\leqq s,\ q\leqq n,\ f_s=\frac{\partial h_s}{\partial \xi_l},\ f_s'=\frac{\partial g_s}{\partial \xi_l}.$$

Проверката на тази система равенства следва непосредствено от индуктивното предположение, така че решението на (4.6) се дава с формулата

$$g_l(x, \xi')=\sum_{s=1}^{n}\int_0^{x_s}f_s(0,\dots, t, x_{s+1},\dots, x_n; \xi')\,dt$$

$$+\sum_{s=l+1}^{n}\int_0^{\xi_s}f_s'(0, \xi_2,\dots, \xi_{s-1}, t, 0,\dots, 0)\,dt.$$

Не е трудно да се забележи, че $g_l(x, \lambda\xi')=\lambda^{-1/2}g_l(x, \xi')$. С това трансформацията $\varkappa$ е точно определена. Означаваме с $\varkappa^{-1}(y(x, \xi), \eta(x, \xi))\to(x, \xi)$ обратното изображение на $\varkappa$. Съществуват гладки функции $\tilde{g}_j(y, \eta')$ и $\tilde{h}_j(y, \eta')$ от степени на хомогенност съответно $-j/2$ и $1-j/2$, за които

$$x(y,\eta)-y-\sum_{j=1}^{N}\widetilde{g}_j(y,\eta')\in S_{1,0}^{-(N+1)/2}(\Gamma;\mathbf{R}^n),$$

(4.7)

$$\xi(y,\eta)-\eta-\sum_{j=1}^{N}\widetilde{h}(y,\eta')\in S_{1,0}^{-(N+1)/2}(\Gamma;\mathbf{R}^n).$$

Наистина, ако заместим (4.7) в равенствата за y и η, получаваме

$$y=y+\sum_{j=1}^{N+1}\widetilde{g}_j(y,\eta')+g\left(y+\sum_{j=1}^{N+1}\widetilde{g}_j;\ \eta'+\sum_{j=1}^{N+1}\widetilde{h}_j\right),$$

$$\eta=\eta+\sum_{j=1}^{N+1}\widetilde{h}_j(y,\eta')+h\left(y+\sum_{j=1}^{N+1}\widetilde{g}_j;\ \eta'+\sum_{j=1}^{N+1}\widetilde{h}_j\right).$$

Ако развием g и h по формулата на Тейлър около точката (y,η) до N-тия член и приравним членовете от една и съща степен на хомогенност, получаваме

$$g_j(y,\eta')=L_1(y,\eta';\widetilde{g}_1,\dots,\widetilde{g}_{j-1};\ \widetilde{h}_1,\dots,\widetilde{h}_{j-1}),$$

$$\widetilde{h}_j(y,\eta')=L_2(y,\eta';\widetilde{g}_1,\dots,\widetilde{g}_{j-1};\ \widetilde{h}_1,\dots,\widetilde{h}_{j-1}),$$

където L_1 и L_2 са известни функции. Лесно се вижда, че $\widetilde{g}_j$ и $\widetilde{h}_j$ са хомогенни от съответните степени за $j\leq N$ и $\widetilde{g}_{N+1}\in S_{1,0}^{-(N+1)/2}$, $h_{N+1}\in S_{1,0}^{1-(N+1)/2}$. В оператора $D_1+S(x,D)$ правим канонична смяна на променливите $\varkappa$ която осъществяваме с умножение на канонечен и. о. Ф. с нехомогенна, фазова функция $\Phi(x,\xi)$, където $(x,\xi)\in\Gamma$, пораждаща $\varkappa$. Съгласно теоремата на Егоров съществува п. д. о. Q такъв, че

$$(D_1+S(x,D'))\Phi-\Phi Q\in L^{-\infty}(\Gamma).$$

За символа на Q имаме подходяща асимптотична формула, като неговите членове са от вида $D_x^\alpha\partial_\xi^\alpha(\xi_1+S(x,\xi'))\Big|_{\substack{x=x(y,\eta)\\ \xi=\xi(y,\eta)}}.$

Като заместим изразите (4.7) във формулата за символа на Q и развием всеки член в ред на Тейлър около точката (y,η), за символа на Q получаваме

$$Q(y,\eta)=\eta_1+i\,\mathrm{Im}\,S(y,\eta')+i\sum_{j=1}^{n}a_j(y,\eta')+r_{N+1}(y,\eta),$$

където $a_j(y,\eta)$ са хомогенни символи от степен $-j/2$ и $r_{N+1}(y,\eta)=O(|\eta|^{-(N+1)/2})$, (y,η) е в някоя околност на Γ_0.

И така показахме, че операторите от класа $L^{2,1,1}(\Sigma)$ могат да се представят с точност до умножение на елиптични канонични и. о. Ф. като произведение от оператори от главен тип с достатъчно опростени символи.

§ 5. ПОСТРОЯВАНЕ НА АСИМПТОТИЧНО РЕШЕНИЕ НА УРАВНЕНИЕТО $P^*v=0$

Нека за оператора $P(x,D)=p(x,D)^2+q_1(x,D)+p_0+\dots$ са изпълнени предположенията на теорема 1,2'. Разглеждаме оператора P^*. От свойствата на въведения в началото клас п. д. о. $L^{2,1,1}(\Sigma)$ следва, че $P^* \in L^{2,1,1}(\Sigma)$. Не е трудно да се забележи, че P^* също изпълнява условията на теорема 1.2′. Тогава за канонична околност Γ на Γ_0 (§ 4) имаме

$$P^*(x, D)-P_1'P_2'=P^*(x, D)-(p(x, D)-S'(x, D')+R_0^1)$$
$$\times(p(x, D)+S'(x, D')+R_0^2)\in L^{-\infty}.$$

Винаги можем да изберем $S'(x, \xi')$ така, че $\operatorname{Im} S'(\gamma(\rho_0, t))$ да си сменя знака от + на — за t, менящо се от стойности, близки до a_0, до стойности, близки до b_0. Съществуват п. д. о. (§ 4) B и A, каноничен и. о. Ф. Ψ и каноничен и. о. Ф. Φ, такива, че

$$P_N' = P^*BA\Psi\Phi = P_1'\Phi^{-1}\Psi^{-1}A(D_1+i\operatorname{Im} S'(y, D')$$
$$+i\sum_{j=0}^{N_2} a_j(y, D')+R_{N_2+1}) \bmod L^{-\infty}.$$

Ако означим с Y проекцията на Γ по променливите x, то за всяко

$$\nu\in \mathbf{N} \text{ е в сила } |P^*v|_{(\nu)}\sim|P'v|_{(\nu)} \text{ за } v\in C_0(Y).$$

Схемата, която използуваме, е следната: допускаме, че P е локално разрешим, следователно той е разрешим в околност на проекцията на Γ_0 по променливите x и за оператора P е изпълнена (2.4). Ако намерим асимптотично решение $v\in C_0^\infty(Y)$ на $P'v=0$, то ние можем да опровергаем (2.4), а оттам и локалната разрешимост на $P(x, D)$. С това теорема 1.2′ ще бъде доказана. За намиране на асимптотично решение на $P'v=0$ използуваме метода на Мойер, за прилагането на който имаме необходимата подготовка. За оператора P' търсим функция $v_\tau(t, x)$ от вида

$$v_\tau(t, x)=\exp(i\tau\Phi(t, x))\sum_{j=0}^{\infty}\varphi_j(t, x)\tau^{-j/2}, \tag{5.1}$$

където с t сме заменили x_1, а с x — x'; функциите $\varphi_j\in C_0^\infty(Y)$ са с малки носители; $\tau\to\infty$ е голям параметър. Построяваме функцията Φ така, че $\operatorname{Im}\Phi(t, x)\geqq 0$, като равенство се достига само в някои точки, а вън от фиксиран компакт имаме строго неравенство. Искаме за всяко фиксирано $N_1\in \mathbf{Z}^+$ да е в сила $P'v_\tau=O(\tau^{1-N_1})$. За това е достатъчно

$$[D_t+i\operatorname{Im} S'(t, x, D)+i\sum_{j=1}^{N_2} a_j(t, x, D)+R_{N_2+1}(t, x, D) \tag{5.2}$$
$$\times v_\tau(t, x)=O(\tau^{-N_1}).$$

Ясно е, че ако фиксираме N_1, можем да изберем N_2 толкова голямо че да пренебрегнем оператора $R_{N_2+1}(t, x, D)$ в (5.2). Започваме да строим асимптотично решение от вида (5.1). Функцията $\Phi(t, x)$ търсим във вида $\Phi=x_n+\tau^{-1/2}\Phi_1(t, x)$. От (5.2) установяваме, че функцията Φ удовлетворява уравнението на ейконала

$$\frac{\partial}{\partial t}\Phi(t, x)-iS'\left(t, x, \frac{\partial\Phi}{\partial x}\right)=0 \tag{5.3}$$

(за тази цел приравняваме на нула коефициента пред $\tau^{1/2}$ в асимптотичното развитие на (5.2)). Това уравнение е еквивалентно на уравнението

$$(5.3') \qquad \frac{\partial\Phi}{\partial t} - if\left(t,\ x,\ \frac{\partial\Phi}{\partial x}\right)=0, \qquad f=-S.$$

Следователно при движение по бихарактеристиките на главния символ на P функцията f си сменя знака от $-$ на $+$ за всяка точка $(x,\ \xi')$ близко до $(0,\ \xi^0)$. Разглеждаме по-сложния случай, когато от $f=0 \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial t} \leqq 0$ в околност на Γ_0 [2, с. 83]). Търсим $\Phi(t, x)$ такава, че $\operatorname{Im}\Phi(t,\ x)$ да е строго изпъкнала функция по x за всяко t, фиксирано в съответните околности. С други думи, можем да намерим гладка крива $x=y(t)$, върху която $\operatorname{Im}\Phi(t,\ x)$ достига строг минимум, т. е.

$$\frac{\partial}{\partial x}\operatorname{Im}\Phi(t,\ x)=0 \text{ за } x=y(t).$$

Това ни подсказва да търсим приближено решение на (5.3′) от вида

$$(5.4) \qquad \Phi(t,\ x)=A(t)+\langle x-y(t),\ \eta(t)\rangle + \sum_{2\leq|\alpha|\leq M}\Phi_\alpha(t)(x-y(t))^\alpha/|\alpha|!.$$

Ако матрицата $\|\operatorname{Im}\Phi_{jk}\|_{j,k=1}^n$ е позитивно дефинитна, тогава $\operatorname{Im}\Phi$ има строг минимум за $x=y(t)$, като функция на променливите x; $\eta(t)$ е реалнозначна. Върху $x=y(t)$ имаме

$$(0) \qquad A'(t)=\langle y'(t),\ \eta(t)\rangle+if(t,\ y(t),\ \eta(t)).$$

Оттук можем да определим $A(t)$, ако намерим $y(t)$ и $\eta(t)$. В частност

$$(0') \qquad \frac{\partial}{\partial t}\operatorname{Im}A(t)=f(t, y(t), \eta(t)).$$

Ако f сменя знака си от $-$ на $+$, тогава $\operatorname{Im}A(t)$ има минимум във вътрешна точка.

Нашата цел е да удовлетворим (5.3′) приблизително с грешка от порядъка $O(|x-y(t)|^{M+1})$. Функцията $f(t,\ x,\ \xi')$ не е дефинирана за комплексни стойности на ξ', но съгласно формулата на Тейлър имаме

$$\frac{\partial}{\partial x_j}\Phi(t,\ x)-\eta_j(t)=\sum_\alpha\Phi_{\alpha,j}(t)(x-y(t))^\alpha/\alpha!.$$

От друга страна,

$$f\left(t,\ x,\ \frac{\partial\Phi}{\partial x}\right)=\sum_{|\beta|\leq M}f^{(\beta)}(t,\ x,\ \eta(t))\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}-\eta(t)\right)^\beta/\beta!+O\left(\left|\frac{\partial\Phi}{\partial x}-\eta\right|^{M+1}\right).$$

Понеже функцията $f^{(\beta)}(t,\ x,\ \eta(t))$ е добре дефинирана и вече изразихме $\frac{\partial\Phi}{\partial x}$ чрез $y(t)$ и $\eta(t)$, можем да определим $f(t,\ x,\ \xi')$ за комплексни стойности на ξ' с грешка от порядъка $O(|x-y(t)|^{M+1})$. Изчисляваме $\frac{\partial\Phi}{\partial t}=A'(t)-<y', \eta>+<x-y, \eta'>+\sum_{\alpha}\Phi_{\alpha}'(x-y)^{\alpha}/|\alpha|!-\sum_{k=1}^{n}\sum_{1\leq|\alpha|\leq M}(x-y)^{\alpha}$ $\times\Phi_{\alpha,k}\partial y_k/\partial t/|\alpha|!$. Така получените $\partial\Phi/\partial t$ и $f(t, x, \partial\Phi/\partial x)$ заместваме в (5.3') и приравняваме степените пред $(x-y(t))^{\alpha}$. За члена от първи ред намираме

$$\frac{d\eta_j}{dt}-\sum_k\Phi_{j,k}(t)\frac{dy_k}{dt}=i\left[f_{(j)}(t, y, \eta)+\sum_k f^{(k)}(t, y, \eta)\Phi_{j,k}\right]. \tag{1}$$

Тъй като y и η са реални, получаваме следната система от $2n$ уравнения с $2n$ неизвестни:

$$\begin{gathered}\frac{d\eta_j}{dt}-\sum_k\operatorname{Re}\Phi_{j,k}(t)\frac{dy_k}{dt}=-\sum_k\operatorname{Im}\Phi_{j,k}(t)f^{(k)}(t, y, \eta),\\ \sum_k\operatorname{Im}\Phi_{j,k}(t)\frac{dy_k}{dt}=-f_{(j)}(t, y, \eta)-\sum_k\operatorname{Re}\Phi_{j,k}(t)f^{(k)}(t, y, \eta),\end{gathered} \tag{1'}$$

$$j=1, 2, \dots, n.$$

Когато $\operatorname{Im}\Phi_{j,k}$ е позитивно дефинитна (винаги сме в състояние да я направим такава за малки t), можем да решим уравненията за dy/dt и $d\eta/dt$. В точките, за които $f=df=0$, е изпълнено $dy/dt=d\eta/dt=0$. За $2\leq|\alpha|\leq M$ от (5.3') намираме уравненията

$$\frac{\partial\Phi_{\alpha}}{\partial t}-\sum_k\Phi_{\alpha,k}dy_k/dt=F_{\alpha}(t, y, \eta, \{\Phi_{\beta}\}),\quad |\beta|\leq|\alpha|+1, \tag{α}$$

където F_{α} е линейна комбинация от производни на f от ред $\leq|\alpha|$, умножена с полиноми на Φ_{β}, $|\beta|\leq|\alpha|+1$ (за $|\alpha|\leq M$ сумата в лявата страна на (α) пропускаме). Уравненията (1), (1'), (α) образуват квазилинейна система с толкова неизвестни, колкото е и техният брой, така че локално съществува решение на задачата на Коши. Понеже $f_{\alpha}(t, 0, \xi^0)=0$ за $a_0<t<b_0$, разглежданата система има решение $y(t)=0$, $\eta(t)=0$, $\Phi_{\alpha}=0$. Следователно можем да намерим $\varepsilon>0$ такова, че уравненията (1) и (α) с начални условия

$$\Phi_{j,k}=i\delta_{j,k},\quad \Phi_{\alpha}=0,\quad 2<|\alpha|\leq M,\quad t=(a_0+b_0)/2, \tag{5.5}$$

$$y=x,\quad \eta=\xi,\quad t=(a_0+b_0)/2 \tag{5.6}$$

да притежават единствено решение в интервала $(a_0-\varepsilon, b_0+\varepsilon)$ при условие че $|x|+|\xi'/|\xi'|-\xi_0|<\varepsilon$. Освен това матрицата $(\operatorname{Im}\Phi_{j,k}-\delta_{j,k}/2)^n_{j,k=1}$ е позитивно дефинитна и изображението $(x, \xi, t)\to(y, \eta, t)$, $a'\leq t\leq b'$, като $a'=a_0-\delta$, $b'=b_0+\delta$, е дифеоморфизъм. Нека X_{ε} е образът на $\{|x|+|\xi'/|\xi'|-\xi^0|\leq\varepsilon\}$ под действието на така дефинираното изображение, а v е образът на $\partial/\partial t$ чрез същото изображение. Така например v е тангенциално векторно поле към интегралните криви $y(t)$, $\eta(t)$, защото $\partial/\partial t$ е тангенциално на оста t. Отбелязваме, че $v=\partial/\partial t$ при $df=0$. Тъй като вече предположихме, че от $f=0$ следва $df/dt\leq 0$ в X_{ε} за ε достатъчно малко, можем да приложим следствие 3.3 при $q=f$, векторно поле v и $w=\partial/\partial t$. Това е основният момент в метода на Мойер. Заключението е, че f има смяна на знака от — на + върху интегралните криви на v в X_ε. Наистина, ако допуснем противното, следва, че $f(t, x, \xi')$ не би имала смяна на знака от — на + в X_ε за растящи стойности на t и фиксирани (x, ξ'), което противоречи на допускането.

Така доказахме

Предложение 5.1. Нека изискванията на теорема 1.2′ са изпълнени и $\frac{df}{dt} \leqq 0$ в околност на Γ_0, когато $f=0$. Тогава съществуват

(i) крива $t \to (t, y(t), \eta(t)) \in \mathbf{R}^{2n}$, $a' \leqq t \leqq b'$, толкова близо до Γ_0, колкото е необходимо.

(ii) C^∞-функции $\Phi_\alpha(t)$, $2 \leqq \alpha \leqq M$, с матрица $(\operatorname{Im}\Phi_{j,k}-\delta_{j,k}/2)$, която е положително дефинитна при $a' \leqq t \leqq b'$.

(iii) функция $A(t)$, за която $\operatorname{Im} A(t) \geqq 0$, $a' \leqq t \leqq b'$, $\operatorname{Im} A(a') > 0$, $\operatorname{Im} A(b') > 0$ и $\operatorname{Im} A(c') = 0$ за някое $c' \in (a', b')$; $A(t)$ е формално решение на (5.3) с грешка

$$O(|x-y(t)|^{N_\varepsilon+1}).$$

За да завършим доказателството на теорема 1.2′, трябва да решим транспортните уравнения за $\varphi_j(t, x)$. Предполагаме, че $\Phi(t, x) \in C^\infty(\mathbf{R}^n)$, $\varphi_j \in C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$, $\operatorname{Im}\Phi \geqq 0$ в отворено подмножество на $\mathbf{R}^n$.

За функция v_τ от вида (5.1) е валидна

Лема 5.2. За всяко положително число $N \in \mathbf{Z}^+$ и за всяко $\tau > 1$ е в сила

$$\|v_\tau\|_{(-N)} \leqq c\tau^{-N}, \quad c=\text{const}>0. \tag{5.7}$$

Ако $\operatorname{Im}\Phi(t_0, x_0)=0$, $\varphi_0(t_0, x_0) \neq 0$ за някоя точка $(t_0, x_0) \in X$, тогава

$$\|v_\tau\|_{(-N)} \geqq c\tau^{-n/2-N}. \tag{5.8}$$

Освен това за всяка околност U на множеството $\{d\Phi(t, x);\ (t, x) \in \mathbf{R}^n, \operatorname{Im}\Phi=0\}$ и за всяко ν имаме

$$|\hat{v}(\xi)| \leqq c(1+|\xi|+|\tau|)^{-\nu}, \quad \tau > 1, \ \xi/\tau \notin U. \tag{5.9}$$

От $\operatorname{Im}\Phi=0$ следва $d\operatorname{Im}\Phi=0$, тъй като $\operatorname{Im}\Phi \geqq 0$. Доказателството на лемата няма да излагаме, тъй като е дадено в [2, с. 86—87].

Ако Γ е конусът, породен от множеството $\{(x, t), d\Phi(t, x);\ (x, t) \in \bigcup_j \operatorname{supp}\varphi_j, \operatorname{Im}\Phi=0\}$, от (5.9) следва, че $\tau^k v_\tau \to 0$ в D_Γ' за всяко k при $\tau \to \infty$. Следователно $A(\tau^k v_\tau) \to 0$ в $C^\infty(\mathbf{R}^n)$, ако A е п. д. о. и $\operatorname{singspec} A \cap \Gamma = \varnothing$. И наистина знаем, че

$$|<\tau^k v_\tau, \varphi>| \leqq \tau^k \|v_\tau\|_{-k-1} |\varphi|_{k+1},$$

$$\tau^k \|v_\tau\|_{-k-1} \leqq c\tau^{-k-1+k} \xrightarrow[\tau\to\infty]{} 0.$$

Следователно, ако φ е фиксирана функция от C_0^∞, то

$$\tau^k v_\tau \to 0 \text{ в } D', \quad A v_\tau = \int e^{i<x,\xi>} A(x, \xi)\hat{v}_\tau(\xi)d\xi = O(\tau^{-M})$$

за всяко M, защото $A(x, \xi) = O(\tau^{-M})$ там, където $\hat{v}_\tau(\xi)$ не намалява бързо. Така $\tau^k A(v_\tau) \to 0$ в $C^\infty(\mathbf{R}^n)$ за всяко k.

И така предположихме, че операторът P е локално разрешим. Прилагаме неравенство (2.4) към v_τ, като A е п. д. о. и singspec $A \cap \Gamma = \varnothing$. Имаме $\|v_\tau\|_{-N} \geqq c\,\tau^{-n/2-N}$. От тези съображения следва, че $\|Av_\tau\|_0 = O(\tau^{-M})$ за всяко M и също $\|v_\tau\|_{-N-n} \geqq c\tau^{-n-N-n/2}$. Следователно, за да опровергаем оценката (2.4), трябва да изберем функции φ_j, $\varphi_0 \neq 0$ върху Γ_0, такива, че $\|P'v_\tau\|_{(\nu)} \sim \|P^*v_\tau\|_{(\nu)} = O(\tau^{-N_1})$, когато $N_1 > n/2 + N$. Като приложим в (5.2) формулата за действие на п. д. о. върху осцилираща функция с комплексна фаза [2, с. 87—88] и приравним степените пред $\tau^{1-j/2}$ на нула, $j = 1, 2, \ldots$, ще получим уравнението на ейконала при $j=1$, което вече решихме, а за $j \geqq 2$ получаваме транспортни уравнения. Членът пред $\tau^{1/2}$ е

$$\left(\frac{\partial \Phi}{\partial t} - if\left(x, \operatorname{grad} \Phi\right)\right)\varphi_0 e^{i\tau\Phi}. \tag{5.10}$$

За него $e^{i\tau\Phi} = O(\exp(-c\tau|x-y(t)|^2))$, $c = \mathrm{const} > 0$, а членът в скобите на (5.10) е $O(|x-y(t)|^{M+1})$ съгласно с построението. Следователно целият член пред $\tau^{1/2}$ е $O(\tau^{-(M+1)/2})$. Означаваме с $F(t, x, D)$ п. д. о. със символ $if(t, x, \xi') + i\sum\limits_{j=1}' a_j(t, x, \xi')$, където $N \in \mathbf{Z}^+$ е достатъчно голямо число, а (t, x, ξ') е в малка конична околност на Γ_0. Тогава за коефициента пред τ^0 получаваме уравнението

$$e^{i\tau\Phi}\left[D_t\varphi_0 + \sum_k{}' F_1^{(k)}\left(t, x, \frac{\partial\Phi}{\partial x}\right)D_k\varphi_0 + c(t, x)\varphi_0\right] = 0,$$

където $F_1^{(k)} = \partial_{\xi_k} if(t, x, \xi')$, а $c(t, x)$ зависи от младшите символи на F. За φ_0 имаме

$$\varphi_0(t, x) = \sum_{|\alpha| \leqq M}{}' \varphi_{0,\alpha}(t)(x-y(t))^\alpha/\alpha! + O(|x-y|^{M+1}).$$

Както при уравнението на ейконала, дефинираме $F_1^{(k)}$ за комплексни стойности на ξ' посредством формулата на Тейлър. Получаваме система линейни диференциални уравнения за $\varphi_{0,\alpha}$, които решаваме при начални данни $\varphi_{0,0} \neq 0$ върху Γ_0. По аналогичен начин постъпваме с коефициентите пред $\tau^{-1/2}$, $\tau^{-1}, \ldots$, намирайки φ_j. За j достатъчно голямо $P'v_\tau = O(\tau^{1-N_1})$, така че $\|P'v_\tau\|_{(\nu)} = O(\tau^{\nu+1-N_2})$. Следователно нарушаваме неравенството (2.4), ако изберем $N_2 > n/2 + N + \nu + 1$. Понеже можем да определим N_2 в зависимост само от константите в (2.4), следва, че M и N_2 са напълно дефинирани чрез N.

С това локалната неразрешимост на оператора P е доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. Попов Г. С. Микролокални свойства на оператори с кратни характеристики. Дисертация, ИМИ, 1979.
2. Hörmander L. Pseudodifferential Operators of Principal Type. D. Reidel Publishing Company, 1980, 69—96.

3. П о п и в а н о в П. Р., П о п о в Г. С. Микролокальные свойства одного класса псевдодифференциальных операторов с кратными характеристиками. — Сердика, 6, 1980, 169—183.
4. П о п и в а н о в П. Р., П о п о в Г.С. Микролокальные свойства одного класса псевдодифференциальных уравнений неглавного типа. — Докл. БАН, 31, 1978, № 12, 1531—1533.
5. П о п и в а н о в П. Р. Достаточное условие для локальной разрешимости некоторого класса псевдодифференциальных уравнений неглавного типа. — Докл. БАН, 30, 1977, № 7, 981—984.

Постъпила на 31. 3. 1982 г.

ГОДИШНИК НА СОФИЙСКИЯ УНИВЕРСИТЕТ „КЛИМЕНТ ОХРИДСКИ"

ФАКУЛТЕТ ПО МАТЕМАТИКА И МЕХАНИКА

Том 75 Книга 1 — Математика 1981

ANNUAIRE DE L'UNIVERSITÉ DE SOFIA „KLIMENT OHRIDSKI"

FACULTÉ DE MATHÉMATIQUES ET MÉCANIQUE

Tome 75 Livre 1 — Mathématiques 1981

AUTO-PARALLEL SUBMANIFOLDS OF A LINEARLY CONNECTED MANIFOLD

Dečko Mitov

Дечко Митов. **Автопараллельные подмногообразия многообразия с линейной связностью.**

Использованы распределения специального тица на расслоении линейных реперов многообразия с линейной связностью. Изучается существование интегральных многообразий этих распределений. Проекции интегральных многообразий являются автопараллельными подмногообразиями базового многообразия. Наоборот, каждое связное автопараллельное подмногообразие получается таким способом. В случае рекуррентности кручения и кривизны найденные достаточные условия для существования автопараллельных подмногообразий упрощаются.

Dečko Mitov. **Auto-parallel Submanifolds of a Linearly Connected Manifold.**

Distributions of special type are used on the bundle of linear frames of a linearly connected manifold. The existence of their integral manifolds is investigated. The projections of the integral manifolds are auto-parallel submanifolds of the base manifold. Conversely, every connected auto-parallel submanifolds is obtained in this way. When the torsion and the curvature are recurrent, the sufficient conditions obtained for existence of auto-parallel submanifolds are simplified.

The basic subobjects of the manifolds with torsion-free linear connection are the totally geodesic submanifolds (in fact, this is true for more general linear connections). If we do not assume for the torsion to be zero, then the basic subobjects are the auto-parallel submanifolds. In this sense the present paper may be considered as an extension of [9].

PRELIMINARIES

All details concerning the contents of this section may be found in [4, 5, 10].

Everywhere in the paper M will denote a connected n-dimensional C^∞ manifold with a linear connection ∇. We shall assume that $n \geq 3$.

The matrix group $GL(n, \mathbf{R})$ acts on $\mathbf{R}^n$; each a in $GL(n, \mathbf{R})$ is a linear isomorphism $\xi \to a\xi$ of $\mathbf{R}^n$. Each A in the Lie algebra $\mathbf{gl}(n, \mathbf{R})$ is a linear endomorphism of $\mathbf{R}^n$ defined with the help of the 1-parameter subgroup $\{a_t\}=\{\exp(tA)\}$ of A by

(1) $$A\xi = \lim_{t\to 0}(a_t\xi - \xi)/t.$$

The adjoint representation of $GL(n, \mathbf{R})$ in $\mathbf{gl}(n, \mathbf{R})$ will be denoted by "ad".

Let $\pi: L(M) \to M$ be the bundle of linear frames of M. The differential of π will also be denoted by π. The group $GL(n, \mathbf{R})$ acts on $L(M)$; each a in $GL(n, \mathbf{R})$ is a C^∞ mapping $u \to ua$ of $L(M)$ onto $L(M)$. The differential of this mapping is R_a and the induced mapping on the forms is R_a^*. Let $e_1, \ldots, e_n$ be the natural basis of $\mathbf{R}^n$. Each u in $L(M)$ is an n-tuple $(X_1, \ldots, X_n)$ of linearly independent vectors in the tangent space $T_{\pi(u)}M$ and can be identified with the linear isomorphism $\mathbf{R}^n \to T_{\pi(u)}M$ for which $ue_i = X_i$ $(i=1, \ldots, n)$.

The canonical 1-form ϑ is defined on $L(M)$ by $u\vartheta(X)=\pi X$ for every vector X in the tangent space $T_u(L(M))$. For a in $GL(n, \mathbf{R})$ we have

(2) $$R_a^* \theta = a^{-1}\vartheta.$$

If $A \in \mathbf{gl}(n, \mathbf{R})$, then the fundamental vector field A^* is determined on $L(M)$ by the 1-parameter group of transformations $(u, a_t) \to ua_t$ with $a_t = \exp(tA)$. We have

(3) $$[A_1^*, A_2^*] = [A_1, A_2]^* \text{ for } A_1 \text{ and } A_2 \text{ in } \mathbf{gl}(n, \mathbf{R}).$$

The fundamental vector fields form an n^2-dimensional vector $\mathbf{R}$-space $A^*(\mathbf{R}^n)$.

Let ω be the connection 1-form on $L(M)$ and $X \in T_u(L(M))$. The vertical component of X is $vX = (\omega(X))_u^*$ and the horizontal component of X is $hX = X - vX$. For ξ in $\mathbf{R}^n$ the standard horizontal vector field $B(\xi)$ is defined by $\omega_u(B(\xi))=0$ and $\vartheta_u(B(\xi))=\xi$ on $L(M)$ and has the following properties:

(4) $$R_a B(\xi) = B(a^{-1}\xi) \text{ for } a \text{ in } GL(n, \mathbf{R})$$

and $\pi B(\xi)_u = u\xi$. In addition,

(5) $$[A^*, B(\xi)] = B(A\xi) \text{ for } A \text{ in } \mathbf{gl}(n, \mathbf{R})$$

and if η is also in $\mathbf{R}^n$,

(6) $$[B(\xi), B(\eta)]_u = (\omega_u([B(\xi), B(\eta)]))_u^* + B(\vartheta_u([B(\xi), B(\eta)]))_u.$$

The standard horizontal vector fields form an n-dimensional vector $\mathbf{R}$-space $B(\mathbf{R}^n)$.

Let $\xi, \eta, \zeta \in \mathbf{R}^n$ and $u \in L(M)$. For the curvature tensor field R we have:

(7) $$R(u\xi, u\eta)(u\zeta) = -u(\omega_u([B(\xi), B(\eta)])\zeta)$$

and for the torsion tensor field T:

(8) $$T(u\xi, u\eta) = -u(\vartheta_u([B(\xi), B(\eta)])).$$

Now, let R be recurrent, i. e. $R \neq 0$ and $\nabla R = R \otimes \rho$ with a 1-form ρ on M. For each fixed u there exists a C^∞ function f with no zero on the holonomy bundle $P(u)$ such that

(9) $$v[B(\xi), B(\eta)] = fA^* \text{ on } P(u),$$

where

(10) $$A = \omega_u([B(\xi), B(\eta)]).$$

Similarly, if T is recurrent i. e. $T \neq 0$ and $\nabla T = T \otimes \tau$, then

(11) $$h[B(\xi), B(\eta)] = gB(\zeta) \text{ on } P(u),$$

where

(12) $$\zeta = \vartheta_u([B(\xi), B(\eta)]).$$

1. r-AUTO-PARALLEL DISTRIBUTIONS

Let $1 < r < n$ and $(\xi_1, \ldots, \xi_r)$ be the subspace of $\mathbf{R}^n$ spanned by the linearly independent vectors $\xi_1, \ldots, \xi_r$. We denote by B_i the vector field $B(\xi_i)$ and by $B(\xi_1, \ldots, \xi_r)$ the subspace of $B(\mathbf{R}^n)$ spanned by $B_1, \ldots, B_r$. The vectors $(B_1)_u, \ldots, (B_r)_u$ span a subspace $B(\xi_1, \ldots, \xi_r)_u$ of $T_u(L(M))$. Let $A(\xi_1, \ldots, \xi_r)$ be the maximal Lie subalgebra of $\mathbf{gl}(n, \mathbf{R})$ which sends $(\xi_1, \ldots, \xi_r)$ into $(\xi_1, \ldots, \xi_r)$ by (1). If $A_1, \ldots, A_{r'}$ is a linear basis of $A(\xi_1, \ldots, \xi_r)$, then $A_1^*, \ldots, A_{r'}^*$ span a subspace $A^*(\xi_1, \ldots, \xi_r)$ of $A^*(\mathbf{R}^n)$ and $(A_1^*)_u, \ldots, (A_{r'}^*)_u$ span a subspace $A^*(\xi_1, \ldots, \xi_r)_u$ of $T_u(L(M))$.

Definition 1. The distribution $\Delta(\xi_1, \ldots, \xi_r)$:

$$u \to B(\xi_1, \ldots, \xi_r)_u \oplus A^*(\xi_1, \ldots, \xi_r)_u \text{ for all } u \text{ in } L(M)$$

is called r-auto-parallel.

The above coincides with the definition of the r-geodesic distribution in [9]. Hence every r-auto-parallel distribution is C^∞.

The following characterizes the integrability of these distributions. (There are inaccuracies in [3]).

Proposition 1.1. The r-auto-parallel distribution $\Delta(\xi_1, \ldots, \xi_r)$ is involutive if and only if

$$\omega_u([B_i, B_j]) \in A(\xi_1, \ldots, \xi_r) \text{ and } \vartheta_u([B_i, B_j]) \in (\xi_1, \ldots, \xi_r)$$

for all u in $L(M)$ and i, j from 1 to r.

Proof. Since $A(\xi_1, \ldots, \xi_r)$ is a Lie subalgebra, it follows that $[A_k, A_l] \in A(\xi_1, \ldots, \xi_r)$ for k, l from 1 to r'. Hence $[A_k^*, A_l^*] \in \Delta(\xi_1, \ldots, \xi_r)$ by (3). Using (5), we conclude that $[A_k^*, B_i] \in \Delta(\xi_1, \ldots, \xi_r)$ for k from 1 to r' and i from 1 to r, because $A_k \in A(\xi_1, \ldots, \xi_r)$. Therefore, by (6), $\Delta(\xi_1, \ldots, \xi_r)$ is involutive if and only if

$$[B_i, B_j] = \sum_{k=1}^{r'} f^k A_k^* + \sum_{l=1}^{r} g^l B_l \text{ for } i, j \text{ from 1 to } r$$

with C^∞ functions f, g, hence if and only if

$$\omega_u([B_i, B_j]) = \sum_{k=1}^{r'} f^k(u) A_k \text{ and } \vartheta_u([B_i, B_j]) = \sum_{l=1}^{r} g^l(u) \xi_l$$

for all u in $L(M)$ and i, j from 1 to r.

The auto-parallel submanifolds of a symmetric space were described by Cartan [1] in terms of the Lie triple systems. A more general concept will be used here.

Definition 2. A space $B(\xi_1,\dots,\xi_r)$ is called a generalized Lie triple system at u if

$$\omega_u([B_i, B_j]) \in A(\xi_1,\dots,\xi_r) \text{ and } \vartheta_u([B_i, B_j]) \in (\xi_1,\dots,\xi_r)$$

for i, j from 1 to r. If these conditions are satisfied for all u in a subset Q of $L(M)$, then $B(\xi_1,\dots,\xi_r)$ is called a generalized Lie triple system on Q. If $Q=L(M)$, then $B(\xi_1,\dots,\xi_r)$ is called a generalized Lie triple system.

Another form of this definition is given in [6] and the generalizing of the classical concept of Lie triple system is more transparent there.

Now Proposition 1.1 can be stated as follows.

Corollary 1.2. The r-auto-parallel distribution $\Delta(\xi_1,\dots,\xi_r)$ is involutive if and only if $B(\xi_1,\dots,\xi_r)$ is a generalized Lie triple system.

In general, the r-auto-parallel distributions are not involutive. The existence of their integral manifolds may be treated in terms of the generalized Lie triple systems. Everywhere the dimension of the integral manifolds of $\Delta(\xi_1,\dots,\xi_r)$ will be supposed maximal, i.e. $r+r'$.

Proposition 1.3. If N is an integral manifold of $\Delta(\xi_1,\dots,\xi_r)$, then $B(\xi_1,\dots,\xi_r)$ is a generalized Lie triple system on $\bar{N}$.

Proof. If ξ, $\eta \in (\xi_1,\dots,\xi_r)$, then $B(\xi)$ and $B(\eta)$ are tangent to $\bar{N}$. Hence $[B(\xi), B(\eta)] \in \Delta(\xi_1,\dots,\xi_r)$ on $\bar{N}$. Consequently, $\omega_u([B(\xi), B(\eta)] \in A(\xi_1,\dots,\xi_r)$ and $\vartheta_u([B(\xi), B(\eta)] \in (\xi_1,\dots,\xi_r)$ for all u in N.

We need an existence theorem. For all vector fields of the form $\sum_{i=1}^{r} \alpha^i B_i$, where $\alpha^i \in \mathbf{R}$, we denote by $u(B_1,\dots,B_r)$ the set of all points of their integral curves through u. Let $u(B_1,\dots,B_r, A_1^*,\dots,A_{r'}^*)$ be the same for $\sum_{i=1}^{r} \alpha^i B_i + \sum_{j=1}^{r'} \beta^j A_j^*$, where α^i, $\beta^j \in \mathbf{R}$. We denote by $G(\xi_1,\dots,\xi_r)$ the connected Lie subgroup of $GL(n, \mathbf{R})$ whose Lie algebra is $A(\xi_1,\dots,\xi_r)$ and by $(u\xi_1,\dots,u\xi_r)$ the subspace of $T_{\pi(u)}M$ spanned by $u\xi_1,\dots,u\xi_r$. The following two results are proved in [9] (Theorem 3.2 and Lemma there).

Theorem 1.4. Let Δ be an l-dimensional C^∞ distribution on a C^∞ manifold P, $\dim P=m>l$ and $p(\Delta)$ the set of all points of the integral curves of all vector fields belonging to Δ through a point p of P. Let the intersection Q of $p(\Delta)$ with a neighbourhood U of p be a submanifold of P. Suppose that on Q

$$[X_i, X_j]=\sum_{k=1}^{l} f_{ij}^k X_k \text{ for } i, j=1,\dots,l$$

with C^∞ functions f_{ij}^k, where $X_1,\dots,X_l$ is a local basis of Δ in U. Then there exists a neighbourhood $U^*\subset U$ of p and local coordinates $x_1,\dots,x^m$ in U^* such that $x^1(p)=\dots=x^m(p)=0$ and $U^*\cap Q$ is an l-dimensional integral manifold of Δ determined by the equations $x^{l+1}=0,\dots,x^m=0$.

Lemma 1.5. Let $v \in L(M)$, $a \in G(\xi_1,\dots,\xi_r)$ and i, $j=1,\dots,r$. If $\omega_v([B_i, B_j]) \in A(\xi_1,\dots,\xi_r)$ then $\omega_{va}([B_i, B_j]) \in A(\xi_1,\dots,\xi_r)$.

We can now prove the following existence theorem.

Theorem 1.6. Let $u \in L(M)$ and $B(\xi_1, \ldots, \xi_r)$ be a generalized Lie triple system on the intersection of $u(B_1, \ldots, B_r)$ with a neighbourhood U of u. Then there exists such a neighbourhood of u that its intersection with $u(B_1, \ldots, B_r, A_1^*, \ldots, A_{r'}^*)$ is an integral manifold of $\Delta(\xi_1, \ldots, \xi_r)$.

Proof. Let $A \in \mathbf{gl}(n, \mathbf{R})$ and $\xi \in \mathbf{R}^n$. There exist a neighbourhood V of u and positive number ε such that the local 1-parameter group of local transformations

$$\varphi_t^{A,\xi} : V \to L(M)$$

generated by $A^* + B(\xi)$ is defined for $|t| < \varepsilon$. Given compact sets $K_1 \subset \mathbf{gl}(n, \mathbf{R})$ and $K_2 \subset \mathbf{R}^n$, we can choose V and ε for all $(A, \xi) \in K_1 \times K_2$ simultaneously, because $A^* + B(\xi)$ depends differentiably on (A, ξ). Hence there exist neighbourhoods U_1 of u and V_1 of $(0, 0) \in \mathbf{gl}(n, \mathbf{R}) \times \mathbf{R}^n$ and a positive number δ such that $\varphi_t^{A,\xi}$ is defined on U_1 for all (A, ξ) in V_1 and $|t| < 1 + \delta$. The mapping

$$\Phi : (A, \xi) \to \varphi_1^{A,\xi}(u)$$

of V_1 into $L(M)$ is C^∞. We identify the vector space $\mathbf{gl}(n, \mathbf{R})$ with $T_0(\mathbf{gl}(n, \mathbf{R}))$, where $0 \in \mathbf{gl}(n, \mathbf{R})$, as well as $\mathbf{R}^n$ with $T_0 \mathbf{R}^n$, where $0 \in \mathbf{R}^n$. The differential Φ_{*0}, where $0 \in \mathbf{gl}(n, \mathbf{R}) \oplus \mathbf{R}^n$, is a linear isomorphism of $\mathbf{gl}(n, \mathbf{R}) \oplus \mathbf{R}^n = T_{(0,0)}(\mathbf{gl}(n, \mathbf{R}) \times \mathbf{R}^n)$ onto $T_{\Phi(0,0)}(L(M))$. Consequently, there exist open submanifolds U_2 of $L(M)$ containing u and V_2 of $\mathbf{gl}(n, \mathbf{R}) \times \mathbf{R}^n$ containing $(0,0)$ such that $\Phi \mid V_2$ is a diffeomorphism onto U_2. Let $V_3 = \Phi^{-1}(U_2 \cap U) \cap (A(\xi_1, \ldots, \xi_r) \times (\xi_1, \ldots, \xi_r))$. The submanifold $Q = \Phi(V_3)$ of $L(M)$ is the intersection of a neighbourhood of u and $u(B_1, \ldots, B_r, A_1^*, \ldots, A_{r'}^*)$. Every point of Q is on the integral curve $\{v_t\}$ of some vector field $A^* + B(\xi)$, where $v_0 = u$, $A \in A(\xi_1, \ldots, \xi_r)$ and $\xi \in (\xi_1, \ldots, \xi_r)$. Let $\{u_t\}$ be the horizontal lift of $\{\pi(v_t)\}$ through $u = u_0$. There exists a curve $\{a_t\} \subset GL(n, \mathbf{R})$ such that $v_t = u_t a_t$ and $a_0 = e$, the unit of $GL(n, \mathbf{R})$. We have [4, p. 69]:

$$\omega(\dot{v}_t) = \operatorname{ad}(a_t^{-1}) \omega(\dot{u}_t) + a_t^{-1} \dot{a}_t.$$

But $\omega(\dot{u}_t) = 0$ and $\omega(\dot{v}_t) = \omega(A^* + B(\xi)) = A$. Therefore in $T_e(GL(n, \mathbf{R}))$

$$a_t^{-1} \dot{a}_t = A_e \text{ and } a_0 = e,$$

hence [4, c. 39] $a_t = \exp(tA)$. Consequently, $\{a_t\}$ is in $G(\xi_1, \ldots, \xi_r)$, because $A \in A(\xi_1, \ldots, \xi_r)$. We assume U_2 such small, that for v_t in Q the corresponding u_t be in U. Then u_t is on the integral curve through u of some vector field $B(\eta)$ with $\eta \in (\xi_1, \ldots, \xi_r)$. By assumption $B(\xi_1, \ldots, \xi_r)$ is a generalized Lie triple system at u_t. The following lemma implies that $B(\xi_1, \ldots, \xi_r)$ is a generalized Lie triple system at v_t, hence on Q.

Lemma 1.7. Let $v \in L(M)$ and $a \in G(\xi_1, \ldots, \xi_r)$. If $B(\xi_1, \ldots, \xi_r)$ is a generalized Lie triple system at v, then it is a generalized Lie triple system at va.

Proof. By our assumption, $\vartheta_v([B_i, B_j]) \in (\xi_1, \ldots, \xi_r)$ for i, j from 1 to r. Hence, by (2) and (4),

$$\vartheta_{va}([B_i, B_j]) = (R_a^* \vartheta)_v([B(a\xi_i), B(a\xi_j)]) = a^{-1}(\vartheta_v([B(a\xi_i), B(a\xi_j)])).$$

Consequently, $\vartheta_{va}([B_i, B_j]) \in (\xi_1, \ldots, \xi_r)$, because $a \in G(\xi_1, \ldots, \xi_r)$. By assumption, $\omega_v([B_i, B_j]) \in A(\xi_1, \ldots, \xi_r)$. Then, by Lemma 1.5, $\omega_{va}([B_i, B_j]) \in A(\xi_1, \ldots, \xi_r)$. Lemma 1.7 is proved.

To finish the proof of Theorem 1.6, use the basis $B_1,\ldots, B_r, A_1^*,\ldots, A_{r'}^*$ of $\Delta(\xi_1,\ldots, \xi_r)$. For v in Q we have:

(i) $[B_i, B_j]_v = \sum_{k=1}^{r'} f_{ij}^k(v)(A_k^*)_v + \sum_{l=1}^{r} g_{ij}^l(B_l)_v$ for i, j from 1 to r with C^∞ functions f_{ij}^k, g_{ij}^k, because $\omega_v([B_i, B_j]) \in A(\xi_1,\ldots, \xi_r)$ and $\vartheta_v([B_i, B_j]) \in (\xi_1,\ldots, \xi_r)$;

(ii) $[A_i^*, B_j]_v = B(A_i\xi_j) = \sum_{k=1}^{r} \alpha_{ij}^k(B_k)_v$ for i from 1 to r' and j from 1 to r with $\alpha_{ij}^k \in \mathbf{R}$, in view of (5) and $A_i \in A(\xi_1,\ldots, \xi_r)$;

(iii) $[A_i^*, A_j^*] = [A_i, A_j]^* = \sum_{k=1}^{r'} \beta_{ij}^k(A_k^*)_v$ for i, j from 1 to r' with $\beta_{ij}^k \in \mathbf{R}$, because $A(\xi_1,\ldots, \xi_r)$ is a Lie subalgebra of $\mathbf{gl}(n, \mathbf{R})$. Now our assertion follows from Theorem 1.4, since Q is the intersection of a neighbourhood of u and $u(\Delta(\xi_1,\ldots, \xi_r))$.

Let $x \in M$ and U_0 be a normal neighbourhood of x. For y in U_0 we denote by τ_y the linear isomorphism $T_x(M) \to T_y(M)$ realized by the parallel displacement along the unique geodesic in U_0 joining x with y.

P r o p o s i t i o n 1.8. The notation being as in Theorem 1.6, let $x=\pi(u)$, $X_i=u\xi_i$ and N be a totally geodesic at x submanifold such that $T_x(N) =(X_1,\ldots, X_r)$. Let U_0 be a normal neighbourhood of x for which $U_0\cap N =U_0\cap \exp(X_1,\ldots, X_r)$. Then $B(\xi_1,\ldots, \xi_r)$ is a generalized Lie triple system on $\pi^{-1}(u_0)\cap u(B_1,\ldots, B_r)$ if and only if, for each $y \in U_0\cap N$ and i, j from 1 to r, the vector $T(\tau_yX_i, \tau_yX_j)$ is in $(\tau_yX_1,\ldots, \tau_yX_r)$ and the mapping $R(\tau_yX_i, \tau_yX_j) \circ \tau_y: T_x(M) \to T_y(M)$ sends $T_x(N)$ into $(\tau_yX_1,\ldots, \tau_yX_r)$.

Proof. Let $\lambda^1,\ldots, \lambda^r$ be real numbers and v be in the intersection of $\pi^{-1}(U_0)$ with the integral curve c of $\sum_{i=1}^{r} \lambda^i B_i$ through u. The space $B(\xi_1,\ldots, \xi_r)$ is a generalized Lie triple system at v if and only if $T(v\xi_i, v\xi_j) \in (v\xi_1,\ldots, v\xi_r)$ and $R(v\xi_i, v\xi_j)(v\xi) \in (v\xi_1,\ldots, v\xi_r)$ for i, j from 1 to r and ξ in $(\xi_1,\ldots, \xi_r)$, by virtue of (7) and (8). Let $y=\pi(v)$ and $X=u\xi$. Then $y \in \pi(c)$, hence $v\xi_i=\tau_yX_i$ and $v\xi=\tau_yX$. Consequently, $B(\xi_1,\ldots, \xi_r)$ is a generalized Lie triple system at v if and only if $T(\tau_yX_i, \tau_yX_j) \in (\tau_yX_1,\ldots, \tau_yX_r)$ and $R(\tau_y X_i, \tau_yX_j) \circ \tau_y$ sends $T_x(N)$ into $(\tau_yX_1,\ldots, \tau_yX_r)$. The proposition is proved, because $U_0\cap N=U_0 \cap\pi(u(B_1,\ldots, B_r))$.

2. AUTO-PARALLEL SUBMANIFOLDS

Let N be a submanifold of M such that, for each x in N, for each X in $T_x(N)$ and for each piecewise C^∞ curve c in N starting from x, the parallel displacement of X along c yields a vector tangent to N. Then the submanifold N is called auto-parallel. If $\bar{c}$ is an integral curve of $B(\xi)$ through u, then $\pi(c)$ is a geodesic of M through $\pi(u)$ with the tangent vector $u\xi$ at $\pi(u)$.Conversely, every geodesic can be obtained in this way. In this section we show that a similar treating of the auto-parallel submanifolds is possible, replacing the standard horizontal vector fields by the r-auto-parallel distributions.

T h e o r e m 2.1. Let $\bar{N}$ be an integral manifold of $\Delta(\xi_1,\ldots, \xi_r)$ and $N=\pi(\bar{N})$. Then N is an auto-parallel submanifold of M and $T_{\pi(u)}(N)=(u\xi_1,\ldots, u\xi_r)$ for u in $\bar{N}$.

Proof. Since $\bar{N}$ is an integral manifold of $\Delta(\xi_1,\ldots,\xi_r)$, it follows that $B(\xi_1,\ldots,\xi_r)$ is a generalized Lie triple system on N, by Proposition 1.3. In virtue of Theorem 1.6, for each u in $\bar{N}$ there exists a neighbourhood U_u of u such that $U_u \cap N = U_u \cap u(B_1,\ldots,B_r, A_1^1,\ldots,A_r^r)$. We take so small U_u that $\pi(U_u)$ is a normal neighbourhood of $\pi(u)$ with normal coordinates $x^1,\ldots,x^n$ corresponding to a basis $\eta_1,\ldots,\eta_n$ of $\mathbf{R}^n$, where $\eta_1=\xi_1,\ldots,\eta_r=\xi_r$. The vectors $(B_1)_u,\ldots,(B_r)_u$ form a basis of the horizontal subspace of $T_u(\bar{N})$. Hence $\pi(U_u\cap\bar{N})$ is determined by the equations $x^{r+1}=0,\ldots,x^n=0$. Consequently, N is a submanifold of M and $T_{\pi(u)}(N)=(\pi(B_1)_u,\ldots,\pi(B_r)_u)=(u\xi_1,\ldots,u\xi_r)$. Let c_ξ be the intersection of U_u with the integral curve of $B(\xi)$ through u. Since $\pi(c_\xi)\subset N$ for all ξ in $(\xi_1,\ldots,\xi_r)$, it follows that the submanifold N is totally geodesic at $\pi(u)$ for each u in $\bar{N}$. Thus N is a totally geodesic submanifold of M. Then [2, p. 115] the vector field $\nabla_{\partial_i}\partial/\partial x^j+\nabla_{\partial_j}\partial/\partial x^i$ (where $\partial_i=\partial/\partial x^i$) is tangent to $\pi(U_u\cap\bar{N})$ for i, j from 1 to r. On the other hand, $\vartheta_v([B_i,B_j])\in(\xi_1,\ldots,\xi_r)$ for all v in $\bar{N}$. Hence the vector fields $\nabla_{\partial_i}\partial/\partial x^j-\nabla_{\partial_j}\partial/\partial x^i$ are also tangent to $\pi(U_u\cap\bar{N})$. Consequently, $\nabla_{\partial_i}\partial/\partial x^j$ are tangent to $\pi(U_u\cap\bar{N})$. By [5, p. 55] we conclude that N is an auto-parallel submanifold of M.

From Theorem 1.4 and Theorem 2.1 we obtain immediately

Corollary 2.2. Let $u\in L(M)$ and, for some neighbourhood U of u, the space $B(\xi_1,\ldots,\xi_r)$ be a generalized Lie triple system on $U\cap u(B_1,\ldots,B_r)$. Then there exists an auto-parallel submanifold N of M through $\pi(u)$ such that $T_{\pi(u)}=(u\xi_1,\ldots,u\xi_r)$.

This corollary together with Proposition 1.8 give

Corollaray 2.3. Let the submanifold N of M be totally geodesic at x and $T_x(N)=(X_1,\ldots,X_r)$. Let U_0 be a normal neighbourhood of x for which $U_0\cap N=U_0\cap\exp(X_1,\ldots,X_r)$. For all y in U_0 and i, j, k from 1 to r, we assume that $T(\tau_y X_i\ \tau_y X_j)$ and $R(\tau_y X_i,\tau_y X_j)(\tau_y X_k)$ are in $(\tau_y X_1,\ldots,\tau_y X_r)$. Then N contains an r-dimensional auto-parallel submanifold of M through x.

The converse of Theorem 2.1. is the following

Theorem 2.4. Let N be a connected r-dimensional auto-parallel submanifold of M and $u\in\pi^{-1}(N)$. Then threre exist an r-auto-parallel distribution and its integral manifold $\bar{N}$ through u such that $N=\pi(\bar{N})$.

Proof. Let $x=\pi(u)$ and $X_1,\ldots,X_r$ be a basis for $T_x(N)$. Let U_x be such a normal neighbourhood of x that $U_x\cap N=U_x\cap\exp(X_1,\ldots,X_r)$. For y in U_x all vectors $T(\tau_y X_i\,\tau_y X_j)$ and $R(\tau_y X_i,\tau_y X_j)(\tau_y X_k)$ are in $(\tau_y X_1,\ldots,\tau_y X_r)$, because N is an auto-parallel submanifold [5, 58]. Setting $\xi_i=u^{-1}X_i$, we conclude, by Proposition 1.6, that $B(\xi_1,\ldots,\xi_r)$ is a generalized Lie triple system on $\pi^{-1}(U_x)\cap u(B_1,\ldots,B_r)$. By virtue of Theorem 1.4 and Corollary 2.1, there exist an integral manifold $\bar{N}_u$ of $\Delta(\xi_1,\ldots,\xi_r)$ through u and neighbourhoods $\bar{U}_u$ of u and $\bar{U}_x'$ of x such that $\pi(\bar{U}_u\cap\bar{N}_u)=U_x'\cap N$. We join each $z\in N$ with x by a broken N-geodesic γ_z. Since N is auto-parallel, all γ_z are M-geodesics. By the parallel displacement of X_i along γ_z, we obtain a basis $w\xi_1,\ldots,w\xi_r$ for $T_z(N)$, where w is in the horizontal lift of γ_z through u. Thus the union $\bar{N}$ of all submanifolds $\bar{U}_w\cap\bar{N}_w$ of $L(M)$ is a connected set consisting of integral manifolds of $\Delta(\xi_1,\ldots,\xi_r)$. Each of these integral manifolds is determined in the respective local coordinates $z^1,\ldots,z^n$, $Z_1^1, Z_1^2,\ldots,Z_n^n$ by the equations $z^{r+1}=0,\ldots,z_i^n=0$, $Z^k=0$, where those Z_β^α are omitted, which have non-zero coefficients α^l_{jk} in the following expressions of the matrix exponentials of $A_1, \ldots, A_{r'}$:

$$\sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!}(A_j)^m = \sum_{k,l=1}^{n} \alpha^l_{jk} A^k_l.$$

Consequently, $\bar{N}$ is a submanifold of $L(M)$. It is an integral manifold of $\Delta(\xi_1, \ldots, \xi_r)$ through u and $\pi(\bar{N}) = N$.

Further the auto-parallel submanifolds will be considered together with the induced linear connection [5, p. 56]. So the torsion and the curvature of an auto-parallel submanifold N of M will be T/N and R/N, respectively.

Proposition 2.5. Let $\bar{N}$ be an integral manifold of $\Delta(\xi_1, \ldots, \xi_r)$ and $N = \pi(\bar{N})$. Then

(a) $R/N = 0$ if and only if $\omega_v([B_i, B_j])\,\xi_k = 0$ for all v in N and i, j, k from 1 to r;

(b) $T/N = 0$ if and only if $\vartheta_v([B_i\, B_j]) = 0$ for all v in N and i, j from 1 to r.

Proof. Let $v \in N$. The horizontal subspace of $T_v(N)$ is spanned by $(B_1)_v, \ldots, (B_r)_v$. By (7), the condition for ω_v in (a) is equivalent to $R(v\xi_i, v\xi_j)(v\xi_k) = 0$, i. e. to $(R/N)_{\pi(v)} = 0$. By (8), the condition for ϑ_v in (b) is equivalent to $T(v\xi_i, v\xi_j) = 0$, i. e. to $(T/N)_{\pi(v)} = 0$.

Remark. The assumption $r > 1$ does not allow us to consider the geodesics as auto-parallel submanifolds. In fact, every geodesic of M can be obtained projecting a suitable integral manifold of some distribution $\Delta(\xi)$:

$$u \to \{\lambda B(\xi)_u \,|\, \lambda \in \mathbf{R}\} \oplus A^*(\xi)_u \text{ for all } u \text{ in } L(M).$$

Obviously, every $\Delta(\xi)$ is involutive and the projection of its maximal integral manifold through u_0 is the geodesic of M through $\pi(u_0)$ tangent to $u_0\xi$.

3. APPLICATIONS AND EXAMPLES

If the curvature or torsion is recurrent, then almost all previous results may be formulated in a simpler way, due to the following.

Proposition 3.1. Let u in $L(M)$ be fixed.

(a) If $R \neq 0$, $\nabla R = R \otimes \rho$ and $\omega_u([B_i, B_j]) \in A(\xi_1, \ldots, \xi_r)$ for i, j from 1 to r, then $\omega_v([B_i, B_j]) \in A(\xi_1, \ldots, \xi_r)$ for all v in the holomony bundle $P(u)$.

(b) If $T \neq 0$, $\nabla T = T \otimes \tau$ and $\vartheta_u([B_i, B_j]) \in (\xi_1, \ldots, \xi_r)$ for i, j from 1 to r then $\vartheta_v([B_i, B_j]) \in (\xi_1, \ldots, \xi_r)$ for all v in $P(u)$.

Proof. For v in $P(u)$ we have from (9) and (10)

$$\omega_v([B_i, B_j]) = \omega_v(f(\omega_u([B_i, B_j]))^*) = f(v)\omega_u([B_i, B_j])$$

so that (a) is true. Similarly, for (b) we use (11) and (12).

Remark. The condition $R \neq 0$ in (a) may be omitted. Really, if $\nabla R = R \otimes \rho$ and R is vanished at some point, then $R = 0$ on M [10]. Analogously for $T \neq 0$ in (b).

We shall reformulate only Corollary 2.2, Proposition 2.5 and Corollary 2.3.

Corollary 3.2. Let $\nabla R = R \otimes \rho$ and $\nabla T = T \otimes \tau$. We assume that $B(\xi_1, \ldots, \xi_r)$ is a generalized Lie triple system at some u in $L(M)$. Then there exists an auto-parallel submanifold N of M through $\pi(u)$ such that $T_{\pi(u)}(N) = (u\xi_1, \ldots, \xi_r)$.

Corollary 3.3. Let $\nabla R = R\otimes\rho$, $\nabla T = T\otimes\tau$ and $\bar{N}$ be an integral manifold of $\Delta(\xi_1,\ldots,\xi_r)$. Then

(a) $R|\pi(\bar{N})=0$ if and only if $\omega_u([B_i, B_j])\xi_k=0$ for some u in $\bar{N}$ and i,j,k from 1 to r;

(b) $T|\pi(\bar{N})=0$ if and only $\vartheta_u([B_i, B_j])=0$ for some u in $\bar{N}$ and i, j from 1 to r.

Corollary 3.4. Let $\nabla R = R\otimes\rho$, $\nabla T = T\otimes\tau$ and $(X_1,\ldots,X_r)$ be a subspace of $T_x(M)$. If the vectors $R(X_i, X_j)X_k$ and $T(X_i, X_j)$ are in $(X_1,\ldots,X_r)$ for i, j, k from 1 to r, then there exists an r-dimensional auto-parallel submanifold through x tangent to $(X_1,\ldots,X_r)$.

Example 3.5. Let M be the biaxial Kleinian space: the underlying space is $\mathbf{RP}^3$ and the absolute consists of two real skew lines. The manifold M may be considered as Lie subgroup of $SL(4, \mathbf{R})$. Its unit e is identified with the point $(1, 0, 1, 0)$ in $\mathbf{RP}^3$. In a neighborhood of e we use the coordinate mapping $x: (p^0, p^1, p^2, p^3) \to (p^1/p^0, p^2/p^0, p^3/p^0)$. Denoting $(\partial/\partial x^i)_e$ by ∂_i, let $\tilde{\partial}_i$ be the correspondent left-invariant vector field. Given a covector φ, we denote by $\tilde{\varphi}$ the left-invariant 1-form for which $\tilde{\varphi}_e=\varphi$. Let I by the identity affinor field. We consider the left-invariant linear connection on M defined by $\nabla_{\partial_i}\tilde{\partial}_j=\varphi(\partial_i)\,\partial_j$. Then $T=\tilde{\varphi}\otimes I - I\otimes\tilde{\varphi}$, $\nabla T = -T\otimes\tilde{\varphi}$ and $R=0$. With respect to the local coordinates $y^1=\arctan x^1$, $y^2=(\log((x^2)^2+(x^3)^2)-\log(1+x^1)^2))/2$, $y^3=\arctan(x^3/x^2)$ the auto-parallel submanifolds of M have the same equations as the planes in an affine 3-space.

Some relations between the Lie triple systems and the generalized Lie triple systems are discussed in [9], assuming $T=0$. The following is of similar type.

Proposition 3.6. Let $\nabla R = R\otimes\rho$ and u be fixed in $L(M)$. Let $[[B_i, B_j], B_k]_u \in B(\xi_1,\ldots,\xi_r)_u \oplus A^*(\xi_1,\ldots,\xi_r)_u$ and $h[B_i, B_j]=0$ on $P(u)$ for i, j, k from 1 to r. Then there exists a torsion-free auto-parallel submanifol N through $\pi(u)$ such that $T_{\pi(u)}(N)=(u\xi_1,\ldots,u\xi_r)$. Moreover,

(a) if $[[B_i, B_j], B_k]_u \in B(\xi_1,\ldots,\xi_r)_u$, then N is locally symmetric;

(b) if $[[B_i, B_j], B_k]_u \in A^*(\xi_1,\ldots,\xi_r)_u$, then N is locally flat.

Proof. The form of $[B_i, B_j]$ on $P(u)$ determines the vector $[[B_i, B_j], B_k]_u$. In the presence of $h[B_i, B_j]|P(u)=0$, the equation (12) implies

$$[[B_i, B_j], B_k]_u=[fA^*_{ij}, B_k]_u=B(A_{ij}\xi_k)_u-(B_k f)(u)(A^*_{ij})_u, \tag{13}$$

where $A_{ij}=\omega_u([B_i, B_j])$. Hence $B(A_{ij}\xi_k)_u \in B(\xi_1,\ldots,\xi_r)_u$ i. e. $\omega_u([B_i, B_j]) \in A(\xi_1,\ldots,\xi_r)$. Then Corollary 3.2 implies the existence of an auto-parallel submanifold N through $\pi(u)$ such that $T_{\pi(u)}(N)=(u\xi_1,\ldots,u\xi_r)$. Since $h[B_i, B_j]=0$ on $P(u)$, it follows from (6) and (8) that $T|N=0$. (a) is proved in [9] (Proposition 6.6 there). (b) follows from Corollary 3.3 (a), because (13) and the hypothesis $[[B_i, B_j], B_k]_u \in A^*(\xi_1,\ldots,\xi_r)_u$ imply $\omega_u([B_i, B_j])\xi_k=0$.

Several partial results concerning the existence of auto-parallel submanifolds are cited in [6], [8], [9]. Perhaps, a more systematic investigation is possible, by using the torsion space introduced in [7].

Definition 3. Let u in $L(M)$ be fixed. Let $\mathbf{t}_u$ be the subspace of $\mathbf{R}^n$ spanned by all vectors of the form $\vartheta_v([B(\xi), B(\eta)])$, where $v \in P(u)$ and $\xi, \eta \in \mathbf{R}^n$. The space $\mathbf{t}_u$ is called the torsion space at u.

The following is proved in [7].

Proposition 3.7. Let $u, v \in L(M)$ and $a \in GL(n, \mathbf{R})$. Then

(a) $\mathbf{t}_{ua}=a^{-1}\mathbf{t}_u$;

(b) $\dim\mathbf{t}_u=\dim\mathbf{t}_v$;

(c) $\mathbf{t}_{ua} = \mathbf{t}_u$ provided that a is in the holonomy group with reference point u;

(d) in the case of reccurrent torsion, $\mathbf{t}_u$ is spanned by all vectors of the form $\vartheta_u([B(\xi), B(\eta)])$, where $\xi, \eta \in \mathbf{R}^n$;

(e) $\mathfrak{f}\, \mathbf{t}_u \subset \mathbf{t}_u$, where $\mathfrak{f}$ is the holonomy algebra;

(f) in the case $1 < \dim \mathbf{t}_u < n$, for every w in $P(u)$, there exists an auto-parallel submanifold N through $\pi(w)$ such that $T_{\pi(w)}(N) = w\mathbf{t}_u$.

There are pairs (M, ∇) having the properties mentioned in (f):

Example 3.8. Let M be the half-space $\{(x^1, \ldots, x^n) \in \mathbf{R}^n x^n > 0\}$ with the parallelization $X_i = x^n \partial/\partial x^i$ for i from 1 to m and $X_j = \partial/\partial x^j$ for j from $m+1$ to n. Let A be a symmetric tensor field of type (1, 2). Consider the linear connection defined by $\nabla_{X_k} X_l = A(X_k, X_l)$ for k, l from 1 to n. By straightforward computation we obtain: $T(X_n, X_i) = -(1/x^n)X_i$ and all other $T(X_k, X_l) = 0$, $\nabla T = T \otimes \tau$, $\tau(X_n) = -1/x^n$ and all other $\tau(X_k) = 0$. Then (d) from Proposition 3.7 together with (8) give $\dim \mathbf{t}_u = m$ for u in $L(M)$.

REFERENCES

1. Cartan E. Sur une classe remarquable d'espaces de Riemann. — Bull. Soc. Math. France, 55, 1927, 114—134.
2. Cartan E. Leçons sur la Géométrie des Espaces de Riemann. 2. éd. Paris, 1951.
3. Grigorova L. Involutive r-geodesic distributions over manifolds with torsion. — Math. and Educ. in Math., 1977 (in press).
4. Kobayashi S., Nomizu K. Foundations of Differential Geometry. V. I. New York—London, 1963.
5. Kobayashi S., Nomizu K. Foundations of Differential Geometry. V. II. New York—London—Sydney, 1969.
6. Mitov D., Grigorova L., Simidčiev G. An approach to the auto-parallel submanifolds of a linearly connected manifold. — C. R. Acad. bulg. Sci., 33, 1980, 751—752.
7. Mitov D. Torsion spaces of a linearly connected manifold. — In: Mathematics and Education in Mathematics. Proc. Tenth Spring Conf., 1981. Sofia, 1981, 158—161.
8. Mitov D., Balabanova R., Stajkova M. On the existence of auto-parallel submanifolds of manifolds with recurrent torsion. — C. R. Acad. bulg. Sci., 34, 1981, 485—486.
9. Mitov D. Totally geodesic submanifolds of a linearly connected manifold without torsion. — Math. Nachr, 106, 1982, 309—322.
10. Wong Y. C. Recurrent tensors on a linearly connected differentiable manifold. — Trans. Amer. Math. Soc., 99, 1961, 325—341.

Received 24. 8. 1982

АВТОПАРАЛЕЛНИ ПОДМНОГООБРАЗИЯ НА МНОГООБРАЗИЕ С ЛИНЕЙНА СВЪРЗАНОСТ

Д. Митов

(РЕЗЮМЕ)

Нека M е свързано n-мерно C^∞-многообразие с линейна свързаност ∇ и $\pi: L(M) \to M$ е главното разслоение на линейните репери. С $(\xi_1, \ldots, \xi_r)$ означаваме подпространството на $\mathbf{R}^n$, породено от линейно независимите вектори $\xi_1, \ldots \xi_r$ от $\mathbf{R}^n$ $(1 < r < n)$. Стандартните хоризонтални векторни

полета $B(\xi_1),\ldots, B(\xi_r)$ пораждат подпространство $B(\xi_1,\ldots, \xi_r)$ на векторното $\mathbf{R}$-пространство на всички стандартни хоризонтални векторни полета. За $u \in L(M)$ векторите $(B_i)_u = B(\xi_i)_u$, $i=1,\ldots, r$ пораждат подпространство $B(\xi_1,\ldots, \xi_r)_u$ на допирателното пространство $T_u(L(M))$. Нека $A_1,\ldots, A_{r'}$ е линейна база на максималната лиева подалгебра $A(\xi_1,\ldots, \xi_r)$ на $\mathbf{gl}(nA\mathbf{R})$, изобразяваща $(\xi_1,\ldots, \xi_r)$ в $(\xi_1,\ldots, \xi$. Фундаменталните векторни полета $A_1^*,\ldots, A_{r'}^*$ пораждат подпространство $A^*(\xi_1,\ldots, \xi_r)$ на векторното $\mathbf{R}$-пространство на всички фундаментални векторни полета, а векторите $(A_1^*)_u,\ldots, (A_{r'}^*)_u$ — подпространство $A^*(\xi_1,\ldots, \xi_r)_u$ на $T_u(L(M))$.

По дефиниция всяко разпределение $\Delta(\xi_1,\ldots, \xi_r): u \to B(\xi_1,\ldots, \xi_r)_u \oplus A^*(\xi_1,\ldots, \xi_r)_u$, $u \in L(M)$, се нарича r-автопаралелно. Нека ϑ е каноничната 1-форма върху $L(M)$, а ω — свързващата 1-форма върху $L(M)$, отговаряща на свързаността ∇. Едно пространство $B(\xi_1,\ldots, \xi_r)$ се нарича обобщена тройна лиева система в $u \in L(M)$, ако $\omega_u([B_i, B_j]) \in A(\xi_1,\ldots, \xi_r)$ и $\vartheta_u([B_i, B_j]) \in (\xi_1,\ldots, \xi_r)$ за всички $i, j=1,\ldots, r$. Ако тези условия са налице за всяко $u \in Q \subset L(M)$, говорим за обобщена тройна лиева система върху Q, респ. за обобщена тройна лиева система, в случая $Q=L(M)$.

Едно r-автопаралелно разпределение $\Delta(\xi_1,\ldots, \xi_r)$ е напълно интегруемо тогава и само тогава, когато $B(\xi_1,\ldots, \xi_r)$ е обобщена тройна лиева система. В общия случай r-автопаралелните разпределения не са напълно интегруеми. Ако $\bar{N}$ е интегрално многообразие на $\Delta(\xi_1,\ldots \xi_r)$, то $B(\xi_1,\ldots, \xi_r)$ е обобщена тройна лиева система върху N. Обратно, ако $B(\xi_1,\ldots, \xi_r)$ е обобщена тройна лиева система върху сечението на околност на фиксирана точка u от $L(M)$ с интегралните линии през u на стандартните хоризонтални векторни полета от $B(\xi_1,\ldots, \xi_r)$, то през u минава $(r+r')$-мерно интегрално многообразие на $\Delta(\xi_1,\ldots, \xi_r)$.

Проекцията (посредством π) на всяко $(r+r')$-мерно интегрално многообразие през u на $\Delta(\xi_1,\ldots, \xi_r)$ е r-мерно автопаралелно подмногообразие на M, чието допирателно пространство в $\pi(u)$ е породено от векторите $u\xi_1,\ldots, u\xi_r$. Обратно, за всяко свързано r-мерно автопаралелно подмногообразие N на M и всяко $u \in \pi^{-1}(N)$ съществува r-автопаралелно разпределение и негово интегрално многообразие през u, чиято проекция е N.

Нека сега кривината и торзията на (M, ∇) са рекурентни. Ако $B(\xi_1,\ldots, \xi_r)$ е обобщена тройна лиева система в някаква точка u на $L(M)$, то през $\pi(u)$ минава r-мерно автопаралелно подмногообразие на M, чието допирателно пространство в $\pi(u)$ е породено от $u\xi_1,\ldots, u\xi_r$. Ако $[[B(\xi_i), B(\xi_j)], B(\xi_k)]_u \in B(\xi_1,\ldots, \xi_r)_u \oplus A^*(\xi_1,\ldots, \xi_r)_u$ и $[B_i, B_j]$ няма хоризонтална компонента върху холономното разслоение през u $(i, j, k=1,\ldots, r)$, то през $\pi(u)$ минава r-мерно автопаралелно подмногообразие без торзия. При това, ако в директната сума липсва $A^*(\xi_1,\ldots, \xi_r)_u$, то N е локално симетрично, а ако липсва $B(\xi_1,\ldots, \xi_r)_u$, то N е локално плоско.

Като примери са разгледани хиперболичното двуосно пространство и един клас отворени подмногообразия на $\mathbf{R}^n$ с нестандартна паралелизация.

ГОДИШНИК НА СОФИЙСКИЯ УНИВЕРСИТЕТ „КЛИМЕНТ ОХРИДСКИ“
ФАКУЛТЕТ ПО МАТЕМАТИКА И МЕХАНИКА
Том 75 Книга 1 — Математика 1981
ANNUAIRE DE L'UNIVERSITE DE SOFIA „KLIMENT OHRIDSKI"
FACULTE DE MATHEMATIQUES ET MECANIQUE
Tome 75 Livre 1 — Mathématiques 1981

ИНВАРИАНТНИ ЛИНЕЙНИ СВЪРЗАНОСТИ ВЪРХУ ПАРАБОЛИЧНОТО ДВУОСНО ПРОСТРАНСТВО

Дечко Митов, Адриян Борисов

Дечко Митов, Адриян Борисов. **Инвариантные линейные связанности на биаксиальном пространстве параболического типа.**

Фундаментальная группа G_8 биаксиального пространства параболического типа B^p 8-мерна. Инвариантных относительно G_8 линейных связностей не существует на B^p. То же самое верно и для единственной транзитивной 7-мерной подгруппы группы G_8. Единственная транзитивная 6-мерная подгруппа G_6 обладает 5-параметрическим семейством G_6-инвариантных линейных связностей на B^p. Полусимметрические G_6-инвариантные линейные связности на B^p образуют 2-параметрическое семейство и удовлетворяют аксиоме плоскости. Соответствующее группе G_6 однородное пространство является редуктивным.

Dečko Mitov, Adrijan Borisov. **Invariant Linear Connections on the Parabolic Biaxial Space.**

The fundamental group G_8 of the parabolic biaxial space B^p is of dimension 8. No G_8-invariant linear connection exists on B^p and the same is true for the unique transitive 7-dimensional subgroup of G_8. The unique transitive 6-dimensional subgroup G_6 admits a 5-parameter family of G_6-invariant linear connections on B^p. The semi-symmetric G_6-invariant linear connections on B^p form a 2-parameter family and these connections satisfy the plane axiom. The homogenous space corresponding to G_6 is reductive.

Нека в тримерното реално проективно пространство $\mathbf{RP}^3$ са фиксирани права j и проективност η на реда точки j_0 с носител j върху снопа равнини с ос j. Ако $N \in j_0$, разглеждаме снопа прави с център N и носител равнината $\eta(N)$. Съвкупността от правите на всички тези снопове прави, когато N описва j_0, е параболична линейна конгруенция от прави J. Колинеациите на $\mathbf{RP}^3$, които трансформират всяка права от J в права от J, образуват група G_8. Клайновото пространство B^p с основно пространство $\mathbf{RP}^3$ и основна група G_8 се нарича параболично двуосно пространство [3; 4]. Считаме, че множеството от точките на B^p съвпада с множеството от точките на $\mathbf{RP}^3$, от което са изключени точките на правата j.

Всички детайли на изложеното в следващия абзац могат да се намерят в [1, гл. X; 6, гл. II; 7].

Нека G е транзитивна свързана лиева група от преобразования на свързаното C^∞-многообразие M. Нека o е произволно фиксирана точка на M и $H \subset G$ е групата на изотропия на o, т. е. $H = \{h \in G\, ho = o\}$. Тогава групата H е затворена и хомогенното пространство G/H може да се отъждестви с M посредством дифеоморфизма $gH \to go$ за $g \in G$. Нека $T_o(M)$ е допирателното пространство към M в o. Хомоморфизмът λ_0 на H в групата от автоморфизмите на $T_o(M)$, който на $h \in H$ съпоставя диференциала $h_{*o}: T_o(M) \to T_o(M)$, се нарича линейно изотропно представяне. Това представяне е точно (т. е. λ_o е мономорфизъм) тогава и само тогава, когато индуцираното по очевиден начин действие на G върху разслоението на линейните репери $L(M)$ на M е свободно (т. е. ако $g \in G$ запазва поне една точка на $L(M)$, то g е единицата на G). Нека $\dim M = n$ и $X_1, \ldots, X_n$ са линейно независими вектори от $T_o(M)$. Линейният репер $u_o = (X_1, \ldots, X_n)$ може да се разглежда като изоморфизма $u_o: \mathbf{R}^n \to T_o(M)$, определен по следния начин: $u_o e_i = X_i$, $i = 1, \ldots, n$, където $e_1, \ldots, e_n$ е естествената база на $\mathbf{R}^n$. Така $T_o(M)$ се отъждествява с $\mathbf{R}^n$, а λ_o — с хомоморфизма λ на H в общата линейна група $\mathrm{GL}(n, \mathbf{R})$, за който

(1) $$\lambda(h) = u_o^{-1} \circ h_{*o} \circ u_o, \quad h \in H.$$

Нека ∇ е линейна свързаност върху M. Ако $g \in G$, нека g_* е преобразованието на тангенциалното разслоение на M, породено от диференциалите $g_{*p}: T_p(M) \to T_p(M)$ за $p \in M$. Свързаността ∇ се нарича G-инвариантна (или инвариантна относно G), ако $g_*(\nabla_X(Y)) = \nabla_{g_*X}(g_*Y)$ за всяко $g \in G$ и за всеки две векторни полета X и Y върху M. Да означим с $\mathfrak{g}$ и $\mathfrak{h}$ лиевите алгебри съответно на G и H. При свързана група H хомогенното пространство $M = G/H$ се нарича редуктивно, ако съществува подпространство $\mathfrak{m}$ на векторното пространство $\mathfrak{g}$, така че

(2) $$\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{m}, \quad [\mathfrak{h}, \mathfrak{m}] \subset \mathfrak{m},$$

където квадратните скоби означават лиевото умножение в $\mathfrak{g}$. Пространството $\mathfrak{m}$ се нарича редуктивно допълнение. При фиксирано $\mathfrak{m}$ множеството на G-инвариантните линейни свързаности върху M е в биективно съответствие с множеството на линейните изображения $\Lambda_{\mathfrak{m}}$ на $\mathfrak{m}$ в лиевата алгебра $\mathfrak{gl}(n, \mathbf{R})$ на $\mathrm{GL}(n, \mathbf{R})$ за които

(3) $$\Lambda_{\mathfrak{m}}([Y, X]) = [\lambda_*(Y), \Lambda_{\mathfrak{m}}(X)], \quad Y \in \mathfrak{h}, \ X \in \mathfrak{m};$$

Тук $\lambda_*: \mathfrak{h} \to \mathfrak{gl}(n, \mathbf{R})$ е диференциалът на λ. Отговарящата на тривиалното изображение $\Lambda_{\mathfrak{m}} = 0$ свързаност ∇_0 се нарича канонична свързаност от II род (съответна на $\mathfrak{m}$). Съответната G-инвариантна линейна свързаност без торзия, чиито геодезични съвпадат с геодезичните на ∇_0, се нарича канонична свързаност от I род.

Основната цел на изследването е да се намери най-широката подгрупа на G_6, относно която съществува инвариантна линейна свързаност върху B^p.

Нека върховете A_1, A_2, A_3, A_4 на координатния тетраедър на една фиксирана проективна координатна система са разположени по следния начин: $A_3 \in j_0$; $A_4 \in j_0$; A_1 лежи в $\eta(A_3)$; A_2 лежи в $\eta(A_4)$; освен това нека равнината $\eta(A_3+A_4)$ съвпада с равнината през правата j и точката A_1+A_2. Тогава, като се ограничим със свързаната компонента на единицата (означена с горен индекс 0) и нормираме, групата G_8 може да се представи чрез елементите на специалната линейна група SL (4, R)

$$(4) \qquad G_8=\left\{ \left\|\begin{matrix} a & b & 0 & 0 \\ c & d & 0 & 0 \\ f & k & \vartheta a & \vartheta b \\ m & n & \vartheta c & \vartheta d \end{matrix}\right\| \in \mathrm{SL}(4, \mathbf{R})\right\}^0/\{\pm I_4\},$$

където I_4 е единичната матрица 4×4. Нормирането осигурява точността на линейното изотропно представяне. Да означим точката A_1 с o. Условията за неподвижност на o, именно $c=f=m=0$ в (4), определят групата H_5 на изотропия на o.

В [2] доказахме, че върху B^p не съществува линейна свързаност, инвариантна относно подгрупата $G_7\subset G_8$, определена с условието $\vartheta=1$ в (4). Следователно в сила е

Твърдение 1. Върху хомогенното пространство $B^p=G_8/H_5$ не съществува G_8-инвариантна линейна свързаност.

Тъй като върху редуктивно хомогенно пространство G/H съществуват G-инвариантни линейни свързаности (очевидно поне каноничните свързаности от II род), то от твърдение 1 веднага получаваме

Следствие 2 Хомогенното пространство G_8/H_5 не е редуктивно.

Нека $\mathfrak{g}_8$ е лиевата алгебра на G_8. Понеже ни интересуват свързаните транзитивни лиеви подгрупи на G_8, достатъчно е да разполагаме с класификация на лиевите подалгебри на $\mathfrak{g}_8$.

Една линейна база на $\mathfrak{g}_8$ е $\{X_1,\dots, X_8\}$, където

$$X_1=\left\|\begin{matrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{matrix}\right\|, \qquad X_2=\left\|\begin{matrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{matrix}\right\|,$$

$$X_3=\left\|\begin{matrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{matrix}\right\|, \qquad X_4=\left\|\begin{matrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{matrix}\right\|,$$

$$X_5=\left\|\begin{matrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{matrix}\right\|, \qquad X_6=\left\|\begin{matrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{matrix}\right\|,$$

$$X_7=\begin{Vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{Vmatrix}, \qquad X_8=\begin{Vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix}.$$

С непосредствени пресмятания (тук и по-нататък лиевото произведение е обикновеният матричен комутатор) се показва, че

$$(5) \qquad [X_i, X_j]=\sum_{k=1}^{7} \alpha_{ij}^k X_k, \quad [X_i, X_8]=\alpha_i X_i, \quad i, j=1,\ldots, 7,$$

с реални коефициенти α_{ij}^k, α_i, а също и че лиевата подалгебра $\mathfrak{g}_7 \subset \mathfrak{g}_8$ линейно породена от $X_1,\ldots, X_7$, е лиевата алгебра на G_7. Но както, вече отбелязахме, върху B^p не съществува G-инвариантна линейна свързаност.

Нека сега $\mathfrak{g}$ е лиева подалгебра на $\mathfrak{g}_8$, която не е линейно породена от някои измежду векторите $X_1,\ldots, X_7$. Тогава $\mathfrak{g}$ има линейна база от вида $\{Y_1,\ldots, Y_r, X+X_8\}$. Избирайки подходящи линейни комбинации за базовите вектори, можем да считаме, че $Y_1,\ldots, Y_r$, X са линейни комбинации само на $X_1,\ldots, X_7$, като $Y_p (p=1,\ldots, r)$ не е подкомбинация на X. Понеже $\mathfrak{g}$ е лиева подалгебра, то за p, $q=1,\ldots, r$ имаме

$$(6) \qquad [Y_p, Y_q]=\sum_{k=1}^{r} \beta_{pq}^k Y_k+\beta_{pq}(X+X_8),$$

$$(7) \qquad [Y_p, X+X_8]=\sum_{k=1}^{r} \beta_p^k Y_k+\beta_p(X+X_8),$$

където β_{pq}^k, β_{pq}, β_p^k, $\beta_p \in \mathbf{R}$. Сравняваме (6) и първото равенство на (5) и получаваме $\beta_{pq}=0$. Следователно $\{Y_1,\ldots, Y_r\}$ е линейна база на лиева подалгебра на $\mathfrak{g}_7$. Сравняването на (7) и второто равенство на (5) дава $\beta_p=0$. Окончателно получаваме: лиевите подалгебри на $\mathfrak{g}_8$, които не са линейно породени от някои измежду векторите $X_1,\ldots, X_7$, са точно лиевите подалгебри на $\mathfrak{g}_8$ с линейна база от вида $\{Y_1,\ldots, Y_r, X+X_8\}$, където:

векторите $Y_1,\ldots, Y_r$, X са линейни комбинации на $X_1,\ldots, X_7$;

векторът X не съдържа Y_p $(p=1,\ldots, r)$ като своя подкомбинация;

векторите $Y_1,\ldots, Y_r$ пораждат линейно лиева подалгебра на $\mathfrak{g}_7$;

за $p=1,\ldots, r$ е изпълнено

$$(8) \qquad [Y_p, X+X_8]=\sum_{k=1}^{r} \alpha_p^k Y_k, \quad \alpha_p^k \in \mathbf{R}.$$

Използуваме класификацията в [5] на лиевите подалгебри на $\mathfrak{g}_7$. Има две 6-мерни подалгебри, едната от които е с линейна база $\{X_1, X_2, X_3, X_4, X_5-X_6, X_7\}$. Полагаме $Y_i=X_i$ за $i=1, 2, 3, 4$, $Y_5=X_5-X_6$ и $Y_6=X_7$. За X остава единствената възможност $X=\alpha X_5+\beta X_6$ с α, $\beta \in \mathbf{R}$; заместваме го в (8) за $p=1,\ldots, 6$ и получаваме $X=\rho(X_5-X_6)$ с $\rho \in \mathbf{R}$. Понеже $Xp_0=Y_5$, трябва да се вземе $\rho=0$. Следователно е определена 7-мерна лиева подалгебра на $\mathfrak{g}_8$ с линейна база $\{X_1, X_2, X_3, X_4, X_5,$

$X_6, X_7, X_8\}$. Елементите на съответната лиева подгрупа на G_8 са групови композиции на матричните експоненциали на линейни комбинации на базовите вектори. От вида на матриците на тези вектори се вижда, че всеки такъв експоненциал запазва равнината с уравнение $p^0=0$ и следователно подгрупата е интранзитивна. Другата 6-мерна подалгебра $\bar{\mathfrak{g}}$ на $\mathfrak{g}_7$ е лиевата алгебра на 6-мерна група $\bar{G}$, относно която не съществува инвариантна линейна свързаност [2]. Следователно няма инвариантна линейна свързаност и относно (евентуално съществуващите) 7-мерни подгрупи на G_8, определени от $\bar{\mathfrak{g}}$.

Преминаваме към 6-мерните подгрупи на G_8. Според [5] има само една транзитивна 6-мерна подгрупа на G_7, именно $\bar{G}$. Както вече отбелязахме, няма $\bar{G}$-инвариантни линейни свързаности. Тогава използуваме 5-мерните лиеви подалгебри на $\mathfrak{g}_7$. Те са 6 на брой. Едната от тях е с линейна база $\{X_1, X_2, X_3, X_6, X_7\}$. Полагаме $Y_i=X_i$ за $i=1, 2, 3, 6, 7$ и $X=\alpha X_4+\beta X_5$, където $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$. Заместването в (8) дава в резултат $\alpha=1/2$, $\beta=0$. Получаваме лиева подалгебра $\mathfrak{g}_6$ с база $\{X_1, X_2, X_3, X_6, X_7, X_4+2X_8\}$. Съответната лиева подгрупа G_6 е

$$(9)\quad G_6=\left\{\left\|\begin{matrix} \exp b\cos a & -\exp b\sin a & 0 & 0 \\ \exp b\sin a & \exp b\cos a & 0 & 0 \\ \exp(-b)f & \exp(-b)k & \exp(-b)\cos a & -\exp(-b)\sin a \\ \exp(-b)m & \exp(-b)n & \exp(-b)\sin a & \exp(-b)\cos a \end{matrix}\right\| \in GL(4, \mathbf{R})\right\}/\{\pm I_4\}.$$

От останалите 5-мерни лиеви подалгебри на $\mathfrak{g}_7$ една не определя 6-мерна лиева подалгебра на $\mathfrak{g}_8$, а другите определят 6-мерни подалгебри, чиито съответни лиеви подгрупи са интранзитивни.

Условията за неподвижност на o, именно $a=f=m=0$ в (9), определят групата $H_3 \subset G_6$ на изотропия

$$(10)\quad H_3=\left\{\left\|\begin{matrix} \exp b & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \exp b & 0 & 0 \\ 0 & \exp(-b)k & \exp(-b) & 0 \\ 0 & \exp(-b)n & 0 & \exp(-b) \end{matrix}\right\| \in GL(4, \mathbf{R})\right\}.$$

Твърдение 3. Хомогенното пространство G_6/H_3 е редуктивно. Редуктивните допълнения образуват 1-параметрично семейство $\{\mathfrak{m}_\rho\}$, където

$$(11)\quad \mathfrak{m}_\rho=\left\{\left\|\begin{matrix} \rho\alpha & -\alpha & 0 & 0 \\ \alpha & \rho\alpha & 0 & 0 \\ \varphi & 2\rho\varphi+\varkappa & -\rho\alpha & -\alpha \\ \varkappa & -\varphi+2\rho\varkappa & \alpha & -\rho\alpha \end{matrix}\right\| \alpha, \varphi, \varkappa \in \mathbf{R}\right\}$$

и параметърът ρ описва $\mathbf{R}$.

Доказателство. Очевидно групата H_3 е свързана. Нека $\mathfrak{g}$ и $\mathfrak{h}$ са лиевите алгебри съответно на G_6 и H_3. Векторното пространство $\mathfrak{g}$ има база $\{Y_1', \ldots, Y_6'\}$, където $Y_1' = X_4 + 2X_6$, $Y_2' = X_2$, $2Y_3' = X_7 - X_1$, $2Y_4' = X_7 + X_1$, $Y_5^1 = Y_5' = X_3$, $Y_6' = X_6$. При това $\{Y_1', Y_2' Y_3'\}$ е база на векторното пространство $\mathfrak{h}$, както се вижда от (10). Нека $\mathfrak{m}$ е редуктивно допълнение. Първото равенство на (2) означава, че $\mathfrak{m}$ има база от вида $\{Y'' = Y_i' + \rho_i Y_1' + \sigma_i Y_2' + \tau_i Y_3' \, i = 4, 5, 6\}$ с реални ρ_i, σ_i, τ_i. Второто равенство на (2) е еквивалентно на условията комутаторите $[Y_i' \, Y_i'']$ $(i = 1, 2, 3;\ j = 4, 5, 6)$ да бъдат линейни комбинации на векторите Y_4'', Y_5'', Y_6''. След пресмятане на комутаторите и сравняване на коефициентите получаваме $\rho_4 = \rho_5 = \sigma_4 - 2\rho_6 = \sigma_5 - 1 = \sigma_6 = \tau_4 + 1 = \tau_5 - 2\rho_6 = \tau_6 = 0$. Следователно $\mathfrak{m}$ има база $\{Z_1, Z_2, Z_3\}$, като

$$Z_1 = \left\|\begin{matrix} \rho & -1 & 0 & 0 \\ 1 & \rho & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\rho & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -\rho \end{matrix}\right\|, \qquad Z_2 = \left\|\begin{matrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2\rho & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{matrix}\right\|,$$

(12)

$$Z_3 = \left\|\begin{matrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2\rho & 0 & 0 \end{matrix}\right\|;$$

положили сме $\rho = \rho_6$. Следователно при фиксирано $\rho \in \mathbf{R}$ елементите на съответното редуктивно допълнение са от вида в (11).

Намираме линейните изображения $\Lambda_\rho : \mathfrak{m}_\rho \to \mathfrak{gl}(3, \mathbf{R})$, удовлетворяващи (3) (пишем индекс ρ вместо $\mathfrak{m}_\rho$), които дават информация най-напред за броя на G_6-инвариантните линейни свързаности.

Твърдение 4. За всяко редуктивно допълнение $\mathfrak{m}_\rho$ линейните свързаности върху хомогенното пространство $B^p = G_6/H_3$, инвариантни относно G_6, образуват 5-параметрично семейство, намиращо се в биективно съответствие с множеството на изображенията $\Lambda_\rho : \mathfrak{m}_\rho \to \mathfrak{gl}(3, \mathbf{R})$ от вида

$$(13) \qquad \Lambda_\rho(X) = \left\|\begin{matrix} A_1^1\alpha & 0 & 0 \\ (A_1^1 - A_2^2)\varphi - A_3^2\varkappa & A_2^2\alpha & A_3^2\alpha \\ -A_2^3\varphi + (A_1^1 - A_3^3)\varkappa & A_2^3\alpha & A_3^3\alpha \end{matrix}\right\|$$

за X от вида на матриците в (11), където независимите параметри A_1^1, A_2^2, A_3^2, A_2^3, A_3^3 описват $\mathbf{R}$.

Доказателство. Нека $B_0^p = \{p = {}^t(p^0, p^1, p^2, p^3) \in B^p \; p^0 \neq 0\}$ (символът t означава транспониране на матрицата) и $x : B_0^p \to R^3$ е координатното изображение с координатни функции x^1, x^2, x^3, именно

$$(14) \qquad x^i(p) = p^i/p^0, \quad i = 1, 2, 3.$$

Специално за o имаме $x(o)=(0,0,0)$. Всеки елемент $h\in H_3$, от вида на матриците в (10), трансформира точката ${}^t(p^0,p^1,p^2,p^3)\in B_0^p$ в точката ${}^t(e^b,p^0,e^bp^1\, e^{-b}\times(kp^1+p^2), e^{-b}(np^1+p^3))$. Посредством (14) за $(u^1, u^2, u^3)\in \mathbf{R}^3$ получаваме

$$h(x^{-1}(u^1,\ u^2,\ u^3))=(u^1,\ e^{-2b}(ku^1+u^2),\ e^{-2b}(nu^1+u^3)). \tag{15}$$

Векторите $\partial_i=(\partial/\partial x^i)_0$, $i=1, 2, 3$, са допирателни в 0 съответно към линиите $\{x^{-1}(s,\ 0,\ 0)\}$, $\{x^{-1}(0,\ s,\ 0)\}$, $\{x^{-1}(0,\ 0,\ s)\}$, където s описва реален интервал. След заместване в (15) намираме

$$\frac{d}{ds}h(x^{-1}(s,\ 0,\ 0))_{s=0}=x^{-1}(1,\ e^{-2b}k,\ e^{-2b}n),$$

$$\frac{d}{ds}h(x^{-1}(0.\ 0.\ s))_{s=0}=x^{-1}(0,\ e^{-2b},\ 0),$$

$$\frac{d}{ds}h(x^{-1}(0,\ s,\ 0))_{s=0}=x^{-1}(0,\ 0,\ e^{-2b}).$$

Тогава от (1), избирайки $u_o=(\partial_1,\ \partial_2,\ \partial_3)$, получаваме

$$\lambda(h)=\begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \exp(-2b)k & \exp(-2b) & 0 \\ \exp(-2b)n & 0 & \exp(-2b) \end{Vmatrix}. \tag{16}$$

Нека $Y\in \mathfrak{h}$. Понеже $Y=\bar\beta Y_1'+\bar\varkappa Y_2'+\bar\nu Y_3'$ с реални коефициенти $\bar\beta$, $\bar\varkappa$ и $\bar\nu$, то

$$\exp(sY)=\begin{Vmatrix} \exp(s\bar\beta) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \exp(s\bar\beta) & 0 & 0 \\ 0 & s\bar\varkappa\exp(-s\bar\beta) & \exp(-s\bar\beta) & 0 \\ 0 & s\bar\nu\exp(-s\bar\beta) & 0 & \exp(-s\bar\beta) \end{Vmatrix}.$$

Оттук с помощта на (16) получаваме

$$\lambda_*(Y)=\frac{d}{ds}\lambda(\exp(sY))_{s=0}=\begin{Vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \bar\varkappa & -2\bar\beta & 0 \\ \bar\nu & 0 & -2\bar\beta \end{Vmatrix}. \tag{17}$$

Нека $X\in \mathfrak{m}_p$, т. е. X е от вида на матриците в (11). Тогава $\Lambda_p(X)$ е матрица 3×3 с компоненти

$$\Lambda_j{}^i(X)=A_j{}^i\alpha+F_j{}^i\varphi+K_j{}^i\varkappa,\quad i,\ j=1,\ 2,\ 3, \tag{18}$$

където с i са номерирани редовете, а с j — стълбовете, а $A_j{}^i$, F_j^i и $K_j{}^i$ са реални числа. Пресмятаме $[Y,\ X]$ и го заместваме в (13) вместо X. Сега от (3), като използуваме (13) и (17), получаваме системата

$$\Lambda_1^1=-\bar\varkappa(A_2^1\alpha+F_2^1\varphi+K_2^1\varkappa)-\bar\nu(A_3^1\alpha+F_3^1\varphi+K_3^1)\varkappa,$$

$$0=2\bar{\beta}(A_2^1\alpha+F_2^1\varphi+K_2^1\varkappa),$$

$$0=2\bar{\beta}(A_3^1\alpha+F_3^1\varphi+K_3^1\varkappa),$$

$$\Lambda_1^2=\bar{\varkappa}((A_1^1-A_2^2)\alpha+(F_1^1-F_2^2)\varphi+(K_1^1-K_2^2)\varkappa)-2\bar{\beta}(A_1^2\alpha+F_1^2\varphi+K_1^2\varkappa)$$
$$-\bar{\nu}(A_3^2\alpha+F_3^2\varphi+K_3^2\varkappa),$$

$$0=\varkappa(A_2^1\alpha+F_2^1\varphi+K_2^1\varkappa),$$

$$0=\bar{\varkappa}(A_3^1\alpha+F_3^1\varphi+K_3^1\varkappa),$$

$$\Lambda_1^3=\bar{\nu}((A_1^1-A_3^3)\alpha+(F_1^1-F_3^3)\varphi+(K_1^1-K_3^3)\varkappa)-2\bar{\beta}(A_1^3\alpha+F_1^3\varphi+K_1^3\varkappa)$$
$$-\bar{\varkappa}(A_2^3\alpha+F_2^3\varphi+K_2^3\varkappa),$$

$$0=\bar{\nu}(A_2^1\alpha+F_2^1\varphi+K_2^1\varkappa),$$

$$0=\bar{\nu}(A_3^1\alpha+F_3^1\varphi+K_3^1\varkappa),$$

където с Λ_j^i сме означили $F_j^i(\bar{\varkappa}\alpha-2\bar{\beta}\varphi)+K_j^i(\nu\alpha-2\beta\varkappa)$ за $i=1, 2, 3$ и $j=1$.

Тази система трябва да бъде тъждествено удовлетворена за всички реални стойности на независимите параметри $\bar{\beta}$, $\bar{\varkappa}$, $\bar{\nu}$, α, φ, $\varkappa$ и следователно

$$A_2^1=A_3^1=A_1^2=A_1^3=0,$$

$$F_1^1=F_2^1=F_3^1=F_2^2=F_3^2=F_2^3=F_3^3=0,\ \ F_1^2=A_1^1-A_2^2,\ \ F_1^3=-A_2^3,$$

$$K_1^1=K_2^1=K_3^1=K_2^2=K_3^2=K_2^3=K_3^3=0,\ \ K_1^2=-A_3^2,\ \ K_1^3=A_1^1-A_3^3.$$

Съгласно с (18) $\Lambda_\rho(X)$ има вида (13).

Сега ще използуваме изображенията Λ_ρ за намиране на явния вид на G_6-инвариантните линейни свързаности. Поради инвариантността достатъчни са стойностите на свързаностите в точката o.

Твърдение 5. Линейните свързаности ∇ върху хомогенното пространство $B^\rho=G_6/H_3$, инвариантни относно G_6, имат в o стойностите

$$\nabla_{\partial_1}\partial/\partial x^1=A_1^1\partial_1,\ \ \nabla_{\partial_1}\partial/\partial x^2=(A_2^2+2\rho)\partial_2+(A_2^3-1)\partial_3,$$

$$\nabla_{\partial_1}\partial/\partial x^3=(A_3^2+1)\partial_2+(A_3^3+2\rho)\partial_3,\ \ \nabla_{\partial_2}\partial/\partial x^1=(A_1^1-A_2^2-2\rho)\partial_2 \tag{19}$$
$$-(A_2^3-1)\partial_3,$$

$$\nabla_{\partial_2}\partial/\partial x^2=\nabla_{\partial_2}\partial/\partial x^3=0,\ \ \nabla_{\partial_3}\partial/\partial x^1=-(A_3^2+1)\partial_2+(A_1^1-A_3^3-2\rho)\partial_3,$$

$$\nabla_{\partial_3}\partial/\partial x^2=\nabla_{\partial_3}\partial/\partial x^3=0.$$

Доказателство. Нека Z_i е векторното поле върху B^ρ, определено от действуващата върху B^ρ 1-параметрична група $\{\exp(sZ_i)\}$, $i=1, 2, 3$. Според [1, гл. X; 7]

$$(20)\qquad (\nabla_{\bar Z_i}\bar Z_j)_o=(u_0\circ(\Lambda_\rho(Z_i))\circ u_o^{-1}))((\bar Z_j)_o)+[\bar Z_i,\ \bar Z_j]_o,\ i,\ j=1,2,3.$$

Имаме

$$\exp(sZ_1)=\begin{Vmatrix} 1+s\rho+so(s) & -s+so(s) & 0 & 0\\ s+so(s) & 1+s\rho+so(s) & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1-s\rho+so(s) & -s+so(s)\\ 0 & 0 & s+so(s) & 1-s\rho+so(s)\end{Vmatrix},$$

$$\exp(sZ_i)=I_4+sZ_i \text{ за } i=2,3.$$

Тук и по-нататък с $o(s)$ е означена реална функция на s (не непременно една и съща на различните места), дефинирана и диференцируема в околност на $0\in\mathbf{R}$, като $o(0)=0$. Нека $(u^1,\ u^2,\ u^3)\in\mathbf{R}$ и $p=x^{-1}(u^1,\ u^2,\ u^3)$. С оглед на (14) имаме

$$(21)\qquad x(\exp(sZ_1))(p)=\left(\frac{s+(1+s\rho)u^1+so(s)}{1+s(\rho-u^1+o(s))},\ \frac{(1-s\rho)u^2-su^3+so(s)}{1+s(\rho-u^1+o(s))},\ \frac{su^2+(1-s\rho)u^3+so(s)}{1+s(\rho-u^1+o(s))}\right),$$

$$x(\exp(sZ_2)(p)=(u^1,\ s+2s\rho u^1+u^3,\ -su^1+u^3),$$

$$x(\exp(sZ_3)(p)=(u^1,\ su^1+u^3,\ s+2s\rho u^1+u^3).$$

Понеже j-тата координатна функция на векторното поле $\bar Z_i$ е

$$(\bar Z_i)^j(p)=\frac{d}{ds}(x^j((\exp(sZ_i))(p))_{s=0} \text{ за } i,\ j=1,2,3,$$

то след диференциране в (21) получаваме

$$(22)\qquad \begin{aligned} \bar Z_1&=(1+(x^1)^2)\partial/\partial x^1+(x^1x^2-2\rho x^2-x^3)\partial/\partial x^2+(x^1x^3\\ &\quad -2\rho x^3+x^2)\,\partial/\partial x^3,\\ Z_2&=(1+2\rho x^1)\partial/\partial x^2-x^1\,\partial/\partial x^3,\\ \bar Z_3&=x^1\,\partial/\partial x^2+(1+2\rho x^1)\,\partial/\partial x^3.\end{aligned}$$

От (12), като използуваме равенството $[\bar Z_i\ \bar Z_j]_o=\overline{[Z_i\ Z_j]_o}$ и (22), намираме

$$(23)\qquad \begin{aligned} [\bar Z_1,\ \bar Z_2]_o&=4\rho\partial_2-2\partial_3,\\ [\bar Z,\ \bar Z_3]_o&=2\partial_2+4\rho\partial_3,\\ [\bar Z_2,\ \bar Z_3]_o&=0.\end{aligned}$$

Сега от (12), (13) и (23) след заместване в (20) при $u_o=(\partial_1,\ \partial_2,\ \partial_3)$ следват равенствата

$$\nabla_{\partial_1}\bar{Z}_1=A_1^1\partial_1,\ \nabla_{\partial_1}\bar{Z}_2=(A_2^2+4\rho)\partial_2+(A_2^3-2)\partial_3,$$

$$\nabla_{\partial_1}Z_3=(A_3^2+2)\partial_2+(A_3^3+4\rho)\partial_3,$$

$$\nabla_{\partial_2}\bar{Z}_1=(A_1^1-A_2^2-4\rho)\partial_2-(A_2^3-2)\partial_3,\ \nabla_{\partial_2}Z_2=0,\ \nabla_{\partial_2}Z_3=0.$$

$$\nabla_{\partial_3}\bar{Z}_1=-(A_3^2+2)\partial_2+(A_1^1-A_3^3-4\rho)\partial_3,\ \nabla_{\partial_3}Z_2=0,\ \nabla_{\partial_3}Z_3=0,$$

като сме взели предвид, че $(Z_i)_o=\partial_i$ за $i=1, 2, 3$, което следва от (22). Заместваме в левите страни на получените равенства изразите за $\bar{Z}_1$, $\bar{Z}_2$, $\bar{Z}_3$ в (22) и получаваме (19).

От проективна гледна точка твърд(интересни са линейните свързаности, удовлетворяващи аксиомата на равнината. Това означава, че през всяка точка и във всяко направлеиие на многообразието минава автопаралелно подмногообразие. Необходимо условие една линейна свързаност ∇ да удовлетворява аксиомата на равнината е ∇ да бъде полусиметрична, т. е. за нейното тензорно поле на торзия T да е в сила

$$(24)\quad T(\partial/dx^i,\ \partial/\partial x^j)=(t(\partial/\partial x^j)\partial/\partial x^i-t(\partial/\partial x^i)\partial/\partial x^j)/(n-1),\ i,\ j=1,\dots,n$$

при локални координати $x^1,\dots, x^n$, където $t(\partial/\partial x^i)=\mathrm{trace}\,(X\to T(X,\partial/\partial x^i))$, а n е броят на измеренията на многообразието.

Твърдение 6. Полусиметричните G_6-инвариантни линейни свързаности ∇ върху хомогенното пространство $B^p=G_6/H_3$ образуват 2-параметрично семейство, определено от (19) при

$$(25)\qquad A_2^2-A_3^3=A_3^2+1=A_2^3-1=0.$$

Доказателство. Поради инвариантността на ∇ достатъчно е (24) да е в сила за ∂_i и ∂_j вместо $\partial/\partial x^i$ и $\partial/\partial x^j$; при това в нашия случай $n=3$. От (19) получаваме

$$T(\partial_1,\ \partial_2)=(2A_2^2+2\rho-A_1^1)\partial_2+2(A_2^3-1)\partial_3,$$

$$T(\partial_1,\ \partial_3)=2(A_3^2+1)\partial_2+(2A_3^3+2\rho-A_1^1)\partial_3,$$

$$T(\partial_2,\ \partial_3)=0,$$

откъдето

$$t(\partial_1)=2(A_1^1-A_2^2-A_3^3-4\rho),\ t(\partial_2)=0,\ t(\partial_3)=0.$$

Заместването сега в (24) след сравняване на коефициентите пред ∂_1, ∂_2, ∂_3 дава (25).

От (13) виждаме, че ако са изпълнени условията (25), то $\Lambda_\rho=0$. Следователно няма полусиметрични канонични свързаности от II род. Разбира се, всички канонични свързаности от I род са полусиметрични, понеже имат нулева торзия.

Твърдение 7. Всяка G_6-инвариантна полусиметрична линейна свързаност ∇ върху хомогенното пространство $B^p=G_6/H_3$ удовлетворява аксиомата на равнината.

Доказателство. Нека R е тензорното поле на кривина на ∇, $S(\partial_j,\partial_m)=\mathrm{trace}\ (X\to R(X,\ \partial_m)\partial_j)$ и $r(\partial_j,\ \partial_m)=\mathrm{trace}\,(X\to R(\partial_j,\ \partial_m)X)$, j, $m=1$, 2, 3. Понеже хомогенното пространство G_6/H_3 е редуктивно, пресмятаме R по формулата [1, гл. X]

$$R(\partial_j, \partial_k)=u_o \circ ([\Lambda_\rho(Z_j), \Lambda_\rho(Z_k)]-\Lambda_\rho([Z_j, Z_k]_{\mathfrak{m}_\rho})-\lambda_*([Z_j, Z_k]_{\mathfrak{h}})) \circ u_o^{-1},$$

където $u_o=(\partial_1, \partial_2, \partial_3)$. Като използваме (13) и (17), получаваме

$$R(\partial_1, \partial_2)=\begin{Vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -(A_1^1-A_2^2-2\rho)^2-1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix}.$$

$$R(\partial_1, \partial_3)=\begin{Vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -(A_1^1-A_2^2-2\rho)^2-1 & 0 & 0 \end{Vmatrix}.$$

$$R(\partial_2, \partial_3)=0,$$

откъдето

$$S(\partial_1, \partial_1)=2((A_1^1-A_2^2-2\rho)^2+1),$$

$$S(\partial_i, \partial_j)=0 \text{ за } (i, j)\neq(1, 1),$$

$$r(\partial_1, \partial_2)=r(\partial_1, \partial_3)=r(\partial_2, \partial_3)=0.$$

Тогава необходимо и достатъчно условие ∇ да удовлетворява аксиомата на равнината е $R(\partial_j, \partial_k)\,\partial_m=(S(\partial_m, \partial_k)\,\partial_j-S(\partial_m, \partial_j)\partial_k)/2$ за $j, k, m=1, 2, 3$.

Заместваме тук намерените R и S и виждаме, че съответните леви и десни страни на получените равенства съвпадат.

В частност всяка канонична свързаност от I род удовлетворява аксиомата на равнината.

ЛИТЕРАТУРА

1. Кобаяси Ш., Номидзу К. Основы дифференциальной геометрии. Т. 2. М. 1981.
2. Митов Д., Борисов А. Инвариантни линейни свързаности върху параболичното двуосно пространство със стеснена основна група. — Науч. тр. Пловд. унив. „П. Хилендарски", кн. 1 — Матем., 20, 1982, 233—250.
3. Петканчин Б. Върху хиперболичните роеве прави в параболичната двуосна геометрия. — Год. Соф. унив., Мат. фак., 58 (1963/1964), 171 — 194.
4. Талантова Н. В. Биаксиальное пространство параболического типа. — Изв. высш. учебн. заведений, Матем., 10, 1959, № 3, 214—228.
5. Талантова Н. В. Классификация подгрупп группы движений биаксиального пространства параболического типа. — Уч. зап. Казан. ГУ, 128, 1968, № 3, 99—114.
6. Хелгасон С. Дифференциальная геометрия и симметрические пространства. М., 1964.
7. Wang H. C. On invariant connections over a principal fibre bundle. — Nagoya Math. J., 13, 1958, 1—19.

Постъпила на 29. 3. 1982 г.

INVARIANT LINEAR CONNECTIONS ON THE PARABOLIC BIAXIAL SPACE

D. Mitov , A. Borisov

(SUMMARY)

Let

$$g_8 = \left\{ \begin{Vmatrix} a & b & 0 & 0 \\ c & d & 0 & 0 \\ f & k & \vartheta a & \vartheta b \\ m & n & \vartheta c & \vartheta d \end{Vmatrix} \in SL(4, \mathbf{R}) \right\}$$

be the group of all collineations of the 3-dimensional real projective space $\mathbf{RP}^3$ preserving a parabolic linear congruence of lines. The Kleinian space B^p with underlying space $\mathbf{RP}^3$ and fundamental group G_8 is called parabolic biaxial.

Among the 7-dimensional subgroups of G_8 only G_7 defined by $\vartheta = 1$ is transitive. In a precedent paper we showed that no G_7-invariant (and hence no G_8-invariant) linear connection exists on B_p.

The unique transitive 6-dimensional subgroup of G_8 has G_6 equal to

$$G_6 = \left\{ \begin{Vmatrix} \exp b \cos a & -\exp b \sin a & 0 & 0 \\ \exp b \sin a & \exp b \cos a & 0 & 0 \\ \exp(-b) f & \exp(-b) k & \exp(-b) \cos a & -\exp(-b) \sin a \\ \exp(-b) m & \exp(-b) n & \exp(-b) \sin a & \exp(-b) \cos a \end{Vmatrix} \in GL(4, \mathbf{R}) \right\}$$

as its component of the unit. Let I_4 be the unit of $GL(4, \mathbf{R})$. The connected Lie group $G_6' = G_6/\{\pm I_4\}$ acts transitively on B^p. Its isotropy subgroub H_3 of the point $(1, 0, 0, 0)$ of B^p is connected. The homogeneous space G_6'/H_3 is reductive. It admits a 1-parameter family of reductive complements. There exists a 5-parameter family of G_6'-invariant linear connections on $B^p = G_6'/H_3$.

The G_6-invariant semi-symmetric connections form a 2-parameter family and all these connections satisfy the plane axiom. Hence all canonical connections of the first kind satisfy the plane axiom. No canonical connection of the second kind is semi-symmetric.

ГОДИШНИК НА СОФИЙСКИЯ УНИВЕРСИТЕТ „КЛИМЕНТ ОХРИДСКИ"

ФАКУЛТЕТ ПО МАТЕМАТИКА И МЕХАНИКА

Том 75 Книга 1 — Математика 1981

ANNUAIRE DE L'UNIVERSITÉ DE SOFIA „KLIMENT OHRIDSKI"

FACULTÉ DE MATHÉMATIQUES ET MÉCANIQUE

Tome 75 Livre 1 — Mathématiques 1981

ON SOME BOUNDARY VALUE PROBLEMS FOR A CLASS OF QUASILINEAR DEGENERATE PARABOLIC EQUATIONS

Nickolai D. Kutev

Николай Д. Кутев. О некоторых граничных задачах для одного класса вырождающихся квазилинейных параболических уравнений.

Доказывается локальный результат существования и единственности классического решения задачи Дирихле и некоторых нелинейных граничных зацач для одного класса вырождающихся квазилинейных параболических уравнений. Используется метод параболической регуляризации и метод последовательных приближений.

Nickolai D. Kutev. **On Some Boundry Value Problems for a Class of Quasilinear Degenerate parabolic Equations.**

In the paper a local result is proved of existence and uniqueness of the classical solution for Dirichlet's problem and some nonlinear boundary value problems for a class of quasilinear degenerate parabolic equations. The method of parabolic regularization and successives approximation is used.

§ 1. The aim of this paper is to investigate a classe of degenerate quasilinear parabolic equations

$$(1)\qquad Pu=\sum_{i,j=1}^{n} a^{ij}(x,x_0,u)u_{x_ix_j}+\sum_{i=1}^{n} b^i(x,x_0,u)u_{x_i}-c(x,x_0,u)u_{x_0}$$
$$+d(x,x_0,u)u=f(x,x_0)$$

in the cylinder $\Omega\times(0,T)\times(-M,M)$. Here Ω is a bounded domain in $\mathbf{R}^n$, which is $C^{2l+4+\lambda}$ smoothly diffeomorphic to a ball, $l\geqq 3$ is an integer and $0<\lambda<1$. Further we shall make the following assumptions regarding the operator P and Ω:

$$\text{(i)}\qquad \sum_{i,j=1}^{n} a^{ij}(x,x_0,p)\xi^i\xi^j\geqq\mu(x,x_0,p)|\xi|^2\geqq 0$$

in the domain $G'\supset\bar{\Omega}\times[0,T]\times[-M,M]$, $\xi\in\mathbf{R}^n$, $a^{ij}\in C^2(G')$,

$c(x, x_0, p) \geqq 0$ in G'; $c(x, x_0, p) \in C^2(G')$;

$c(x, x_0, p) + \mu(x, x_0, p) > 0$, $d(x, x_0, p) \leqq 0$ in $\bar{\Omega} \times [0, T] \times [-M, M]$;

(ii) The coefficients of the operator P and their derivatives $D^{\alpha}_{x,p} D^{\beta}_{x_0}$ of order $|\alpha| + 2\beta \leqq 2l+2$ are Holder continuous with exponent λ in $\Omega \times [0, T] \times [-M, M]$;

(iii) The boundary $\partial\Omega \times (0, T) \times (-M, M)$ is non-charactertstic, i. e.

$$\sum_{i,j=1}^{n} a^{ij}(x, x_0, p) \nu^i \nu^j > 0 \text{ on } \partial\Omega \times (0, T) \times (-M, M).$$

Here $(\nu^1, \nu^2, \ldots, \nu^n)$ is the inner unit normal to $\partial\Omega \times (0, T)$;

(iv) $(\partial^k f / \partial x_0^k)(x, 0) = 0$ for $k = 0, 1, \ldots, l+3$, $x \in \Omega$.

Let us introduce the set $\Omega_0 = \{x \in \Omega;\ c(x, 0, 0) = 0\}$. Following Fichera [8], we consider the boundary value problem

$$(2) \qquad \begin{aligned} u(x, 0) &= 0, \quad x \in \Omega \backslash \Omega_0, \\ u(x, x_0) &= 0, \quad \partial\Omega \times (0, T) \end{aligned}$$

for equation (1).

Under these assumptions we have the following result:

Theorem 1. Suppose (i) — (iv) hold. If there exists a point $P_0 \in \Omega$ so that the operator P is strictly parabolic in $P_0 \times [-M, M]$, then the boundary value problem (1), (2) has a unique classical solution $u(x, x_0) \in C^l(\Omega \times [0, \delta])$, where $\delta \leqq T$ is sufficiently small.

Let us now consider the nonlinear boundary value problem

$$(3) \qquad Bu = \sum_{k=1}^{n} \sigma^k(x, x_0, u) u_{x_k} + \sigma(x, x_0, u) u = \varphi(x, x_0) \text{ on } \partial\Omega \times (0, T);$$

$$u(x, 0) = 0 \qquad \text{for } x \in \Omega \backslash \Omega_0$$

for the quasilinear equation with linear principal part

$$(4) \qquad \begin{aligned} Lu = \sum_{i,j=1}^{n} a^{ij}(x, x_0)\, u_{x_i x_j} + \sum_{i=1}^{n} b^i(x, x_0, u) u_{x_i} - c(x, x_0, u) u_{x_0} \\ + d(x, x_0, u) u = f(x, x_0). \end{aligned}$$

We suppose that

$$(5) \qquad \sum_{k=1}^{n} \sigma^k(x, x_0, p) \nu^k > 0, \ \sigma(x, x_0, p) \leqq 0;\ \partial\Omega \times [0, T] \times [-M, M].$$

Beside that the coefficients of B and φ their derivatives $D^{\alpha}_{x,p} D^{\beta}_{x_0}$ of order $|\alpha| + 2\beta \leqq 2l+3$ are Holder continuous with exponent λ and

(v) $(\partial^k \varphi / \partial x_0^k)(x, 0) = 0$, $k = 0, 1, \ldots, l+3$, $x \in \partial\Omega$ holds.

Under these assumptions we have the following result:

Theorem 2. Suppose (i) — (v) hold for the equation (4). If there exists a point $Q_0 \in \Omega$ so that the operator L is strictly parabolic in $Q_0 \times [-M, M]$, then the boundary value problem (3), (4) has a unique classical solution $u(x, x_0) \in C^l(\Omega \times [0, \delta])$, where $\delta \leqq T$ is sufficiently small.

The equations (1), (4) arise in the applications to studies dealing with some diffusion and temperature processes. For instance the equation describing the temperature distribution in the case of a quasi-stationary regime with a moving thermal source is [1, p. 178].

$$\text{(6)} \qquad \operatorname{div}_{y,z}(\lambda \operatorname{grad} T) - C_v V \partial T/\partial x = 0,$$

where $V \geqq 0$ is the velocity of the source, λ is the heat conduction coefficient and $C_v(T)$ is the limiting volumetric thermal capacity.

Another application of equations (1), (4) is connected with diffusion and filtration of lipid-protein complexes and oxygen through the arterial wall and into surrounding tissue (see [10]).

In conclusion it should be mentioned that, when $c(x, x_0, u) \equiv 1$ the existence and uniqueness of the classical solution of the first boundary value problem for the equation (1) has been proved by Fateeva [7].

As for [10] and [11], they are based on an earlier but wrong result of the same author [12, p. 533].

Let us state that our results are not contained in [7] and unlike [7] the present work includes the equation (6).

§ 2. In this paragraph we will use the inequalities and identities in § 2 in [14] (see also [2, 5]). Further we will use the short notations $u_k = u_{x_k}$, $b^i_{kl} = b^i_{x_k x_l}$, etc. and the summation convention is understood.

Without loss of generality we assume that $\Omega \times (0, T_0)$ is a cylinder, $T_0 \leqq T$, with a base Ω, which is a ball, its centre and radius being respectively 0 and R. Besides, the operator P is strictly parabolic in the points $\{(0, x_0, p);\ 0 \leqq x_0 \leqq T_0,\ |p| \leqq M\}$.

As in [14] we assume that $d(x, x_0, p) < 0$ eventually for $0 \leqq x_0 \leqq T_1$ $(T_1 \leqq T_0)$.

Let us now consider the regularized boundary value problem

$$\text{(7)} \qquad P^{\varepsilon,N}(u^{\varepsilon,N}) = \sum_{i,j=1}^{n} a^{\varepsilon,ij}(x, x_0, u^{\varepsilon,N-1}) u^{\varepsilon,N}_{ij} + \sum_{i=1}^{n} b^i(x, x_0, u^{\varepsilon,N-1}) u^{\varepsilon,N}_i$$

$$-(c(x, x_0, u^{\varepsilon,N-1}) + \varepsilon) u^{\varepsilon,N}_{x_0} + d(x, x_0, u^{\varepsilon,N-1}) u^{\varepsilon,N} = f(x, x_0),\ \Omega \times (0, T_1);$$

$$\text{(8)} \qquad \begin{aligned} &u^{\varepsilon,N}(x, 0) = 0, \qquad x \in \Omega, \\ &u^{\varepsilon,N}(x, x_0) = 0, \qquad \partial\Omega \times (0, T_1). \end{aligned}$$

We choose $u^{\varepsilon,0}(x, x_0) \equiv 0$ for $\varepsilon > 0$ and besides we use the short notations $a^{\varepsilon,ij}(x, x_0, p) = a^{ij}(x, x_0, p) + \varepsilon\delta^{ij}$, where $\delta^{ij} = 0$ for $i \neq j$ and $\delta^{ii} = 1$ for $i = 1, 2, \ldots, n$.

Next we will show that the sequence of successive approximations $u^{\varepsilon,N}(x, x_0)$ can be formed.

Lemma 1. Under the assumptions of Theorem 1 the following estimates

$$\text{(9)} \qquad \sup_{\bar{\Omega} \times [0, T_2]} u^{\varepsilon,N}(x, x_0) \leqq M$$

hold, where $T_2 \leqq T_1$, $\varepsilon > 0$, $N = 1, 2, \ldots$

Proof. We consider the auxiliary function

$$\text{(10)} \qquad v^0(x, x_0) = (u^{\varepsilon,N})^2 + x_0^2 \exp(\xi(R^2 - |x|^2)) - (1/\zeta^2) \exp(\zeta^3 x_0).$$

The estimate

$$P^{\varepsilon,N}v^0 \geqq 2a^{ij}u_i^{\varepsilon,N}u_j^{\varepsilon,N}-d(u^{\varepsilon,N})^2+2u^{\varepsilon,N}f+x_0^2(4\xi^2|x|^2\mu$$

$$-O(\xi))\exp(\xi(R^2-|x|^2))-2cx_0\exp(\xi(R^2-|x|^2))+c\zeta\exp(\zeta^3x_0)$$

$$-(d/\zeta^2)\exp(\zeta^3x_0)\geqq a^{ij}u_i^{\varepsilon,N}u_j^{\varepsilon,N}+x_0^2\mu(x,x_0,u^{\varepsilon,N-1})+c(x,x_0,u^{\varepsilon,N-1})-d/\zeta^2$$

holds, when ξ, $\zeta(\zeta\geqq\zeta_1')$ are sufficiently large (depending on C^0 norm of the coefficients of P and C^1 norm of f), because $|f(x, x_0)|\leqq C_0x_0$. Since $v^0(x, 0)<0$ and $v^0(x, x_0)=\varphi^2+x_0^2-(1/\zeta^2)\exp(\zeta^3x_0)$ on $\partial\Omega\times(0, T_1)$, we obtain that $v^0(x, x_0)<0$ on $\partial\Omega\times(0, T_2')$ for $T_2'\leqq 1/\zeta$, $\zeta\geqq\max(\zeta_1', \zeta_1'')$, because $|\varphi(x, x_0)|\leqq C_1x_0$.

From the maximum principle it follows that $v^0(x, x_0)$ cannot attain a nonnegative maximum in $\Omega\times(0, T_2')$, i. e. $v^0(x, x_0)<0$ in $\Omega\times(0, T_2')$. Hence

$$(11)\qquad (u^{\varepsilon,N})^2\leqq(1/\zeta^2)\exp(\zeta^3x_0)\leqq e^2/\zeta^2$$

for $0\leqq x_0\leqq T_2''$, $T_2''=\min(T_2', 2/\zeta^3)$.

Thus we proved a slightly stronger result. Lemma 1 follows from (11), when $T_2=\min(T_2'', (2/\zeta^3)\ln M\zeta))$.

In our further calculations, for convenience we omit the index ε and with M_i, K_i, C_i, $i=1, 2,\ldots$ we denote constants which depend on the coefficients of the equation, the boundary condition and the domain Ω, but not on ε, N and ζ.

Let r is a small enough positive constant, so that the operator P is strictly parabolic for $\{(x, x_0, p);\ |x|\leqq r,\ 0\leqq x_0\leqq T_3,\ |p|\leqq M\}$, where $T_3\leqq T_2$.

Lemma 2. Under the assumptions of Theorem 1 the following estimates

$$(12)\qquad \sup_{|x|\leqq r,\ 0\leqq x_0\leqq T_4}|D_x^\alpha D_{x_0}^\beta u^{\varepsilon,N}(x, x_0)|\leqq K_m'/\zeta$$

hold, for $|\alpha|+2\beta=m$, $1\leqq m\leqq 2l+2$, $\varepsilon>0$, $N=1, 2,\ldots$, where the constants K_m' do not depend on ε, N and ζ.

The proof follows as the one in [14], because the inner estimates (12) do not depend on the boundary condition.

In order to prove the uniformly boundedness of the derivatives of $u^{\varepsilon,N}(x, x_0)$ in $\omega\times(0, T_4)$, $\omega=\{(x, x_0);\ r<|x|<R\}$, we make a polar change of the x variables and for convenience, we preserve the previous notations considering that $x_1, x_2,\ldots, x_{n-1}$ are angular variables and x_n is a radial variable.

Lemma 3. Under the assumptions of Teorem 1 the estimates

$$(13)\qquad \sup_{\bar\omega\times[0,\ T_5]}|D_{xx_0}^\alpha u^{\varepsilon,N}(x, x_0)|\leqq K_1/\zeta$$

hold, for $T_5\leqq T_4$, $|\alpha|=1$, $\varepsilon>0$, $N=1, 2,\ldots$, where the constant K_1 does not depend on ε, N and ζ.

Proof. Let us introduce the auxiliary functions

$$(14)\qquad v^1(x, x_0)=n_1[m_1\sum_{k=1}^{n-1}(u_k^N)^2+2(u_n^N)^2+u_n^NT(u^N)]\exp(\xi_1(R-x_n)$$

$$-\eta_1x_0)+(u_{x_0}^N)^2\exp(-\eta_1x_0)+p_1v^0(x, x_0),$$

$$T(u^N)=4\sum_{k=1}^{n-1}{}' A^{nk}(x,\ x_0)u_k^N, \tag{15}$$

where $A^{nk}(x, x_0)$ are smooth extensions into $\bar{\omega}\times[0, T_4]$ of the functions $a^{nk}(x, x_0, 0)/a^{nk}(x, x_0, 0)$ which are defined on $\partial\Omega\times[0, T_4]$. The derivatives $D_x^\alpha D_{x_0}^\beta$ of order $|\alpha|+2\beta\leqq 2l+3$ of the coefficients $A^{nk}(x, x_0)$ are Holder continuous with exponent λ in $\ddot{\omega}\times[0, T_4]$.

The positive constant m_1 is chosen so that

$$m_1=2+(4nH_1)^2, \tag{16}$$

where H_1 is the maximum of the coefficients of operator T. From the choice of m_1 we have

$$m_1\sum_{k=1}^{n-1}{}'(u_k^N)^2+2(u_n^N)^2+u_n^N T(u^N)\geqq\sum_{k=1}^{n}{}'(u_k^N)^2, \tag{17}$$

$$\begin{aligned}2m_1 \sum_{k=1}^{n-1}{}' a^{ij}u_{ki}^N u_{kj}^N+4a^{ij}u_{ni}^N u_{nj}^N+2a^{ij}(Tu^N)_i u_{nj}^N\\ \geqq\frac{3m_1}{2}\sum_{k=1}^{n-1}{}' a^{ij}u_{ki}^N u_{kj}^N+3a^{ij}u_{ni}^N u_{nj}^N-M_1\sum_{k=1}^{n}{}'(u_k^N)^2.\end{aligned} \tag{18}$$

We will show that $v^1(x, x_0)$ can not attain a positive maximum on $\partial\Omega\times(0, T_4)$. Let us estimate $Lv^1=-\partial v^1/\partial x_n-v^1$. A simple computation gives

$$\begin{aligned}Lv^1\geqq n_1\{\xi_1\sum_{k=1}^{n}{}'(u_k^N)^2-2m_1 \sum_{k=1}^{n-1}{}' u_k^N\, u_{kn}^N-4u_n^N\, u_{nn}^N-u_{nn}^N T(u^N)\\ -u_n^N(T(u_n^N)-[T,\partial/\partial x_n](u^N))\}\exp(-\eta_1 x_0)-u_{x_0}^N\, u_{x_0x_n}^N \exp(-\eta_1 x_0)\\ -p_1\partial v^0/\partial x_n-2n_1(u_n^N)^2\exp(\eta_1 x_0)-p_1(x_0^2-(1/\zeta^2)\exp(\zeta^2 x_0)).\end{aligned}$$

From the boundary condition (8) we obtain that $u^N=u_k^N=0$ for $k=0, 1,\dots, n-1$ on $\partial\Omega\times(0, T_4)$. Beside that $\partial v^0/\partial x_n=-2R\xi x_0^2$ on $\partial\Omega\times(0, T_4)$ and consequently

$$\begin{aligned}Lv^1\geqq n_1[\xi_1(u_n^N)^2-4n_n^N u_{nn}^N-4u_n^N\sum_{k=1}^{n-1}(a^{nk}/a^{nn})u_{nk}^N\\ -2(u_k^N)^2]\exp(-\eta_1 x_0)+p_1[2R\xi x_0^2-x_0^2+1/\zeta^2].\end{aligned}$$

Clearly

$$\begin{aligned}4u_n^N\, u_{nn}^N+4u_n^N \sum_{k=1}^{n-1}{}'(a^{nk}/a^{nn})u_{nk}^N=4(u_n^N/a^{nn})\sum_{k=1}^{n}{}' a^{nk}u_{nk}^N\\ =(4u_n^N/a^{nn})\left[-\sum_{ij=1}^{n-1}{}' a^{ij}\ u_{ij}^N-\sum_{i=1}^{n} b^i u_i^N+cu_{x_0}^N-du^N+f\right]\\ =(-4b^n/a^{nn})(u_n^N)^2+(4u_n^N f)/a^{nn}.\end{aligned}$$

Using the estimate

$$(19)\qquad |D^{\alpha}_{xx_0} f(x,\ x_0)| \leqq C_m x_0$$

for $\alpha=m$, $1\leqq m\leqq l+3$, we obtain that

$$(20)\qquad Lv^1 \geqq (u^N_n)^2 + x_0^2 + 1/\zeta^2 > 0 \quad \text{on } \partial\Omega\times(0,\ T_4),$$

when ξ_1, ξ are sufficiently large (depending on C^0 norm of the coefficients of P and C^1 of f).

From the maximum principle it follows that $v^1(x,\ x_0)$ can not attain a nonnegative maximum on $\partial\Omega\times(0,\ T_4)$.

As in [14], when n_1, ξ_1, η_1, p_1, ζ are sufficieutly large and under the assumption

$$(21)\qquad \sum_{k=1}^{n-1}{}' (u_k^{N-1})^2 \leqq (p_1 e^2)/(n_1\zeta^2),\ (u_{x_0}^{N-1})^2 \leqq (p_1 e^2)/\zeta^2$$

we prove that $v^1(x,\ x_0)$ can not attain a nonnegative maximum in the domain $\omega\times(0,\ T_5)$, on the bases of the cylinder and for $x_n=r$, $0\leqq x_0\leqq T_5$. Consequently $v^1(x,\ x_0)<0$ in $\bar{\omega}\times[0,\ T_5]$ and from (17) follows the inductive hypothesis (21) for N.

L e m m a 4. Under the assumptions of Theorem 1 the estimates

$$(22)\qquad \sup_{\bar{\omega}\times[0,T_0]} |D^{\alpha}_{xx_0} u^{\varepsilon,N}(x,\ x_0)| \leqq K_2/\zeta$$

hold, for $T_0\leqq T_5$, $\alpha=2$, $\varepsilon>0$, $N=1,\ 2,\ldots$, where the constant K_2 does not depend on ε, N and ζ.

Proof. We consider the auxiliary functions

$$(23)\qquad v^2(x,\ x_0)=n_2\left[m_2\sum_{k=0,\ l=1}^{n-1}{}'(u^N_{kl})^2+2\sum_{k=0}^{n}{}'(u^N_{kn})^2+\sum_{k=0}^{n}u^N_{kn}T^k(u^N)\right]\exp((R$$

$$-x_n)\xi_2-\eta_2 x_0)+(u^N_{x_0x_0})^2\exp(-\eta_2 x_0)+p_2 v^1(x,x_0);$$

$$(24)\qquad \begin{aligned} T^k(u^N)&=4\sum_{i=1}^{n-1}{}' A^{ni}(x,\ x_0)u^N_{ki},\ \ \mathrm{k}=0,\ 1,\ldots,\ n-1,\\ T^n(u^N)&=4\left(-\sum_{i=1}^{n-1}{}' A^{ni}\sum_{k=1}^{n-1}{}' A^{nk}u^N_{kl}+\sum_{i,j=1}^{n-1}{}' A^{ij}u^N_{ij}\right). \end{aligned}$$

The functions $A^{nk}(x,\ x_0)$ are introduced in Lemma 3. The positive constant m_2 is chosen so that

$$(25)\qquad m_2=2+(4n)^3H_2^2,$$

where H_2 is the maximum of the coefficients of the operators T_k, $k=0,\ 1,\ldots,n$. From the choice of m_2 we have

$$(26)\qquad m_2\sum_{k=0,\ l=1}^{n-1}{}'(u^N_{kl})^2+2\sum_{k=0}^{n}{}'(u^N_{kn})^2+\sum_{k=0}^{n}{}' u^N_{kn}T^k(u^N)\geqq\sum_{k=0,\ l=1}^{n}(u^N_{kl})^2,$$

$$(27)\qquad \begin{aligned} &2m_2\sum_{k=0,\ l=1}^{n-1}{}' a^{ij}u^N_{kli}u^N_{klj}+4\sum_{k=0}^{n}{}' a^{ij}u^N_{kni}u^N_{knj}+2\sum_{k=0}^{n}{}' a^{ij}u^N_{kni}(T^ku^N)_j\\ &\geqq\frac{3m_2}{2}\sum_{k=0,\ l=1}^{n-1}{}' a^{ij}u^N_{kli}u^N_{klj}+3\sum_{k=0}^{n}{}' a^{ij}u^N_{kni}u^N_{knj}-M_2\sum_{k=0,\ l=1}^{n}{}'(u^N_{kl})^2. \end{aligned}$$

We will show that $v^2(x, x_0)$ can not attain a nonnegative maximum on $\partial\Omega\times[0, T_\delta]$. Let us estimate Lv^2. We have

$$Lv^2 \geqq n_2\{\xi_2 \sum_{k=0,\, l=1}^{n}{}' (u_{kl}^N)^2 - 2m_2 \sum_{k=0,\, l=1}^{n-1}{}' u_{kl}^N u_{kln}^N - 4\sum_{k=0}^{n}{}' u_{kn}^N u_{knn}^N$$

$$-\sum_{k=0}^{n}{}' u_{knn}^N T^k(u^N) - \sum_{k=0}^{n}{}' u_{kn}^N (T^k(u_n^N) - [T^k, \partial/\partial x_n](u^N))\}\exp(-\eta_2 x_0)$$

$$-u_{x_0x_0}^N u_{x_0x_0x_n}^N \exp(-\eta_2 x_0) - 2n_2 \sum_{k=0}^{n}{}' (u_{kn}^N)^2 \exp(-\eta_2 x_0) + p_2 Lv^1.$$

From the boundary condition (8) — $u^N = u_k^N = u_{kl}^N = 0$ on $\partial\Omega\times[0, T_\delta]$ for $l, k = 0, 1, \ldots, n-1$. Consequently

$$Lv^2 \geqq n_2 \Big\{(\xi_2 - 2)\sum_{k=0}^{n}{}' (u_{kn}^N)^2 - 4\sum_{k=0}^{n}{}' u_{kn}^N u_{knn}^N - 4\sum_{k=0}^{n-1}{}' u_{kn}^N \sum_{l=0}^{n-1}{}' (a^{nl}/a^{nn}) u_{knl}^N$$

$$-4u_{nn}^N \Big[-\sum_{l=1}^{n-1}{}' (a^{nl}/a^{nn}) \sum_{j=1}^{n-1}{}' (a^{nj}/a^{nn}) u_{njl}^N + \sum_{jl=1}^{n-1}{}' (a^{lj}/a^{nn}) u_{nlj}^N\Big]\Big\}\exp(-\eta_2 x_0)$$

$$+ p_2 Lv^1.$$

Let us transform the following expression

$$I = \sum_{k=0}^{n}{}' u_{kn}^N u_{knn}^N + \sum_{k=0}^{n-1}{}' u_{kn}^N \sum_{l=1}^{n-1}{}' (a^{nl}/a^{nn}) u_{knl}^N + u_{nn}^N \Big[\sum_{lj=1}^{n-1}{}' (a^{lj}/a^{nn}) u_{nlj}^N$$

$$-\sum_{l=1}^{n-1}{}' (a^{nl}/a^{nn}) \sum_{j=1}^{n-1}{}' (a^{nj}/a^{nn}) u_{nlj}^N\Big] = (1/a^{nn}) \sum_{k=0}^{n-1}{}' u_{kn}^N \Big\{\Big(\sum_{l=1}^{n}{}' a^{nl} u_{nl}^N\Big)_k$$

$$-\sum_{l=1}^{n}{}' a_k^{nl} u_{nl}^N\Big\} + (u_{nn}^N/a^{nn})\Big\{a^{nn} u_{nnn}^N - \sum_{l=1}^{n-1}{}' (a^{nl}/a^{nn}) \Big[\Big(\sum_{j=1}^{n-1}{}' a^{nj} u_{nj}^N\Big)_l$$

$$-\sum_{j=1}^{n-1}{}' a_l^{nj} u_{nj}^N\Big] + \sum_{lj=1}^{n-1}{}' a^{lj} u_{nlj}^N\Big\} = I_1 + I_2.$$

The estimate of I_1 is trivial and for I_2 simple computation gives

$$I_2 = (u_{nn}^N/a^{nn}) \Big\{a^{nn} u_{nnn}^N - \sum_{l=1}^{n-1}{}' (a^{nl}/a^{nn}) \Big[\Big(\sum_{j=1}^{n-1} a^{nj} u_{nj}^N\Big)_l + \sum_{lj=1}^{n-1}{}' a^{lj} u_{nlj}^N\Big]\Big\}$$

$$= (u_{nn}^N/a^{nn}) \Big\{a^{nn} u_{nnn}^N + \sum_{l=1}^{n-1}{}' (a^{nl}/a^{nn})(a^{nn} u_{nn}^N + b^n u_n^N - f)_l$$

$$+\sum_{lj=1}^{n-1} a^{lj} u_{nlj}^N\Big\} = (u_{nn}^N/a^{nn}) \Big\{\Big(\sum_{lj=1}^{n} a^{lj} u_{lj}^N\Big)_n - \sum_{lj=1}^{n}{}' a_n^{lj} u_{lj}^N + \sum_{l=1}^{n-1}{}' (a^{nl}/a^{nn})(b^n u_n^N$$

$$-f)_l\Big\} = (u_{nn}^N/a^{nn}) \Big\{-\sum_{k=1}^{n}{}' (b^k u_k^N)_n + (c u_{x_0}^N)_n - (d u^N)_n + f_n$$

$$-\sum_{lj=1}^{n} a_n^{lj} u_{lj}^N + \sum_{l=1}^{n-1} (a^{nl}/a^{nn})(b^n u_n^N - f)_l\Big\}.$$

Therefore, from (19), (20) when ξ_2, p_2 are sufficiently large we have the estimate

(28) $$Lv^2 \geqq \sum_{k=0}^{n}{}' (u_{kn}^N)^2 + x_0^2 + 1/\zeta^2 > 0, \quad \partial\Omega \times [0, T_5].$$

From the maximum principle it follows that $v^2(x, x_0)$ cannot attain a nonnegative maximum on $\partial\Omega \times [0, T_5]$.

In order to end the proof of Lemma 4 let us assume that the estimates

(29) $$\sum_{k=0,\, l=1}^{n}{}' (u_{kl}^{N-1})^2 \leqq (p_2 p_1 e^2)/(n_2\zeta^2),$$

$$(u_{x_0x_0}^{N-1})^2 \leqq (p_2 p_1 e^2)/\zeta^2$$

hold. As in [14], when ξ_2, η_2, p_2, n_2, ζ are sufficiently large we obtain the result that $v^2(x, x_0)$ cannot attain a nonnegative maximum in $\bar{\omega} \times [0, T_6]$. Hence, by means of (26) we derive the inductive hypothesis (29) for N.

Lemma 5. Under the assumptions of Theorem 1 the estimates

(30) $$\sup_{\bar{\omega}\times[0,\, T_{\rho+4}]} |D_{xx_0}^{\alpha} u^N(x, x_0)| \leqq K_\rho/\zeta$$

hold, for $T_{\rho+4} \leqq T_{\rho+3}$, $|\alpha| = \rho$, $3 \leqq \rho \leqq l+1$, $\varepsilon > 0$, $N = 1, 2, \ldots$, where the constants K_ρ do not depend on ε, N and ζ.

Proof. We prove inductively the estimates

(31) $$\sum_{|\alpha'|+\beta=\rho,\ \beta\neq\rho} (D_x^{\alpha} D_{x_0}^{\beta} u^{N-1}(x, x_0))^2 \leqq (p_\rho p_{\rho-1} \ldots p_1 e^2)/(n_\rho\zeta^2),$$

$$(D_{x_0}^{\rho} u^{N-1}(x, x_0))^2 \leqq (p_\rho p_{\rho-1} \ldots p_1 e^2)/\zeta^2$$

in $\bar{\omega} \times [0, T_{\rho+4}]$, by means of the auxiliary functions

(32) $$v^\rho(x, x_0) = n_\rho[m_\rho \sum_{\alpha+\beta=\rho,\ \beta\neq\rho}{}' (D_{x'}^{\alpha} D_{x_0}^{\beta} u^N)^2 + 2 \sum_{|\alpha+\beta+\gamma|=\rho,\ \beta\neq\rho,\ \gamma\neq 0}{}' (D_{x'}^{\alpha} D_{x_0}^{\beta} D_{x_n}^{\gamma} u^N)^2$$

$$+ \sum_{|\alpha+\beta+\gamma|=\rho,\ \beta\neq\rho,\ \gamma\neq 0}{}' D_{x'}^{\alpha} D_{x_0}^{\beta} D_{x_n}^{\gamma} u^N T^{\alpha\beta\gamma}(u^N)]\exp(\xi_\rho(R-x_n)) + (D_{x_0}^{\rho} u^N)^2\}\exp(-\eta_\rho x_0)$$

$$+ p_\rho v^{\rho-1}(x, x_0).$$

The coefficients of $T^{\alpha\beta\gamma}(x, x_0, u, u_{x_0}, u_{x_1}, \ldots, u_{x_{n-1}})$ are determined on $\partial\Omega \times [0, T_{\rho+3}]$ by means of the condition

(33) $$T^{\alpha\beta\gamma}(u^N) = -4 D_{x'}^{\alpha} D_{x_0}^{\beta} D_{x_n}^{\gamma} u^N.$$

The derivatives $D_{x_n}^{2\gamma} u^N$ in (33) are substituted for by their equivalent expressions on $\partial\Omega \times [0, T_{\rho+3}]$ using the equation (7) and the derivatives of (7) up to the necessary order and u_n^N is substituted by the expression $-\sum_{k=1}^{n-1}(a^{nk}/a^{nn})u_k^N$. In $\omega\times[0, T_{\rho+3}]$ the coefficients of $T^{\alpha\beta\gamma}$ are smoothly extended so that their derivatives $D_x^\gamma D_{x_0}^\mu$ of order $|\gamma|+2\mu\leqq 2l=4-\rho$ are Holder continuous with exponent λ. The positive constant m_ρ is chosen so that

(34) $$m_\rho=2+(4n)^{\rho+1}H_\rho^2,$$

where H_ρ is the maximum of the coefficients of the operators $T^{\alpha\gamma\beta}$.

Proof of Theorem 1. By means of Lemmas 1 — 5, using the Ascoli — Arzela theorem and a diagonalization argument we can find subsequences $\varepsilon_k\to 0$, $N_k\to\infty$, so that $D_{xx_0}^\alpha u^{\varepsilon_k,N_k}(x, x_0)\rightrightarrows D_{xx_0}^\alpha u(x, x_0)$ for $\alpha\leqq l$. Let us now consider $p^N(u^N-u^{N-1})$. We have $P^N(u^N-u^{N-1})=[a^{ij}(x, x_0, u^{N-2})-a^{ij}(x, x_0, u^{N-1})]u_{ij}^{N-1}+[b^i(x, x_0, u^{N-2})-b^i(x, x_0, u^{N-1})]u_i^{N-1}-[c(x, x_0, u^{N-2})-c(x, x_0, u^{N-1})]u_{x_0}^{N-1}+[d(x, x_0, u^{N-2})-d(x, x_0, u^{N-1})]u^{N-1}=g(x, x_0, u^{N-1}, u^{N-2})$.

From the mean value theorems, since $|u_{ij}^N(x, x_0)|\leqq A_1x_0$; $|u_j^N(x, x_0)|\leqq A_1x_0$; $|u_{x_0}^N(x, x_0)|\leqq A_1x_0$; $|u^N(x, x_0)|\leqq A_1x_0$, for $N=1, 2,\ldots$, where the constant A_1 does not depend on ε and N, we obtain $|g(x, x_0, u^{N-1}, u^{N-2})|\leqq A_2x_0\sup|u^{N-1}-u^{N-2}|$.

As in Lemma 1 we consider the auxiliary function $z^N(x, x_0)=(u^N-u^{N-1})^2+\gamma[x_0^2\exp(\xi(R^2-|x|^2))-(1/\zeta^2)\exp(\xi^3x_0)]$.

A simple computation gives

$$\begin{aligned}P^Nz^N&\geqq 2a^{ij}(u^N-u^{N-1})_i(u^N-u^{N-1})_j+2(u^N-u^{N-1})g-d(u^N-u^{N-1})^2\\&+\gamma[x_0^2(4\xi^2\mu|x|^2-O(\xi))\exp(\xi(R^2-|x|^2))-2cx_0\exp(\xi(R^2-|x|^2))\\&+c\zeta\exp(\zeta^3x_0)-(d/\zeta^2)\exp(\zeta^3x_0)]\geqq g^2/d+\gamma[x_0^2\mu(x, x_0, p)+c(x, x_0, p)]\\&\geqq -A_2^2x_0^2(\sup|u^{N-1}-u^{N-2}|)^2/d_0+\gamma_0^2\mu_0\end{aligned}$$

when ξ,ζ are sufficiently large and $d(x,x_0,p)\leqq -d_0<0, c(x, x_0,p)+\mu(x, x_0, p)\geqq\mu_0>0$. When $\gamma\geqq A_2^2(\sup|u^{N-1}-u^{N-2}|)^2/d_0\mu_0$ we have $p^Nz^N>0$. Since $z^N(x, 0)=-1/\zeta^2<0$ and $z^N(x, x_0)=\gamma[x_0^2-(1/\zeta^2)\exp(\zeta^3x_0)]<0$ on $\partial\Omega$, for $x_0\leqq 1/\zeta$, it follows from the maximum principle that $z^N(x, x_0)<0$ in $\Omega\times[0, \delta']$, $\delta'=\min(T_{l+s}, 1/\zeta)$.

Consequently

$$\sup_{\Omega\times[0,\delta']}|u^N-u^{N-1}|\leqq(A_3/\zeta)\sup_{\Omega\times[0,\delta']}|u^{N-1}-u^{N-2}|$$

and when $\zeta\geqq 2A_3$ we obtain $u^N(x, x_0)\rightrightarrows u(x, x_0)$. Therefore, for $\varepsilon_k\to 0$, $N_k\to\infty$, from (7), (8) it follows that $u(x, x_0)\in C^l(\bar\Omega\times[0, \delta'])$ is a solution of (1), (2).

Uniqueness. Let us assume that besides $u(x, x_0)$, the function $v(x, x_0)\in C^l(\Omega\times[0, \delta'])$ is a solution of (1), (2) and let us consider

$$\begin{aligned}&a^{ij}(x, x_0, v)(v-u)_{ij}+b^i(x, x_0, v)(v-u)_i-c(x, x_0, v)(v-u)_{x_0}\\&+d(x, x_0, v)(v-u)=h(x, x_0, u, v)=[a^{ij}(x, x_0, u)-a^{ij}(x, x_0, v)]u_{ij}\\&+[b^i(x, x_0, u)-b^i(x, x_0, v)]u_i-[c(x, x_0, u)-c(x, x_0, v)]u_{x_0}\\&+[d(x, x_0, u)-d(x, x_0, v)]u.\end{aligned}$$

As in the proof above, the estimate

$$\sup_{\Omega\times[0,\,\delta]} |u-v| \leqq (A_4/\zeta) \sup_{\bar\Omega\times[0,\,\delta]} |u-v|$$

hold, for $\delta=\min(\delta', 1/\zeta)$. When $\zeta\geqq 2A_4$ we have $u\equiv v$.

Remark 1. Since the constants K_p in Lemma 1 — 5 depend on C^{l+1}-norm of the coefficients of P and C^{l+2}-norm of f, Theorem 1 holds when the coefficients of P are of the class $C^{l+1}(\bar\Omega\times[0,\,T]\times[-M,\,M])$ and $f\in C^{l+2}(\Omega\times[0,\,T])$.

Remark 2. If $\sum_{ij=1}^{n}{}' a^{ij}(x,\,x_0,\,p)\xi^i\xi^j\geqq\mu|\xi|^2,\ \mu>0$

for $(x,\,x_0,\,p)\in\Omega\times[0,\,T]\times[-M,\,M]$; $\xi\in\mathbf{R}^n$ and $c(x,\,x_0,\,p)=c_1(x,\,x_0)\,c_2(x,\,x_0,\,x)$; $c_2(x,\,x_0,\,p)>0$, it is not necessary for the condition $c(x,\,x_0,\,p)\geqq 0$ in $G'\supset G=\bar\Omega\times[0,\,T]\times[-M,\,M]$, $c(x,\,x_0,\,p)\in C^2(G')$ to be fulfilled. It is enough for $c(x,\,x_0,\,p)\geqq 0$ to be valid in $G''=\Omega\times[0,\,T'']\times[-M,\,M]$, $c\in C^2(G'')$, $T''>T$.

§ 3. As in § 2 the proofs here will only be sketched and the differences which appear because of the essence of the boundary value problems studied in this paragraph will be considered more precisely here.

Without loss of generality we assume that Ω is a ball, its centre and radius being respectively O and R. Besides, the operator L is strictly parabolic in the points $\{(0,\,x_0,\,p);\ 0\leqq x_0\leqq s_0\ (s_0\leqq T),\ |p|\leqq M\}$.

Let us consider $u=vw$, $w=[2-\exp(-\alpha|x|^2)]\exp(\beta x_0)>0$ in $\bar\Omega\times[0,\,s_0]$ and the operators [4]

$$\tilde L v=(L(vw))/w=\sum_{ij=1}^{n}{}' a^{ij}(x,\,x_0)v_{ij}+\sum_{i=1}^{n}{}'[b^i(x,\,x_0,\,vw)+2(\sum_{j=1}^{n}{}' a^{ij}w_j)/w]v_i$$

$$-c(x,\,x_0,\,vw)v_{x_0}+(L(w)/w)\ v=f/w,$$

$$\tilde B v=(B(vw))/w=\sum_{k=1}^{n}{}'\sigma^k(x,\,x_0,\,vw)v_k+[(\sum_{k=1}^{n}{}'\sigma^k(x,\,x_0,\,vw)\,w_k)/w$$

$$+\sigma(x,\,x_0,\,vw)]v=\varphi/w.$$

A simple computation gives

$$Lw\leqq[-4\alpha^2\mu(x,\,x_0)|x|^2+O(\alpha)]\exp(-\alpha|x|^2+\beta x_0)-\beta c(x,\,x_0,\,vw)[2$$

$$-\exp(-\alpha|x|^2)]\exp(\beta x_0)\leqq-[4\alpha^2\mu(x,\,x_0)|x|^2+\beta c(x,\,x_0,\,vw)-O(\alpha)]\exp(\beta x_0$$

$$-\alpha|x|^2)<0$$

and

$$\sum_{k=1}^{n}{}'\sigma^k(x,\,x_0,\,vw)w_k=(2\alpha\sum_{k=1}^{n}{}'\sigma^k(x,\,x_0,\,vw)x_k)\exp(-\alpha R^2)$$

$$=(-2\alpha R\sum_{k=1}^{n}{}'\sigma^k(x,\,x_0,\,vw)\nu^k)\exp(-\alpha R^2)<0$$

when α,β are sufficiently large, where $(\nu^1,\,\nu^2,\ldots,\,\nu^n)$ is the inner unit normal to $\partial\Omega\times(0,\,s_0)$. The operators $\tilde L$, $\tilde B$ satisfy the conditions of Theorem 2 in the domain $\Omega\times(0,\,s_1)\times(-M_1,\,M_1)$ and consequently if we preserve the previous notations, without loss of generality we may assume that $d(x, x_0, p)<0$ in $\Omega\times[0, s_1]\times[-M, M]$, $\sigma(x, x_0, p)<0$ on $\partial\Omega\times[0, s_1]$.

Let us consider the following regularized boundary value problem

$$L^{\varepsilon,N}(u^{\varepsilon,N})=\sum_{ij=1}^{n}{}' a^{\varepsilon,ij}(x, x_0)u_{ij}^{\varepsilon,N}+\sum_{i=1}^{n}{}' b^i(x, x_0, u^{\varepsilon,N-1})u_i^{\varepsilon,N}-[\varepsilon \tag{35}$$

$$+c(x, x_0, u^{\varepsilon,N-1})]u_{x_0}^{\varepsilon,N}+d(x, x_0, u^{\varepsilon,N-1})u^{\varepsilon,N}=f(x, x_0),$$

$$B^N(u^{\varepsilon,N})=\sum_{k=1}^{n}{}'\sigma^k(x, x_0, u^{\varepsilon,N-1})u_k^{\varepsilon,N}+\sigma(x, x_0, u^{\varepsilon,N-1})u^{\varepsilon,N} \tag{36}$$

$$=\varphi(x, x_0) \text{ on } \partial\Omega\times(0, s_1);\ u^{\varepsilon,N}(x, 0)=0,\ \Omega,$$

where $u^{\varepsilon,0}(x, x_0)=0$ for $\varepsilon>0$.

Using the auxiliary function (10), as in § 2 we can prove estimates of the kind (9), (11). As for the inner estimates (12), they do not depend on the boundary operator and they are again true for the boundary value problem (35), (36).

In order to prove the uniformly boundedness of the first derivatives of $u^{\varepsilon,N}(x, x_0)$ we will use the notations introduced in Lemma 3 in § 2.

L e m m a 6. Under the assumptions of Theorem 2 the estimates

$$\sup_{\omega\times[0, s_4]}|D_{xx_0}^{\alpha}u^{\varepsilon,N}(x, x_0)|\leqq E_1/\zeta \tag{37}$$

hold, for $s_4\leqq s_3$, $|\alpha|=1$, $\varepsilon>0$, $N=1, 2,\dots$, where the constant E_1 does not depend on ε, N and ζ.

Proof. Let us consider the auxiliary functions

$$w^1(x, x_0)=n_1[m_1\sum_{k=1}^{n}{}'(u_k^N)^2+2(u_n^N)^2+u_n^NT^N(u^N)+k_1^2x_0^2 \tag{38}$$

$$+k_1^2/\zeta^2]\exp(\xi_1(R-x_n)(x_n-r)-\eta_1x_0)+(u_{x_0}^N)^2\exp(-\eta_1x_0)+p_1v^0(x, x^0),$$

$$T^N(u^N)=\sum_{k=1}^{n-1}{}'\theta^k(x, x_0, u^{N-1})u_k^N+\theta(x, x_0, u^{N-1})u^N+\Phi(x, x_0, u^{N-1}).$$

The function $v^0(x, x_0)$ is defined by means of (10) and θ^k, θ are smooth extension into $\bar\omega\times[0, s_3]\times[-M, M]$ respectively of $4\sigma^k/\sigma^n$, $4\sigma/\sigma^n$, so that their derivatives $D_{x,p}^{\alpha}D_{x_0}^{\beta}$ of order $|\alpha|+2\beta\leqq 2l+3$ are Holder continuous with exponent λ. Analogously we introduce the function $\Phi(x, x_0, p)$ e. g. $\Phi(x, x_0, p)=(-4x_n\varphi)/(R\tilde\sigma^n(x, x_0, p))$, where $\tilde\sigma^n(x, x_0, p)$ is a smooth extension of $\sigma^n(x, x_0, p)$ from $\partial\Omega\times[0, s_3]\times[-M, M]$ into $\Omega\times[0, s_3]\times[-M, M]$.

The positive constant m_1 is chosen as in (16) and k_1/ζ, k_1x_0 are upper bounds respectively for the zero order operator in T^N and Φ (see (v)), so that the inequalities

$$m_1\sum_{k=1}^{n-1}{}'(u_k^N)^2+2(u_n^N)^2+u_n^NT^N(u^N)+k_1^2x_0^2+k_1^2/\zeta^2\geqq\sum_{k=1}^{n}{}'(u_k^N)^2 \tag{39}$$

$$+x_0^2+1/\zeta^2,$$

$$
(40)\qquad 2m_1 \sum_{k=1}^{n-1}{}' a^{ij} u^N_{ki} u^N_{kj} + 4a^{ij} u^N_{ni} u^N_{nj} + a^{ij}(T^N u^N)_i u^N_{nj} \geqq \frac{3m_1}{2} \sum_{k=1}^{n-1}{}' a^{ij} u^N_{ki} u^N_{kj}
$$

$$
+3a^{ij}u^N_{ni}u^N_{nj} - (M_3 \sup_{1\leq k\leq n} (u_k^{N-1})^2 + M_4) \sum_{k=1}^{n}{}' (u^N_k)^2 - (M_5 \sup_{1\leq k\leq n} (u_k^{N-1})^2
$$

$$
+M_0)(x_0^2 + 1/\zeta^2)
$$

hold.

Let us assume that the estimates (21) hold. We will show that $w^1(x, x_0)$ cannot attain a nonnegative maximum on $\partial\Omega\times[0, s_3]$. A simple computation gives

$$
B^N w^1 \geqq \{n_1[(r-R)\sigma^n\xi_1(x_0^2+1/\zeta^2+\sum_{k=1}^{n}{}'(u^N_k)^2)+2m_1\sum_{k=1}^{n-1}{}' u^N_k(\varphi_k
$$

$$
+[B^N, \partial/\partial x_k](u^n)) + 4u^N_n B^N u^N_n + T^N(u^N)B^N(u^N_n) + u^N_n(T^N(\varphi)
$$

$$
+[B^N, T^N](u^N)) + k_1^2\sigma x_0^2 + (k_1^2\sigma)/\zeta^2] + 2u^N_{x_0}(\varphi_{x_0} + [B^N, \partial/\partial_{x_0}](u^N))
$$

$$
-\sigma(u^N_{x_0})^2\}\exp(-\eta_1 x_0) + p_1 B^N v^0.
$$

Since $[B^N, \partial/\partial x_0]$, is an operator of first order, which does not depend on $\partial/\partial x_0$, from (21) we have

$$
B^N w^1 \geqq \{n_1[(r-R)\sigma^n\xi_1 - (M_7 p_1 e^2)/(n_1\zeta^2) - M_8] \sum_{k=1}^{n}{}' (u^N_k)^2 - (\sigma/2)(u^N_{x_0})^2
$$

$$
+[(r-R)\sigma^n\xi_1 - (M_9 p_1 e^2)/(n_1\zeta^2) - M_{10}](x_0^2 + 1/\zeta^2\}\exp(-\eta_1 x_0) + p_1 B^N v^0.
$$

Clearly for $B^N v^0$ we have the estimate

$$
B^N v^0 \geqq 2u^N\varphi - \sigma(u^N)^2 + x_0^2[-2\xi \sum_{k=1}^{n}{}' \sigma^k x_k + \sigma] - \sigma/\zeta^2 > x_0^2 + 1/\zeta^2
$$

on $\partial\Omega\times[0, s_3]$. Consequently when

$$
(41)\qquad \xi_1 \geqq 2[\max(M_8, M_{10}+1)]/(\sigma^n(r-R)),\ \zeta^2 \geqq \max[(M_7 p_1 e^2)/(n_1 M_8),
$$

$$
(p_1 e^2 M_0)/(n_1 M_{10})]
$$

the estimate

$$
(42)\qquad B^N w^1 \geqq x_0^2 + 1/\zeta^2
$$

holds. From the maximum principle it follows that $w^1(x, x_0)$ cannot attain a nonnegative maximum on $\partial\Omega\times[0, s_4]$.

We will show that $w^1(x, x_0)$ cannot attain a nonnegative maximum in the cylinder $\omega\times(0, s_4]$ and on the upper basis of the cylinder. Let us estimate $L^N w^1$. We have

$$
L^N w^1 = n_1(I_1+I_2)\exp(\xi_1(R-x_n)(x_n-r)-\eta_1 x_0) + (I_3+I_4)\exp(-\eta_1 x_0)
$$

$$
+p_1 L^N v^0,
$$

where $I_1=\sum_{k=1}^{n-1} u_k^N u_n^N a^{ij}(\theta^k)_{ij}+u_n^N u^N a^{ij}(\theta)_{ij}+u_n^N a^{ij}(\Phi)_{ij}$.

In order to estimate I_1 we will use the equation (35). Hence

$$a^{ij}(\theta^k)_{ij}=a^{ij}(\theta^k_{ij}+\theta^k_{iu}u_j^{N-1}+\theta^k_{ju}u_i^{N-1}+\theta^k_{uu}u_j^{N-1}u_j^{N-1}+\theta^k_u u_{ij}^{N-1})$$

$$=a^{ij}(\theta^k_{ij}+\theta^k_{iu}u_j^{N-1}+\theta^k_{ju}u_i^{N-1}+\theta^k_{uu}u_i^{N-1}u_j^{N-1})+a^{ij}\theta^k_u[-b^i(x,\ x_0,u^{N-2})u_i^{N-1}$$

$$+c(x,\ x_0,u^{N-2})\ u_{x_0}^{N-1}-d(x,x_0,\ u^{N-2})u^{N-1}+f(x,\ x_0)].$$

Consequently, from (21) we obtain for I_1 the following estimate

$$|I_1\leqq[(M_{11}p_1e^2)/(n_1\zeta^2)+M_{12}]\ \sum_{k=1}^{n}(u_k^N)^2+[M_{13}p_1e^2)/(n_1\zeta^2)$$

$$+M_{14}](x_0^2+1/\zeta^2).$$

Estimating I_2—I_4 as in [14] we have

$$L^N w^1\geqq\{[n_1-(M_{15}p_1e^2)/\zeta^2-M_{16}]\ \sum_{k=1}^{n}a^{ij}u_{ki}^N u_{kj}^n+a^{ij}u^N_{x_ix_0}u^N_{x_jx_0}+n_1[c\eta_1$$

$$+(p_1\mu/n_1-(M_{17}p_1e^2)/(n_1\zeta^2)-M_{18}]\sum_{k=1}^{n}(u_k^N)^2+[\eta_1c-d/2-M_{19}n_1c$$

$$-(M_{20}p_1e^2)/(n_1\zeta^2)](u_{x_0}^N)^2\}e^{-2}+p_1(x_0^2\mu\eta+c-d/\zeta^2)$$

$$-[(M_{21}p_1e^2)/(n_1\zeta^2)+M_{22}](x_0^2+1/\zeta^2).$$

Let us $n_1\geqq2(M_{16}+1)$, $\eta_1\geqq M_{19}n_1$ and $p_1\geqq\max[2(M_{22}+1)/(-d);\ 2(M_{22}+1)/(\mu\eta+c)]$, $c\eta_1+(p_1\mu)/n_1\geqq2M_{18}$. Consepuently when $\zeta^2\geqq\max[(M_{15}p_1e^2)/M_{16},$
$(M_{17}p_1e^2)/M_{18},\ (2M_{20}p_1e^2)/(-n_1d),$
$(2M_{21}e^2)/(-n_1d),\ (2M_{21}e^2)/(n_1(\mu\eta+c))]$
the estimate

$$L^N w_1\geqq e^{-2}\left(\sum_{k=0}^{n}\ a^{ij}u^N_{k\,i}\,u^N_{kj})\right)+x_0^2\mu+c+1/\zeta^2>0$$

hold for $0\leqq x_0\leqq s_4$, $s_4=\min[s_3,\ 2/(\eta_1+\zeta^3)]$.

From Lemma 2, when p_1 is sufficiently large, $w^1(x,\ x_0)\leqq0$ for $x_n=r$, $0\leqq x_0\leqq s_4$. Since $w^1(x,\ 0)=-p_1/\zeta^2<0$ it follows that $w^1(x,\ x_0)$ can not attain a positive maximum in $\bar{\omega}\times[0,\ s_4]$ i. e. $w^1(x,\ x_0)\leqq0$ and the estimates (21) hold for N.

Lemma 7. Under the assumptions of Theorem 2 the estimates

$$\sup_{\omega\times[0,\ s_5]}|D^\alpha_{xx_0}u^{\varepsilon,N}(x,\ x_0)|\leqq E_2/\zeta \tag{43}$$

hold, for $s_5\leqq s_4$, $|\alpha|=2$, $\varepsilon>0$, $N=1,\ 2,\ldots,$ where the constant E_2 does not depend on ε, N and ζ.

Proof. We introduce the auxiliary functions

$$(44)\qquad w^2(x,\ x_0)=n_2[m_2\sum_{k=0,\ l=1}^{n-1}(u^N_{kl})^2+2\sum_{k=0}^{n}(u^N_{kn})^2+\sum_{k=0}^{n}u^N_{kn}T^{N,k}(u^N)+k_2^2x_0^2$$

$$+k_2^2/\zeta^2]\exp(\xi_2(R-x_n)(x_n-r)-\eta_2x_0)+(u^N_{x_0x_0})^2\exp(-\eta_2x_0)+p_2w^1(x,\ x_0),$$

$$T^{N,k}(u)^N=(\sum_{l=1}^{n-1}\theta^l(x,\ x_0,\ u^{N-1})u^N_l+\theta(x,\ x_0\ u^{N-1})u^N$$

$$+\Phi(x,\ x_0,\ u^{N-1}))_k,\qquad\qquad k=0,\ 1,\dots,\ n-1;$$

$$(45)\qquad T^{N,n}(u^N)=\sum_{l=1}^{n-1}A^{nl}(x,x_0)(\sum_{k=1}^{n-1}\theta^k(x,\ x_0,\ u^{N-1})u^N_k+\theta(x,\ x_0,\ u^{N-1})u^N$$

$$+\Phi(x,\ x_0,\ u^{N-1}))_l+\sum_{ij=1}^{n-1}A^{ij}(x,\ x_0)u^N_{ij}+\sum_{i=1}^{n-1}B^i(x,\ x_0,\ u^{N-1})u^N_i$$

$$+B^n(x,\ x_0,\ u^{N-1})\left(\sum_{k=1}^{n-1}\theta^k(x,\ x_0,\ u^{N-1})u^N_k+\theta(x,\ x_0,u^{N-1})u^N+\Phi(x,\ x_0,\ u^{N-1})\right)$$

$$+C(x,\ x_0,\ u^{N-1})u^N_{x_0}+D(x,\ x_0,u^{N-1})u^N+F(x,\ x_0).$$

The functions θ^k, θ, Φ are introduced in Lemma 6. The functions A^{ij}, B^i, C, D, F are smooth extensions respectively of $(-4a^{ij})/a^{nn}$, $(-4b^i)/a^{nn}$, $4c/a^{nn}$, $(-4d)/a^{nn}$, $4f/a^{nn}$ from $\partial\Omega\times[0,\ s_4]$ and $\partial\Omega\times[0,\ s_4]\times]-M,\ M]$ into $\omega\times[0,\ s_4]$ and $\bar\omega\times[0,\ s_4]\times[-M,\ M]$, so that their derivatives $D^\alpha_{xp}D^\beta_{x_0}$ of order $|\alpha|+2\beta\leq 2l+2$ are Holder continuous with exponent λ.

The positive cnostants m_2, k_2 are chosen as it follows

$$(46)\qquad m_2=2+(4n)^3H_2^2,$$

where H_2 is the maximum of the coefficients before the second order derivatives of the operators $T^{N,k}$, $k=0,\ 1,\dots,\ n$. K_2/ζ is an upper bound for the operators of first and zero order in $T^{N,k}$and $k_2\ x_0$ — for the remainder of $T^{N,k}$, $k=0,1,\dots,\ n$.

From the choice of m_2, k_2 the estimates

$$(47)\qquad m_2\sum_{k=0,\ l=1}^{n-1}(u^N_{kl})^2+2\sum_{k=0}^{n}(u^N_{kn})^2+\sum_{k=0}^{n}u^N_{kn}T^{N,k}(u^N)+k_2^2/\zeta^2+k_2^2x_0^2$$

$$\geq x_0^2+1/\zeta^2+\sum_{k=0,l=1}^{n}(u^N_{kl})^2,$$

$$(48)\qquad 2m_2\sum_{k=0,\ l=1}^{n-1}a^{ij}\,u^N_{kli}u^N_{klj}+4\sum_{k=0}^{n}a^{ij}u^N_{kni}u^N_{knj}+2\sum_{k=0}^{n}a^{ij}u^N_{kni}(T^{N,k}u^N)_j$$

$$\geq\frac{3m_2}{2}\sum_{k=0,\ l=1}^{n-1}a^{ij}u^N_{kli}u^N_{klj}+3\sum_{k=0}^{n}a^{ij}u^N_{kni}\,u^N_{knj}-[M_{23}\sup_{0\leq k,\ l\leq n}(u^{N-1}_{kl})^2$$

$$+M_{24}]\sum_{k=0,l=1}^{n}(u^N_{kl})^2-[M_{25}\sup_{0\leq k,l\leq n}(u^{N-1}_{kl})^2+M_{26}](x_0^2+1/\zeta^2)$$

hold. We assume that the estimates (29) hold. Then we will show that $w^2(x, x_0)$ can not attain a nonnegative maximum on $\partial\Omega\times[0, s_4]$. A simple computation gives

$$B^N w^2 \geqq \{\xi_2(r-R)\sigma^n[\sum_{k=0,l=1}^{n}{}' (u_{kl}^N)^2 + x_0^2 + 1/\zeta^2] + 2m_2 \sum_{k=0,l=1}^{n-1}{}' u_{kl}^N(\varphi_{kl}$$

$$+[B^N, \partial^2/\partial x_k \partial x_l](u^N)) + 4\sum_{k=0}^{n}{}' u_{kn}^N B^N u_{kn}^N + \sum_{k=0}^{n}{}' T^{N,k}(u^N) B^N u_{nk}^N$$

$$+\sum_{k=0}^{n}{}' u_{kn}^N (T^{N,k}(\varphi) + [T^{N,k}, B^N](u^N)) + k_2^2\sigma x_0^2 + k_2^2\sigma/\zeta^2$$

$$+2u_{x_0x_0}^N(\varphi_{x_0x_0} + [B^N, \partial^2/\partial x_0^2](u^N) - \sigma(u_{x_0x_0}^N)^2\}\exp(-\eta_2 x_0) + p_2 B^N w^1.$$

From the choice of $T^{N,k}$ and since $[B^N, \partial^2/\partial x_k\partial_{x_l}]$ are the operators of second order, which do not depend on $u_{x_0x_0}^N$ we have the estimate

$$B^N w^2 \geqq \{\xi_2(r-R)\sigma^n[\sum_{k=0,l=1}^{n}{}' (u_{kl}^N)^2 + x_0^2 + 1/\zeta)^2] - [M_{27}(p_2p_1e^2)/(n_2\zeta^2)$$

$$+M_{28}]\sum_{k=0,l=1}^{n}{}' (u_{kl}^N)^2 - \frac{\sigma}{2}(u_{x_0x_0}^N)^2\}\exp(-\eta_2 x_0) - [M_{29}(p_1p_2e^2)/(n_2\zeta^2)$$

$$+M_{30}](x^2+1/\zeta)\}.$$

Consequently when

(49) $$\xi_2 \geqq \max[(2M_{28})/(\sigma^n(r-R));\ (2e^2(M_{30}+1)/(\sigma^n(r-R))]$$

and $\zeta^2 \geqq \max[(M_{27}p_2p_1e^2)/(n_2M_{28});\ (M_{29}p_1p_2e^2)/(n_2M_{30})]$ the estimate $B^N w^2 \geqq x_0^2 + 1/\zeta^2$ no $\partial\Omega\times[0, s_4]$ holds.

We will show that $w^2(x, x_0)$ can not attain a nonnegative maximum in the cylinder $\omega\times(0, s_5)$ and on the upper basis of the cylinder. Let us estimate $L^N w^2$. We have $L^N w^2 = n_2(I_1+I_2)\exp(-\eta_2 x_0 + \xi_2(R-x_n)(x_n-r)) + (I_3+I_4)$ $\exp(-\eta_2 x_0) + p_2 L^N w^1$, where $I_1 = \sum_{k=0}^{n-1} u_{kn}^N[\sum_{l=1}^{n-1}\theta_{u^l} u_l^N L^N(u_k^{N-1}) + \theta_u u^N L^N(u_k^{N-1})$

$$+\Phi_u L^N(u_k^{N-1})] + u_{nn}^N[\sum_{l=1}^{n-1} A^{nl}(\sum_{k=1}^{n-1}\theta_u^k u_k^N L^N(u_l^{N-1}) + \theta_u u^N L^N(u_l^{N-1})$$

$$+\Phi_u L^N(u_l^{N-1})].$$

Since

$$L^N(u_l^{N-1}) = -\sum_{ij=1}^{n}{}' a_l^{ij} u_{ij}^{N-1} - \sum_{i=1}^{n}(b_l^i + b_u^i u_l^{N-2})u_i^{N-1} - \sum_{i=1}^{n}{}' b^i u_{il}^{N-1} + (c_l$$

$$+c_u u_l^{N-2})u_{x_0}^{N-1} + c u_{x_0x_l}^{N-1} - d u_l^{N-1} - (d_l + d_u u_l^{N-2})u^{N-1} + f_l$$

from (21), (29) we obtain the estimate

$$|I_1| \leqq [(M_{31}p_1p_2l^2)/(n_2\zeta) + M_{32}]\sum_{k=0,l=1}^{n}(u_{kl}^N) + [M_{34}$$

$$+(M_{33}p_1p_2e^2)/(n_2\zeta^2)](x_0^2 + 1/\zeta^2).$$

Estimating I_2-I_4 as in [14] we obtain the result

$$L^N w^2 \geqq \{[n_2(M_{35}p_1p_2e^2)/\zeta^2-M_{36}] \sum_{k=0,l=1}^{n}{}' a^{ij}u^N_{kli}u^N_{klj}$$

$$+a^{ij}u^N_{x_0x_0x_i}u^N_{x_0x_0x_j}+n_2[c\eta_2+(p_2\mu)/n_2-(M_{37}p_1p_2e^2)/(n_2\zeta^2)$$

$$-M_{38}\sum_{k=0,l=1}^{n}{}'(u^N_{kl})^2+[\eta_2c-d/2-M_{39}n_2c-(M_{40}p_1p_2e^2)/(n_2\zeta^2)](u^N_{x_0x_0})^2\}e^{-2}$$

$$+p_2(\mu x_0^2+c-d/\zeta^2)-[(M_{41}p_1p_2e^2)/(n_2\zeta^2)+M_{42}](x_0^2+1/\zeta^2).$$

Let us $n_2 \geqq (M_{38}+1)$, $\eta_2\geqq M_{39}n_2$, $c\eta_2+(p_2\mu)/n_2 \geqq 2M_{38}$ and $p_2 \geqq \max[2(M_{42}+1)/(-d);\ 2(M_{42}+1)/(\mu+c)]$. Then for $\zeta^2 \geqq \max[(M_{35}p_1p_2e^2)/M_{36};\ (M_{37}p_1p_2e^2)/(n_2M_{38});\ (M_{41}p_1p_2e^2)/(n_2M_{42})]$ the estimate

$$L^N w_2 \geqq e^{-2}\sum_{l,k=0}^{n}{}' a^{ij}u^N_{kli}u^N_{klj}+x_0^2\mu+c+1/\zeta^2 \tag{50}$$

hold for $0\leqq x_0\leqq s_5$; $s_5=\min(s_4;\ 2/(\eta_2+\zeta^3))$.

From Lemma 2, when p_2 is sufficiently large $w^2(x, x_0)<0$ for $x_n=r$. Since $w^2(x, 0)=-p_1p_2/\zeta^2<0$ it follows that $w^2(x, x_0)$ can not attain a nonnegative maximum in $\bar{\omega}\times[0, s_5]$ i. e. $w^2(x, x_0)<0$ and (29) hold for N.

L e m m a 8. Under the assumptions of Theorem 2 the estimates

$$\sup_{\bar{\omega}\times[0,s_{\rho+3}]} D^{\alpha}_{xx_0}u^{\varepsilon,N}(x, x_0)\leqq E_\rho/\zeta \tag{51}$$

hold, for $s_{\rho+3}\leqq s_{\rho+2}$, $|\alpha|=\rho$, $3\leqq\rho\leqq l+1$, $\varepsilon>0$, $N=1, 2,\ldots$, where the constants E_ρ do not depend on ε, N and ζ.

Proof. We prove inductively the estimates

$$\sum_{\alpha+\beta=\rho,\beta\neq\rho}(D^\alpha_x D^\beta_{x_0}u^{N-1})^2\leqq(p_\rho p_{\rho-1}\ldots p_1 l^2)/(n_\rho\zeta^2), \tag{52}$$

in $\bar{\omega}\times[0, s_{\rho+3}]$, $s_{\rho+3}=\min(s_{\rho+2}, 2/(n_\rho+\zeta^3))$ by means of the auxiliary functions

$$P^\rho(x, x_0)=\{n_\rho[m_\rho\sum_{\alpha+\beta=\rho,\beta\neq\rho}{}'(D^\alpha_{x'}D^\beta_{x_0}u^N)^2+2\sum_{|\alpha|+\beta+\gamma=\rho,\beta\neq\rho,\gamma\neq0}{}'(D^\alpha_{x'}D^\beta_{x_0}D^\gamma_{x_n}u^N)^2$$

$$+\sum_{|\alpha|+\beta+\gamma=\rho,\beta\neq\rho,\gamma=0}{}' D^\alpha_{x'}D^\beta_{x_0}D^\gamma_{x_n}u^N)T^{N,\alpha\beta\gamma}(u^N)=K^2_\rho/\zeta^2+K^2_\rho x_0^2]\exp(\xi_\rho(R \tag{53}$$

$$-x_n)(x_n-r)+(D^\rho_{x_0}u^N)^2\}\exp(-\eta_\rho x_0)+p_\rho w^{\rho-1}(x, x_0).$$

The coefficients of $T^{N,\alpha\beta\gamma}$ are determined on $\partial\Omega\times[0, s_{\rho+2}]\times[-M, M]$ by means of condition

$$T^{N,\alpha\beta\gamma}(u^N)=-4D^\alpha_{x'}D^\beta_{x_0}D^\gamma_{x_n}u^N.$$

The derivatives $D^\gamma_{x_n}u^N$ in (54) are substituted for by their equivalent expressions on $\partial\Omega\times[0, s_{\rho+2}]$ using the operators L^N, B^N and the derivatives of L^N, B^N up to the necessary order. The coefficients of $T^{N,\alpha\beta\gamma}$ in $\bar{\omega}\times[0, s_{\rho+2}]$

$\times[-M, M]$ are smoothly extended so that their derivatives $D_x^\mu D_{x_0}^\nu$ of order $|\mu|+\nu \leqq 2l+4-\rho$ are Holder continuous with exponent λ. The positive constants m_ρ, k_ρ are chosen as it follows

$$m_\rho = 2+(4n)^{\rho+1}H_\rho^2, \tag{55}$$

where H_ρ is the maximum of the coefficients before the ρ-th derivatives of the operators $T^{N,\alpha\beta\gamma}$. The expression k_ρ/ζ is an upper bound for the operators of order greater than or equal to zero and smaller than or equal to $\rho-1$ in $T^{N,\alpha\beta\gamma}$. Respectively, $K_\rho x_0$ is an upper bound for the remainder of $T^{N,\alpha\beta\gamma}$.

Proof of Theorem 2. As in the proof of Theorem 1, using the Ascoli — Arzela theorem and Lemmas 6—8, we can find subsequences $\varepsilon_k \to 0$, $N_k \to \infty$, so that $D_{xx_0}^\alpha u^{\varepsilon_k, N_k}(x, x_0) \rightrightarrows D_{xx_0}^\alpha u(x, x_0)$ for $\alpha \leq l$.

Let us now consider

$$L^N(u^N-u^{N-1}) = g(x, x_0, u^{N-1}, u^{N-2}) - [b^i(x, x_0, u^{N-2})$$

$$-b^i(x, x_0, u^{N-1})]u_i^{N-1} - [c(x, x_0, u^{N-2}) - c(x, x_0, u^{N-1})]u_{x_0}^{N-1} + [d(x, x_0, u^{N-2})$$

$$-d(x, x_0, u^{N-1})]u^{N-1}.$$

Since $|u_i^N(x, x_0)| \leqq B_1 x_0$; $|u_{x_0}^N(x, x_0)| \leqq B_1 x_0$; $|u^N(x, x_0)| \leqq B_1 x_0$, where the constant B_1 does not depend on ε and N from the mean value theorem we obtain the estimate

$$|g(x, x_0, u^{N-1}, u^{N-2})| \leqq B_2 x_0 \sup |u^{N-1}-u^{N-2}|.$$

Let us now consider the auxiliary function

$$h(x, x_0) = (u^N-u^{N-1})^2 + \gamma[x_0^2 \exp(\eta(R^2-|x|^2)) - (1/\zeta^2)\exp(\zeta^3 x_0)].$$

A simple computation gives

$$B^N h \geqq -\sigma(u^N-u^{N-1})^2 + \gamma[-2\eta x_0^2 \sum_{k=1}^n \sigma^k x_k + \sigma x_0^2$$

$$-(\sigma/\zeta^2)\exp(\zeta^3 x_0)] > 0 \text{ on } \partial\Omega\times[0, \delta'].$$

Analogously

$$L^N h \geqq 2(u^N-u^{N-1})g - d(u^N-u^{N-1})^2 + \gamma[4\eta^2 x_0^2 |x|^2 \mu(x, x_0) - O(\eta)x_0^2 - d/\zeta^2$$

$$+c\zeta] \geqq g^2/d + \gamma[4\eta^2 x_0^2 \mu |x|^2 - O(\eta)x_0^2 + c\zeta - d/\zeta^2 > 0$$

when η, ζ are sufficiently large so that $4\eta^2 x_0^2 - O(\eta)x_0^2 + c\zeta - d/\zeta^2 > 0$ and $\gamma \geqq B_3 \sup|u^{N-1}-u^{N-2}|$. Since $h(x, 0) = -1/\zeta^2 < 0$ it follows that $h(x, x_0) \leqq 0$ in $\Omega\times[0, \delta']$, $\delta' = \min[s_{l+4}, 2/\zeta^3]$ i. e.

$$\sup_{\Omega\times[0,\delta']} |u^N-u^{N-1}| \leqq (B_4/\zeta) \sup_{\bar\Omega\times[0,\delta']} |u^{N-1}-u^{N-2}|.$$

When $\zeta \geqq 2B_4$ it follows that $u^N(x, x_0) \rightrightarrows u(x, x_0)$. Therefore, when $\varepsilon_k \to 0$, $N_k \to \infty$ from (35), (36) we obtain the result that $u(x, x_0)$ is a solution of (3), (4).

Uniqueness. Let us assume that besides $u(x, x_0)$ the function $v(x, x_0) \in C^l(\bar\Omega \times [0, \delta'])$ is a solution of (3), (4) and let us consider the equation

$$\sum_{i,j=1}^{n} a^{ij}(x, x_0)(v-u)_{ij}+\sum_{i=1}^{n} b^i(x, x_0, v)(v-u)_i-c(x, x_0, v)(v-u)_{x_0}$$

$$+d(x, x_0, v)(v-u)=r(x, x_0, u, v)-[b^i(x, x_0, u)-b^i(x, x_0, v)]u_i$$

$$-[c(x, x_0, u)-c(x, x_0, v)]u_{x_0}+[d(x, x_0, u)-d(x, x_0, v)]u.$$

As in the proof above the estimate

$$\sup_{\Omega\times[0,\delta]} |u-v| \leqq (B_5/\zeta) \sup_{\Omega\times[0,\delta]} |u-v|$$

holds, where $\delta=\min(\delta', 2/\zeta^3)$. When $\zeta\geqq 2B_5$ we have $u(x, x_0)=v(x, x_0)$.

Remark 3. Since the constants E_p in Lemmas 6—8 depend on C^{l+1}-norm of the coefficients of B and L and C^{l+2}-norm of f and φ, Theorem 2 holds when the coefficients of B and L are of the class $C^{l+1}(\Omega\times[0, \delta]\times[-M, M])$ and $C^{l+1}(\Omega\times[0, \delta])$ and φ, f are of the class $C^{l+2}(\partial\Omega\times[0, \delta])$, $C^{l+2}(\bar{\Omega}\times[0, \delta)]$.

REFERENCES

1. Коздоба Л. А. Методы решения нелинейных задач теплопроводности. М., 1975.
2. Олейник О. А., Радкевич Е В. Уравнения второго порядка с неотрицательной характеристической формой. М., 1969.
3. Агмон С., Дуглис А., Ниренберг Л. Оценки решений эллиптических уравнений вблизи границы. М., 1962.
4. Gilbarg D, Trudinger N. Elliptic Partial Differential Equations of Second Order. Berlin etc., 1977.
5. Ильин А. М., Калашников А. С., Олейник О. А. Линейные уравнения второго порядка параболического типа. — Усп. мат. наук., 17 (105), 1962, № 3, 3—146.
6. Генчев Т. Об ультрапараболических уравнениях. ДАН СССР, 151, № 2, 1963, 265 — 268.
7. Фатеева Г. М. О краевых задачах для квазилинейных вырождающихся параболических уравнений. — Матем. сб., 76 (118), 1968, № 4, 535—565.
8. Fichera G. Sulle equazioni differenziali lineari ellittiche paraboliche del secondo ordine. — Atti Acc. Naz. Lincei, Memorie (VIII), № 5, 1956.
9. Kohn J. J., Nirenberg L. Degenerate elliptic-parabolic equations of second order. — Comm. Pure and Appl. Math., 20, 1967, 797 — 872.
10. Waid M. C The first initial-boundary value problem for some nonlinear time degenerate parabolic equations. — Proc. Amer. Math. Soc., 42, 1974, 487 — 494.
11. Waid M. C. A second order nonlinear time degenerate parabolic equation with nonlinear boundary conditions. — Siam. J. Math. Anal., 7, 1976, 373 — 383.
12. Ippolito P. Maximum principles and classical solutions for degenerate parabolic equations. — J. Math. Appl., 64, 1978, 530 — 561.
13. Kutev N. On Neuman's problem for a class of degenerate parabolic equations. — Serdica (in print).
14. Kutev N. On Neuman's problem for a class of degenerate quasi-linear parabolic equations. Serdica (in print).

Received 31. 3. 1982

ГОДИШНИК НА СОФИЙСКИЯ УНИВЕРСИТЕТ „КЛИМЕНТ ОХРИДСКИ"

ФАКУЛТЕТ ПО МАТЕМАТИКА И МЕХАНИКА

Том 75 Книга 1 — Математика 1981

ANNUAIRE DE L'UNIVERSITÉ DE SOFIA „KLIMENT OHRIDSKI"

FACULTÉ DE MATHÉMATIQUES ET MÉCANIQUE

Tome 75 Livre 1 — Mathématiques 1981

ОБ ОДНОМ ЭКСТРЕМАЛЬНОМ СВОЙСТВЕ ГРАФА ПЕТЕРСЕНА

Недялко Д. Ненов, Николай. Г Хаджииванов

Недялко Д. Ненов, Николай Г. Хаджииванов. **Об одном экстремальном свойстве графа Петерсена.**

Рассматриваются только обыкновенные графы. Множество вершин графа G называется независимым множеством вершин, если любые две из них несмежны. Через $\pi(G;\ p)$ обозначается число всех независимых p-вершинных подмножеств графа G. В настоящей работе доказывается, что если G — 10-вершинный граф без треугольников, тогда $\pi(G;\ 4) \geqq 5$ (теорема 1). Доказывается тоже, что это неравенство точное только для графов, заданных на рис 2, 3 и 4 (теорема 2).

Nedjalko D. Nenov, Nickolai G. Hadjiivanov. **On an Extremal Property of Petersen's Graph.**

A set V' of vertices of a graph G is defined to be an independent set if no two vertices of V' are joined by an edge. For a graph G the symbol $\pi(G;\ p)$ denotes the number of independent sets of p vertices. In this paper we prove that $\pi(G;\ 4) \geqq 5$, where G is a graph with 10 vertices, without triangles. In the above inequality the equality holds only for three graphs (Fig. 2, 3 and 4).

1. Рассматриваются только обыкновенные графы, в которых нет циклов длины 3, т. е. графы без треугольников. Множество вершин графа назовем независимым, если никакие две его вершины несмежны. Число всех независимых p-вершинных множеств графа G обозначим через $\pi(G;\ p)$.

Greenwood, Gleason [3], доказали, что если G — 9-вершинный граф без треугольников, тогда $\pi(G;\ 4) \geqq 1$, и привели пример 8-вершинного графа G без треугольников, для которого $\pi(G;\ 4)=0$. В [2] доказаны следующие теоремы:

Теорема A. Пусть G — 9-вершиный граф без треугольников такой, что $\pi(G;\ 4)=1$. Тогда граф G изоморфен графу, изображенному на рис. 1.

Теорема B. Пусть, G — 9-вершинный граф без треугольников такой, что $\pi(G;\ 4)=2$. Тогда граф G изоморфен графу F_2, получающемуся от графа F_1 (рис. 1) удалением ребра $[1,\ 9]$.

В этой работе будем рассматривать 10-вершинные графы G без треугольников. Для таких графов докажем, что $\pi(G;\ 4)\geqq 5$. Для графа Петерсена это неравенство точно (см. предложение 1). Мы покажем, что кроме графа Петерсена, вопросное нерсвенство точно еще только для двух графов, изображенных на рис. 3 и 4.

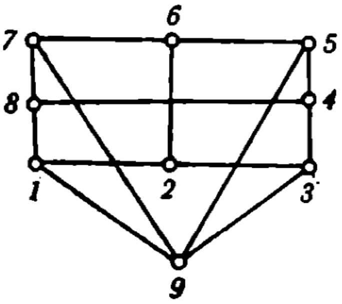

Рис 1.

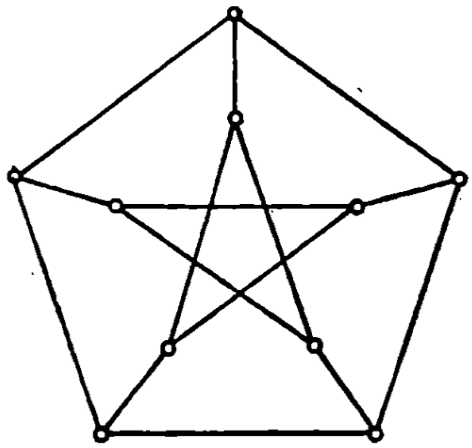

Рис. 2

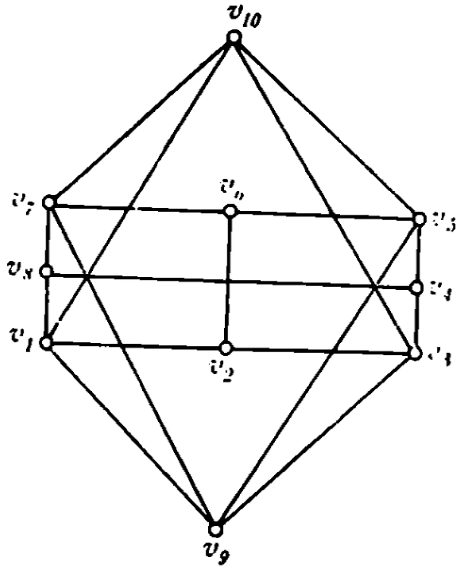

Рис. 3

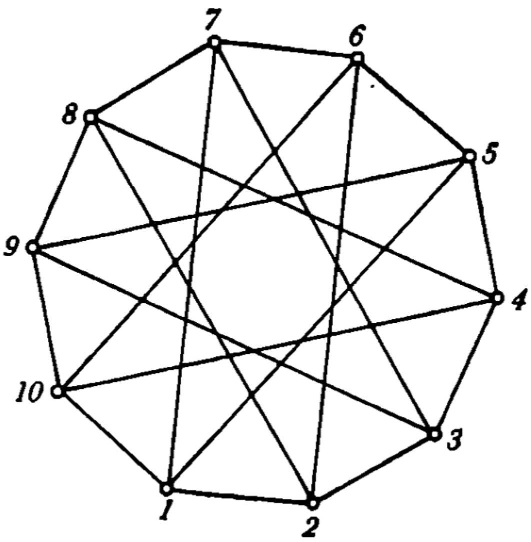

Рис. 4

Теперь сформулируем точно основные результаты.

Теорема 1. Пусть G — 10-вершинный граф без треугольников. Тогда $\pi(G;\ 4)\geqq 5$.

Теорема 2. Пусть G — 10-вершинный граф без треугольников и $\pi(G;\ 4)=5$. Тогда граф G изоморфен одному из графов, изображенных на рис. 2, 3 и 4.

Ниже будем пользоваться следующими обозначениями:

$V(G)$ — множество вершин графа G;

$E(G)$ — множество ребер графа G;

$A(v)$, $v\in V(G)$ — множество всех вершин графа G, смежных вершине v;

$A(v)$, $v \in V(G)$ — множество всех вершин графа G, несмежных вершине v, за исключением самой вершины v;

$<V'>$, где $V' \subset V(G)$, — подграф, порожденный множеством вершин V';

$G - V'$, где $V' \subset V(G)$, — подграф графа G, получающийся удалением множества вершин V', т. е. $G - V' = <V(G) \setminus V'>$;

$G - e$, где $e \in E(G)$, — подграф графа G, получающийся удалением ребра e;

$\alpha(v; p)$, где $v \in V(G)$, — число всех p-вершинных независимых множеств, содержащих вершину v.

Отметим следующие очевидные равенства:

(1) $$\pi(G;\ p) = \frac{1}{p} \sum \{\alpha(v;\ p),\ v \in V(G)\},$$

(2) $$\pi(G;\ p) = \frac{1}{V(G) - p} \sum \{\pi(G - v;\ p),\ v \in V(G)\}.$$

2. О числе 4-вершинных независимых подмножеств графов, заданных на рис 2, 3 и 4.

Предложение 1. Граф Петерсена Γ_1 (рис. 2) обладает следующим свойством: $\alpha(v;\ 4) = 2$ для любого $v \in V(\Gamma_1)$ и, следовательно, $\pi(\Gamma_1;\ 4) = 5$.

Доказательство. Пусть $v \in V(\Gamma_1)$. Тогда очевидно подграф $\langle A(v) \rangle$ является простым циклом длины 6. Так как этот цикл содержит ровно два независимых 3-вершинных подмножества, то $\alpha(v;\ 4) = 2$. Согласно (1), $\pi(\Gamma_1;\ 4) = 5$.

Предложение 2. Через Γ_2 обозначим граф, изображенный на рис. 3. Тогда верно равенство $\pi(\Gamma_2;\ 4) = 5$.

Доказательство. Прежде всего заметим, что любое 4-вершинное независимое множество, которое содержит одну из вершин v_9, v_{10}, непременно содержит и другую. Так как v_9 и v_{10} участвуют одновременно в четырех 4-вершинных независимых множествах и $\Gamma_2 - \{v_9, v_{10}\}$ содержит единственное 4-вершинное независимое множество (а именно $\{v_1, v_3, v_5, v_7\}$), то $\pi(\Gamma_2;\ 4) = 5$.

Предложение 3. Граф Γ_3 (рис. 4) обладает следующим свойством: $\alpha(v;\ 4) = 2$ для любого $v \in V(\Gamma_3)$ и, следовательно, $\pi(\Gamma_3;\ 4) = 5$.

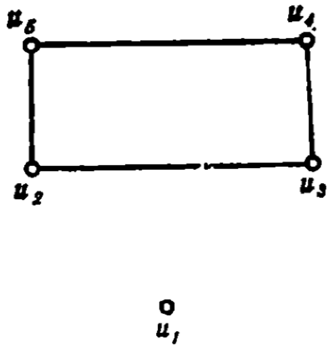

Рис. 5

Доказательство. Прежде всего заметим, что для любой вершины $v \in V(\Gamma_3)$ подграф $\langle A(v) \rangle$ изоморфен графу, изображенному на рис. 5. Так как этот граф содержит ровно два независимых 3-вершинных под-графа, то $\alpha(v;\ 4)=2$ для любой вершины $v \in V(\Gamma_3)$.

3. Вспомогательные результаты.

Лемма 1. Пусть G является 10-вершинным графом без треугольников, который содержит независимое **5-вершинное** множество. Тогда $\pi(G;\ 4)>5$.

Доказательство. Пусть $\Delta=\{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$ — независимое 5-вершинное множество графа G, а $v_6, \ldots, v_{10}$ — остальные его вершины. Если для некоторого i, $6 \leqq i \leqq 10$ имеем $A(v_i)\bigcap\Delta \geqq 3$, тогда утверждение леммы очевидно. Иначе $A(v_i)\bigcap\Delta \geqq 3$ для любого i, $6 \leqq i \leqq 10$. Теперь из того, что нет треугольников, вытекает, что $\{v_6, v_7, v_8, v_9, v_{10}\}$ — независимое множество, так как $A(v_i) \bigcap A(v_j) \neq \varnothing$, $6 \leq i \leqq 10$, $6 \leq j \leq 10$. Этим лемма 1 доказана.

Лемма 2. Пусть G такой 10-вершинный граф без треугольников, что для некоторой вершины $v_0 \in V(G)$ подграф $G - v_0$ изоморфен графу F_1, изображенному на рис. 1. Тогда либо граф G изоморфен графу Γ_2, (рис. 3), либо $\pi(G;\ 4)\geqq 6$.

Доказательство. Ясно, что $A(v_0)$ — независимое множество вершин графа G. Так как $\{1, 3, 5, 7\}$ является единственным 4-вершинным независимым множеством графа, изображенного на рис. 1, то либо $A(v_0)=\{1, 3, 5, 7\}$ и, следовательно, граф G изоморфен графу Γ_2 (рис. 3), либо $A(v_0) \leqq 3$. Поэтому остается показать, что если $A(v_0) \leqq 3$, тогда $\pi(G;\ 4) \geqq 6$, или, что то же самое, $\pi(<\bar{A}(v_0)>;\ 3)\geqq 5$. Любые две несмежные вершины графа, изображенного на рис. 1, участвуют вместе в некотором независимом 3-вершинном множестве этого же графа. Поэтому достаточно рассмотреть ситуацию, когда $A(v_0)=3$.

Рассмотрим три случая.

Случай 1. $9 \in A(v_0)$. В этом случае $A(v_0)$ совпадает с одним из следующих множеств: $\{2, 4, 9\}$, $\{4, 6, 9\}$, $\{6, 8, 9\}$, $\{2, 8, 9\}$. Так как графы $F_1 - \{2, 4, 9\}$, $F_1 - \{4, 6, 9\}$, $F_1 - \{6, 8, 9\}$, $F_1 - \{2, 8, 9\}$ изоморфны, то достаточно рассмотреть ситуацию, когда $A(v_0)=\{2, 4, 9\}$. Граф $<A(v_0)>$ содержит следующие независимые 3-вершинные множества: $\{1, 3, 5\}$, $\{1, 3, 7\}$; $\{1, 5, 7\}$, $\{3, 5, 7\}$ и $\{3, 6, 8\}$. Поэтому $\pi(G;\ 4)\geqq 6$.

Случай 2. $A(v_0)$ не содержит вершину 9, но содержит некоторую из вершин $2, 4, 6, 8$. Без ограничения общности можно предположить, что $2 \in A(v_0)$. В этом случае $A(v_0)$ совпадает с одним из следующих множеств: $\{2, 5, 7\}$, $\{2, 8, 5\}$, $\{2, 4, 7\}$. Если $A(v_0)=\{2, 5, 7\}$, тогда $\bar{A}(v_0)$ содержит следующие 3-вершинные независимые множества: $\{1, 3, 6\}$; $\{1, 6, 4\}$, $\{3, 6, 8\}$, $\{9, 8, 6\}$, $\{4, 6, 9\}$. Следовательно, $\pi(G;\ 4)\geqq 6$. Предположим теперь, что $A(v_0)=\{2, 4, 7\}$. Тогда $\bar{A}(v_0)$ содержит следующие 3-вершинные множества: $\{3, 6, 8\}$, $\{1, 6, 3\}$, $\{3, 8, 5\}$, $\{1, 3, 5\}$, $\{6, 8, 9\}$. Поэтому $\alpha(v_0;\ 4)\geqq 5$ и $\pi(G;\ 4)\geqq 6$. Из-за симметричности графа F_1 (рис. 1) случай $A(v_0)=\{2, 5, 8\}$ вполне аналогичен случаю $A(v_0)=\{2, 4, 7\}$.

Случай 3. $A(v_0)\subset\{1, 3, 5, 7\}$. Ясно, что без ограничения общности можно предположить $A(v_0)=\{1, 3, 5\}$. В $\bar{A}(v_0)$ содержатся следующие 3-вершинные независимые множества: $\{2, 4, 7\}$, $\{2, 4, 9\}$, $\{4, 6, 9\}$, $\{6, 8, 9\}$, $\{2, 8, 9\}$.

Лемма 2 доказана.

Лемма 3. Пусть G — 10-вершинный граф без треугольников такой, что для некоторой его вершины v_0 подграф $G - v_0$ изоморфен графу F_2, получающемуся от графа F_1 (рис. 1) удалением ребра $[1, 9]$, т. е. $F_2=F_1-[1, 9]$. Тогда $\pi(G;\ 4)\geqq 6$.

Доказательство. Ясно, что $\pi(G; 4)=2+\alpha(v_0; 4)$. Поэтому нам нужно показать, что $\alpha(v_0; 4)\geqq 4$. Напомним, что $A(v_0)$ является независимым множеством. Так как $F_2=F_1-[1, 9]$, то если хотя бы одна из вершин 1 и 9 не принадлежит $A(v_0)$, утверждение леммы 3 вытекает из леммы 2. Поэтому предположим, что $A(v_0)\subseteq\{1, 4, 6, 9\}$. Подграф $F_2 - \{1, 4, 6, 9\}$ содержит следующие 3-вершинные независимые множества: $\{2, 8, 5\}$, $\{2, 5, 7\}$, $\{3, 5, 8\}$, $\{3, 5, 7\}$. Следовательно, $\pi(G; 4)\geqq 6$.

Лемма 4. Пусть G — 10-вершинный граф без треугольников. Тогда существует вершина $v_0\in V(G)$ такая, что $\alpha(v_0; 4)=2$.

Доказательство. Утверждение леммы очевидно следует из неравенства $\pi(G; 4)\geqq 3$. Докажем это неравенство. Допустим противное, т. е. $\pi(G; 4)\leqq 2$. Пусть v — вершина, содержащаяся в 4-вершинном независимом множестве. Тогда $\pi(G-v; 4)\leqq 1$. Согласно теореме А, граф $G-v$ изоморфен графу F_1. Это противоречит лемме 2 и предложению 2.

Лемма 5. Пусть G — 10-вершинный граф без треугольников, содержащий вершину степени 4 и $\alpha(v; 4)=2$ для любой вершины $v\in V(G)$. Тогда граф G изоморфен графу Γ_3 (рис. 4).

Доказательство. Из условия $\alpha(v; 4)=2$, $v\in V(G)$ и (1) вытекает, что $\pi(G; 4)=5$. Ясно, что $A(v)$, $v\in V(G)$, является независимым множеством. Так как, согласно лемме 1, граф G не содержит 5-вершинных независимых подмножеств, то $A(v)\leqq 4$, $v\in V(G)$.

Пусть v_0 является вершиной степени 4 и $A(v_0)=\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$, $\bar{A}(v_0)=\{u_1, u_2, u_3, u_4, u_5\}$. Напомним, что $A(v_0)$ является независимым 4-вершинным множеством, которое обозначим через Δ_1. Через Δ_2 и Δ_3 обозначим 4-вершинные независимые множества, содержащие вершину v_0, а остальные два 4-вершинных независимых множества обозначим через Δ_4 и Δ_5. Положим, $\Delta_2'=\Delta_2-v_0$ и $\Delta_3'=\Delta_3-v_0$. Рассмотрим два случая.

Случай 1. $|\Delta_2'\cap\Delta_3'|=2$. Ясно, что в этом случае одна из вершин u_1, u_2, u_3, u_4, u_5 не принадлежит $\Delta_1\cup\Delta_2\cup\Delta_3$. Без ограничения общности множно предположить, что $u_1\notin\Delta_1\cup\Delta_2\cup\Delta_3$. Так как $\alpha(u_1; 4)=2$, то

$$u_1\in\Delta_4\cap\Delta_5. \tag{3}$$

Из $\alpha(v_i; 4)=2$, $1\leqq i\leqq 4$, вытекает, что

$$\Delta_1\subset\Delta_4\cup\Delta_5. \tag{4}$$

Из (3) и (4) получаем, что $u_1\cup\Delta_1$ — независимое 5-вершинное множество, что является противоречием.

Случай 2. $|\Delta_2'\cap\Delta_3'|=1$. Ясно, что в этом случае подграф $<\bar{A}(v_0)>$ изоморфен графу, заданному на рис. 5. Мы будем считать, что $<\bar{A}(v_0)>$ совпадает с этим графом. Так как $\alpha(v; 4)=2$, $v\in V(G)$, то

$$\Delta_4\cup\Delta_5=\{v_1, v_2, v_3, v_4, u_2, u_3, u_4, u_5\}. \tag{5}$$

Заметим, что $\{u_2, u_3, u_4, u_5\}$ не содержит 3-вершинное независимое множество и поэтому

$$\Delta_i\cap\{u_2, u_3, u_4, u_5\}\leqq 2,\ i=4, 5. \tag{6}$$

Из (5) и (6) получаем

$$|\Delta_i\cap\{u_2, u_3, u_4, u_5\}|=2,\ i=4, 5. \tag{7}$$

Из (7) и (5) вытекает

(8) $$\Delta_4 \cap \Delta_1 = 2, \quad |\Delta_5 \cap \Delta_1 = 2, \quad \Delta_4 \cap \Delta_5 = \varnothing.$$

Согласно (7) и (8) без ограничения общности, можно предположить, что

$$\Delta_4 = \{v_1, v_2, u_3, u_5\} \text{ и } \Delta_5 = \{v_3, v_4, u_2, u_4\}.$$

Заметим, что $A(v_1) = \{v_0, u_1, u_2, u_4\}$ (иначе $\alpha(v_1; 4) \geqq 3$. Аналогично, $A(v_2) = A(v_1)$, $A(v_3) = A(v)_4 = \{v_0, u_1, u_3, u_5\}$. Этим мы показали, что с точностью до изоморфизма граф G определен однозначно. Так как граф Γ_3 удовлетворяет условиям леммы 5 (предложение 3), то граф G изоморфен графу Γ_3.

Лемма 5 доказана.

Лемма 6. Граф Петерсена (рис. 2) — единственный 10-вершинный, регулярный граф степени 3 без простых циклов длины 3 и 4.

Доказательство. Пусть G — 10-вершинный регулярный граф степени 3 без простых циклов длины 3 и 4. Пусть C_p — простой цикл минимальной длины p графа G. Тогда любая вершина v, не входящая в C_p, смежна не более одной вершине из C_p. Следовательно, имеются хотя бы p вершин вне C_p. Значит, $p=5$. Если $C_5 = u_1 u_2 u_3 u_4 u_5 u_1$, то для остальных вершин v_1, v_2, v_3, v_4, v_5 можем считать, что u_i и v_i смежны для любого i, однако u_i несмежна v_j, если $i \neq j$ (см. рис. 6).

Очевидно, v_1 несмежна v_2 и v_5. Следовательно, она смежна вершинам v_3 и v_4. Аналогично, v_2 смежна вершинам v_4 и v_5 и т. д. Таким образом мы получили, что G — граф Петерсена.

Лемма 7. Пусть G — 10-вершинный регулярный граф степени 3 без треугольников, содержащий простой цикл длины 4. Тогда существует вершина v графа G, которая содержится хотя бы в 3 независимых 4-вершинных множествах, т. е. $\alpha(v; 4) \geqq 3$.

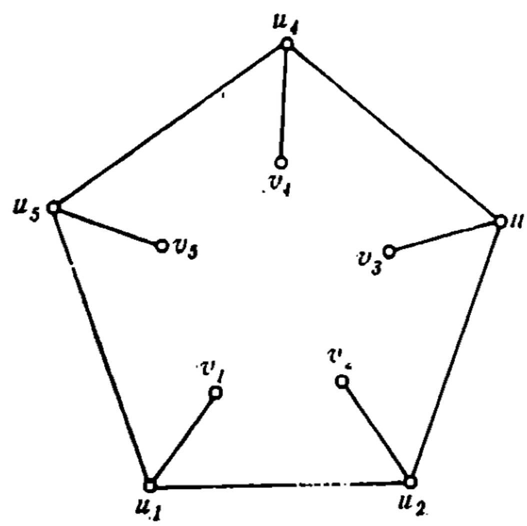

Рис. 6

Доказательтсво. Пусть $v_1 v_2 v_3 v_4 v_1$ — простой цикл длины 4. Через M обозначим множество всех остальных вершин графа G. Если допустим, что вершины v_3 и v_1 смежны одновременно некоторой вершине из M, тогда они несмежны пяти вершинам из M. Из того, что нет треугольников, вытекает, что среди эти пяти вершин есть хотя бы три пары несмежных вершин. Вместе с v_1 и v_3 эти пары несмежных вершин составляют три независимых 4-вершинных множества. Остается рассмотреть ситуацию, когда в M нет вершины, смежной одновременно двум вершинам цикла $v_1 v_2 v_3 v_4 v_1$. Обозначим через u_i вершину, смежную вершине v_i, $1 \leq i \leq 4$ и принадлежащую множеству M (см. рис. 7). Пусть w_1 и w_2 — вершины, отличные от v_i и u_i, $1 \leq i \leq 4$. Рассмотрим сначала случай, когда w_1 и w_2 несмежны. Вершина w_1 несмежна одной из вершин u_i, например

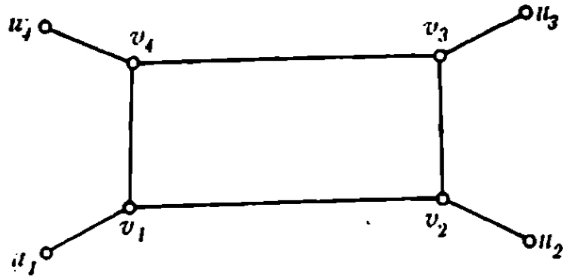

Рис. 7

u_1. Тогда w_1 содержится в следующих независимых множествах: $\{w_1, w_2, v_1, v_2\}$, $\{w_1, w_2, v_2, v_4\}$, $\{w_1, u_1, v_2, v_4\}$, и утверждение леммы в этом случае доказано. Пусть теперь w_1 и w_2 смежны. Тогда w_1 несмежна двум из вершин u_i, $1 \leq i \leq 4$. Нетрудно убедиться, что множество несмежных вершин вершине w_1, т.е. $\bar{A}(w_1)$, в этом случае содержит хотя бы три 3-вершинные независимые множества. Но тогда ясно, что w_1 содержится хотя бы в 3 независимых 4-вершинных множествах.

Лемма 7 доказана.

4. Доказательства теорем 1 и 2.

Доказательство теоремы 1. Допустим противное, т. е. $\pi(G; 4) \leq 4$. Согласно лемме 4, существует вершина $v_0 \in V(G)$ такая, что $\alpha(v_0; 4) \geq 2$. Тогда $\pi(G-v; 4) \leq 2$. Согласно теоремам А и В, граф $G-v_0$ изоморфен либо графу F_1 (рис. 1), либо графу $F_2 = F_1$ — [1, 9]. В первом случае это противоречит лемме 2 и предложению 2, а во втором — лемме 3.

Теорема 1 доказана.

Доказательство теоремы 2. Прежде всего заметим, что $\alpha(v; 4) \leq 4$ для любой вершины $v \in V(G)$. Если существует вершина $v_0 \in V(G)$, такая, что $\alpha(v_0; 4) = 4$, тогда $\pi(G-v_0; 4) = 1$. Согласно теореме А, граф $G - v_0$ изоморфен графу F_1 (рис. 1). Теперь из леммы 2 вытекает, что граф G изоморфен графу Γ_2 (рис. 3). Согласно лемме 3, $\alpha(v; 4) \neq 3$ для любой вершины $v \in V(G)$. Остается рассмотреть ситуацию, когда $\alpha(v; 4) \leq 2$ для любой вершины $v \in V(G)$. Заметим, что $|A(v)| \leq 6$ (иначе согласно одному результату Gooddman [4], $\alpha(v; 4) \geq 4$). Следовательно, $|A(v)| \geq 3$ для любой вершины $v \in V(G)$. Согласно лемме 1, $|A(v)| \leq 4$, $v \in V(G)$. Если для некоторой вершины v имеем $|A(v)| = 4$, согласно лемме 5, граф G изоморфен графу Γ_3 (рис. 4). Иначе, из сделанных замечаний вытекает, что граф G является регулярным степени 3. Согласно лемме 7, граф G не содержит циклов длины 4. Теперь из леммы 6 вытекает, что граф G изоморфен графу Петерсена Γ_1 (рис. 2).

Теорема 2 доказана.

5. Следствие для 11-вершинных графов.

Из теорем 1 и 2 можно извлечь

Следствие. Для любочо 11-вершинного графа без треугольников G имеет место неравенство $\pi(G; 4) \geq 10$.

Доказательство. Пусть G — граф без треугольников с 11 вершинами и v — вершина этого графа. Если граф $G - v$ изоморфен некоторому из графов Γ_1 (рис 2), Γ_2 (рис. 2), Γ_3 (рис. 4), тогда, рассуждая так же, как и в доказательствах леммах 2 и 3, получаем $\pi(G; 4) \geqq 12$. Поэтому будем считать, что для любой вершины v графа G подграф $G - v$ не изоморфен никакому из графов Γ_1, Γ_2 и Γ_3. Согласно теоремам 1 и 2, имеют место неравенства

(9) $$\pi(G - v;\ 4) \geqq 6 \text{ для всякого } v \in V(G).$$

Из (2) и (9) очевидно следует неравенство $\pi(G; 4) \geqq 10$.

Сразу следует заметить, что неравенство из следствия нельзя усилить значительно, так как верно следующее

Предложение 4. Через T обозначим граф, изображенный на рис. 8. Тогда $\pi(T; 4) = 11$.

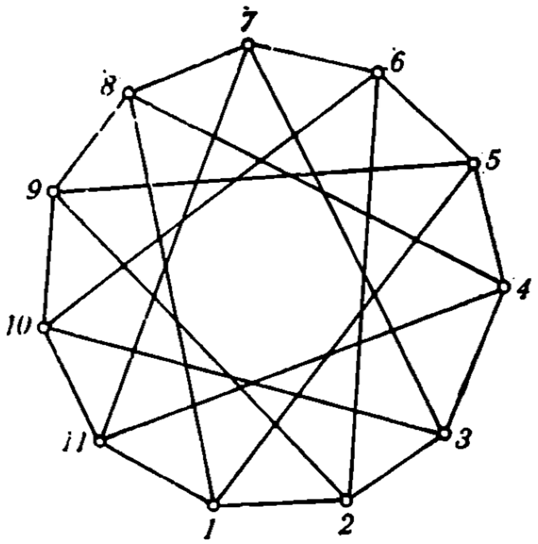

Рис. 8

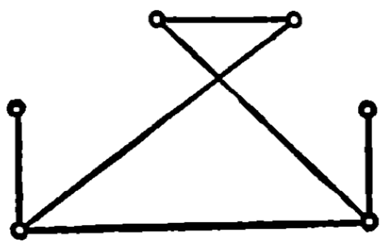

Рис. 9

Доказательство. Заметим, что для любой вершины $v \in V(T)$ подграф $\langle A(v) \rangle$ изоморфен графу, изображенному на рис. 9. Нетрудно проверить, что этот граф содержит ровно четыре независимых 3-вершинных подмножества и, следовательно, $\alpha(v; 4) = 4$ для любой вершины $v \in V(T)$. Теперь из (1) получаем $\pi(T; 4) = 11$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Хаджииванов Н., Ненов Н. Усилиение одной теоремы Грийнвуда и Глиссона о раскрасках ребер полного графа с девятью вершинами. — Докл. БАН, 31, 1978, 631 — 633.
2. Ненов Н., Хаджииванов Н. О некоторых 2-раскрасках ребер полного графа с 9 вершинами. — Год. Соф. унив., Фак. мат. и мех., 71 (в печати).
3. Greenwood R., Gleason A. Combinatorial relation and chromatic graphs. — Canad. J. Math., 7, 1955, 1 — 7.
4. Gooddman A. On sets of acquaintances and strangers at any party. — Amer. Math. Month., 66, 1959, 778 - - 783.

Поступила 31. 3. 1982

ON AN EXTREMAL PROPERTY OF PETERSEN'S GRAPH

N. D. Nenov, N. G. Hadjiivanov

(SUMMARY)

In the paper only finite non-oriented graphs without loops and without multiple edges are considered. For a graph G the symbol $V(G)$ denotes the set of vertices of G. The set $V' \subset V(G)$ is called independent set if no two vertices of V' are joined by an edge. For a graph G the symbol $\pi(G; p)$ denotes the number of independent sets with p vertices.

In this paper we prove the following theorems:

Theorem 1. Let G be a graph without triangles and $|V(G)| = 10$. Then $\pi(G; 4) \geqq 5$.

Theorem 2. Let G be a graph without triangles, $|V(G)| = 10$ and $\pi(G; 4) = 5$. Then the graph G is isomorphic to one of the graphs shown in Fig. 2, 3 and 4.

Corollary. Let G be a graph without triangles and $|V(G)| = 11$. Then $\pi(G; 4) \geqq 10$.

СЪДЪРЖАНИЕ

SUMMARY