Софийски Университет “Св. Климент Охридски”

Факултет по Математика и Информатика

Ася Петрова Русева

# КРАЙНИ ГЕОМЕТРИИ И КОДОВЕ

Дисертационен труд

за присъждане на научната степен
“доктор на науките”
по професионално направление
4.5 Математика

София, 2020 г.

# Съдържание

# Глава 1

# Увод

Настоящият дисертационен труд съдържа изследвания по няколко задачи от областта на крайните геометрии, имащи връзка с теория на шумозащитните кодове. Тези два дяла на математиката възникват почти едновременно и независимо един от друг в средата на XX век. За рождена дата на теория на кодирането се приема публикуването на забележителната статия на C. Shannon [174], в която той доказва, че за всяка скорост по-малка от капацитета на използвания канал съществуват блокови кодове, както и правило за декодирането им, за които грешката при декодиране на произволна кодова дума е по-малка от всяка предварително зададена константа. Този резултат е известен като основна теорема на каналното кодиране и е подробно изложен в [42, 92]. За съжаление, въведените от Shannon стохастични кодове са с такава голяма дължина, че практическото им използване е невъзможно. Така голямо значение придобива обратната теорема: в случаите, когато скоростта на използваните кодове е по-голяма от капацитета на използвания канал, не е възможно предаване на данни с произволно малка грешка при декодиране. От практическа гледна точка изключително важна е задачата за построяване на "добри" кодове и на алгоритми за декодирането им. За добри обикновено се считат кодове, които лежат или са близо до известните теоретични граници.

В годините след появяването на работата на C. Shannon линейните кодове се превръщат в най-изследвания клас блокови кодове. Наличието на хубава математическа структура ги прави лесни за описание и анализ и води до ефективни алгоритми за декодиране. Следва да отбележим, че макар общата задача за декодиране на линеен код по принципа на максималното правдоподобие да е NP-пълна [16], това не изключва наличието на кодове, за които съществува ефективно декодиране.

Активното изследване на крайни геометрични структури започва също около 1950 г., макар отделни разултати да се появяват и по-рано. Така в своята работа [60] по доказване на независимостта на аксиомите за проективно пространство G. Fano изследва възможността четвъртата хармонична точка да съвпада със спрегнатата си. Това води до тримерно пространство от 15 точки, 35 прави и 15 равнини, известно днес като PG$(3, 2)$. През 1955 г. B. Segre доказва в [167], че всяко множество от $q + 1$ точки в PG$(2, q)$, $q$ нечетно, никои три от които не са колинеарни, е коника. В следващите години започва интензивно изследване на крайните геометрии. Известно време те протичат независимо от проучванията в теория на кодирането, което води до пресичане и дори до преоткриване на резултати. През 70-те години на миналия век става все по-забележима дълбоката връзка между определени задачи от теория на кодирането и крайните геометрии. Централни резултати, които повлияват в значителна степен на изследванията са откриването на алгебро-геометричните кодове от В. Гоппа [66, 67, 68], конструирането на 56-шапка в PG$(5, 3)$ от R. Hill [94, 95], както и конструирането от M. Tsfasman, S. Vladut и Th. Zink [192] на AG-кодове, подобряващи границата на Gilbert-Varshamov [63, 194].

През 80-те и 90-те години на XX век се изясни, че т. нар. основна задача на теория на кодирането има геометрична природа и може да се формулира естествено като задача за разполагане на точки в проективна геометрия над крайно поле. В най-популярния си вид тя се формулира като задача за минимизиране на дължината на линеен код при фиксирани размерност и минимално разстояние. Естествена долна граница за тази дължина е т. нар. граница на Griesmer [71, 177]. От принципно значение е характеризирането на кодовете, лежащи на тази граница. Въпреки значителният напредък постигнат в работите на Б. И. Белов, В. Н. Логачев, В. П. Сандимиров, С. Додунеков, Н. Манев, N. Hamada, R. Hill, T. Helleseth, H. van Tilborg, T. Maruta, L. Storme и др., решението на тази задача над произволни полета към настоящия момент изглежда недостъпно.

През последните години бяха доказани няколко резултата за оптимални кодове над крайни полета, които дадоха отговор на въпроси стояли открити няколко десетилетия. Всички те бяха получени като твърдения за специални множества от точки в крайни геометрии. Най-важните от тях са следните:

- ◦ доказателството на S. Ball за максималната мощност на множество от точки в $\mathrm{PG}(r, p)$, $p$ просто число, намиращи се в общо положение [3, 10]; това е еквивалентно на прочутата MDS-хипотеза от теория на кодирането за максималната възможна дължина на MDS-код;
- ◦ теоремата на H. N. Ward за делимостта на кодове над просто поле, лежащи на границата на Griesmer [196];
- ◦ намирането на долна граница за мощността на афинно блокиращо множество в афинните геометрии $\mathrm{AG}(n, q)$ от A. Bruen [32], както и подобряването ѝ от S. Ball и A. Blokhuis [2, 4, 8];
- ◦ доказателството на теоремата за несъществуване на максимални арки в равнини от нечетен ред на S. Ball, A. Blokhuis, и F. Mazzocca [7, 9].

В настоящия труд са решени задачи от крайните геометрии, имащи пряко отношение към теория на кодирането. Макар резултатите да са представени като геометрични, те допускат и ясни формулировки в термините линейни кодове. По-долу ще опишем накратко съдържанието на този труд.

**Глава 2. Предварителни сведения.** Тази глава съдържа дефиниции и резултати за множества от точки в крайни геометрии и линейни кодове над крайни полета. В раздел 2.1 са въведени координатните проективни пространства $\mathrm{PG}(r, q)$ над полетата $\mathbb{F}_q$ и са формулирани т.нар. фундаментални теореми на проективната геометрия. Въведени са арки и блокиращи множества като специални мултимножества от точки в $\mathrm{PG}(r, q)$. Представени са специални конструкции на арки, най-важните от които са проектиране от подпространство и конструиране на $\sigma$-дуална арка. В раздел 2.2 са описани редица класове от арки и е представена класификацията на арки в малки проективни равнини. Раздел 2.3 е посветен на линейни кодове над крайни полета. Въведени са основните понятия и са представени някои класически граници: границите на Singleton, Gilbert-Varshamov, обобщената граница на Singleton и границата на Griesmer. В раздел 2.4 е описана връзката между линейните кодове и мултимножествата от точки в геометриите $\mathrm{PG}(r,q)$. Изложени са геометричните версии на принципни резултати като теоремата на Ward за делимост на кодове, лежащи на границата на Griesmer и теоремата за разширимост на Hill и Lizak. Описани са и подобрения на теоремата на Hill-Lizak, следващи от един резултат на Beutelspacher за блокиращи множества. В края на раздела е представено съответствие между някои понятия от теория на кодирането и крайните геометрии.

Следващите три глави съдържат оригиналните резултати в дисертационния труд.

**Глава 3. Арки и оптимални кодове.** Основна тема в тази глава е достижимостта на границата на Griesmer и геометрична характеризация на кодовете, които лежат на нея. Съгласно тази граница за всеки линеен код с параметри $[n,k,d]_q$ е изпълнено:

$$n \geq g_q(k,d) := \sum_{i=0}^{k-1} \left\lceil \frac{d}{q^i} \right\rceil . \tag{1.1}$$

Кодове, лежащи на тази граница, се наричат кодове на Griesmer, а асоциираните с тях арки – арки на Griesmer. Широк клас от кодове на Griesmer бе построен от Белов, Логачев и Сандимиров в [14, 15, 138]. Конструкцията им се състои в изтриване на симплекс кодове с малки размерности от конкатенация на симплекс-кодове с размерност $k$. Геометрично конструкцията е по-естествена: тя се състои в изтриване на блокиращо множество от определен брой копия на $\mathrm{PG}(k-1,q)$. Най-малката дължина $n$, за която съществува $[n,k,d]_q$-код при фиксирани $k$, $d$ и $q$ бележим с $n_q(k,d)$. Принципно важен въпрос е да се изследва поведението на функцията $t_q(k)$, задаваща отклонението на оптималната дължина на код от стойността, зададена от границата на Griesmer:

$$t_q(k) := \max_{0 \leq d < \infty} (n_q(k,d) - g_q(k,d)). \tag{1.2}$$

Тук полето $\mathbb{F}_q$ е фиксирано. Известно е [99], че за всяка фиксирана размерност $k$ съществува константа $\delta(k,q)$, такава че $n_q(k,d) = g_q(k,d)$ за всички $d \geq \delta_q(k,d)$. Ако фиксираме $d$ и оставим $k$ да расте неограничено, то $(n_q(k,d) - g_q(k,d)) \to \infty$, откъдето и $t_q(k) \to \infty$. Този нетривиален факт е забелязан за пръв път от С. Додунеков в [46]. В раздели 3.1–3.3 изследваме въпроса за скоростта на това нарастване.

В раздел 3.1 излагаме три еквивалентни формулировки на задачата за определяне на максималното отклонение от границата на Griesmer на най-добрите кодове от фиксирана размерност над дадено поле. Формално това е еквивалентно на намирането на скоростта на нарастване на функцията $t_q(k)$, зададена с (1.2). Трите формулировки са съответно в термините на линейни кодове, на арки и на блокиращи множества (или минихипери) в $\mathrm{PG}(k-1,q)$. В началото е приведено ново доказателство на теоремата на Додунеков за неограниченото нарастване на $t_q(k)$ като функция на $k$. След това са приведени няколко резултата, упростяващи изследването на $t_q(k)$. Най-важният е Лема 3.6, от която следва, че максимумът в (1.2) може да бъде взет само по краен брой стойности на $d$:

$$t_q(k) := \max_{0\le d<q^{k-1}-q^{k-2}} (n_q(k,d) - g_q(k,d)). \tag{1.3}$$

Основен резултат в раздел 3.2 е Теорема 3.10, която е обобщение на конструкцията на Белов, Логачев и Сандимиров. На геометричен език тя се състои в изтриване на блокиращо множество, получено като сума на подпространства с дадени размерности, от $s$-кратна сума на $\mathrm{PG}(k-1,q)$. Проблемът е, че при конструирането на блокиращото множество могат да се появят точки с кратност по-голяма от $s$. Идеята на Теорема 3.10 се състои в изглаждане на точките с кратности, надхвърлящи $s$, и заменянето им с точки с максималната допустима кратност. По този начин някои хиперравнини се оказват блокирани недостатъчен брой пъти и трябва да бъдат компенсирани с допълнителни, подходящо избрани точки.

В конструкцията от Теорема 3.10 има голяма свобода при избора на подпространства, които формират търсеното блокиращо множество. За геометрии с нечетна размерност $\mathrm{PG}(2l-1,q)$ съществува спред от $(l-1)$-мерни подпространства, които могат да се използват за конструиране на подходящи блокиращи множества. Използвайки тази идея, доказваме, че за $k = 2l$ е в сила неравенството (Теорема 3.13);

$$t_q(k) \le 2\frac{q^l-1}{q-1} - (2l+q-1),$$

откъдето $t_q(k) \lesssim q^{k/2}$. Оттук следва и интересният резултат $t_q(4) \le q-1$ (Следствие 3.14). Този резултат дава частичен отговор на въпроса за нарастването на $t_q(4)$ като функция на $q$. Това е модификация на основния въпрос за поведението на функцията $t_q(k)$, при която размерността е фиксирана, а редът на полето расте неограничено. В случая на равнинни арки проблемът за определяне на асимптотиката на $t_q(3)$ като функция на $q$ е поставен от S. BALL [6]. Той изказа хипотезата, че

$$t_q(3) \leq \log q.$$

В раздел 3.3 ние изследваме тази задача. Най-напред доказваме, че ако в $\mathrm{PG}(2,q)$ съществува $(n,w)$-арка, за която $n=(w-1)q+w-\alpha$, то съществува $[n,3,d]_q$-код с $d=n-w$, за който $n=t+g_q(3,d)$ с $t=\lfloor\alpha/q\rfloor$ (Лема 3.15). Това свързва тривиалната горна граница за мощността на арка с отклонението от границата на GRIESMER за асоциирания код. Основен резултат в този раздел е доказателството на хипотезата на BALL за равнини от четен ред: в Теорема 3.18 доказваме, че ако $q=2^h$, то $t_q(3)\leq h-1$. Доказателството на тази теорема използва съществуването на максимални арки в равнини от четен ред [45, 155, 186, 188]. За равнини от редове, които са четна степен на нечетно просто число доказваме по слабата оценка $t_3(q)\leq\sqrt{q}-1$ (Теорема 3.19).

В раздел 3.4 са намерени нови точни стойности на $n_q(k,d)$ за $q=4$, $k=5$. За кодове над $\mathbb{F}_4$, $k=5$ е най-малката размерност, при която съществуват минимални разстояния $d$, за които точната стойност на $n_4(5,d)$ не е намерена. В началото на този раздел (подраздели 3.4.1 и 3.4.2) е направена характеризация на арки с параметри $(100,26)$, $(117,30)$ и $(118,30)$ в $\mathrm{PG}(3,4)$. Тази характризация, която е интересна и сама по себе си, се използва по-нататък в доказателствата за несъществуване на арки в $\mathrm{PG}(4,4)$. В тази връзка важна е конструкцията на неразширимата $(100,26)$-арка в $\mathrm{PG}(3,4)$, която се оказва и единствената неразширима арка с тези параметри (Теорема 3.34). Следващите четири подраздела 3.4.3–3.4.5 съдържат резултати за арки и асоциираните с тях кодове, чието съществуване беше под въпрос. Основен резултат в 3.4.3 е Теорема 3.35, в която е доказано несъществуването на $(467,118)$-арки в $\mathrm{PG}(5,4)$. В подраздел 3.4.4 са доказани Теореми 3.37 и 3.38, които отхвърлят съществуването на арки с параметри $(465,117)$ и $(464,117)$ в $\mathrm{PG}(4,4)$. Накрая подраздел 3.4.5 съдържа още три резултата за несъществуване – Теореми 3.40, 3.42 и 3.43, които отхвърлят съществуването на арки в $\mathrm{PG}(4,4)$ с параметри $(398,101)$,$(396,100)$ и $(395,100)$. От тези резултати получаваме точната стойност на $n_4(5,d)$ за десет минимални разстояния $d=295,296,297,298,\ 347,\ldots,352$. В края на глава 3 е представена таблица на всички минимални разстояния $d$, за които задачата за точната стойност на $n_4(5,d)$ е открита към настоящия момент. Резултатите от този труд заедно с някои нови точни стойности, намерени от H. Kanda [118], свеждат броя на откритите случаи до 98.

**Глава 4. Разширимост на арки и кодове.** Глава 4 е посветена на изследване на условията за разширимост на арки и, еквивалентно, на условията за разширимост на асоциираните с тях линейни кодове. Добре известен факт е, че всеки двоичен $[n,k,d]$-код с нечетно минимално разстояние е разширим до $[n{+}1,k,d{+}1]$-код. Това наблюдение е обобщено от R. Hill и P. Lizak в [100, 103]. Те доказват, че всеки $q$-ичен $[n,k,d]_q$-код с $(d,q)=1$, в който всяка дума е с тегло сравнимо с 0 или $d$ по модул $q$, е разширим до $[n+1,k,d+1]_q$-код. Типичен случай при изследване на достижимостта на границата на Griesmer е $d \equiv -1 \pmod q$. Тази линия на изследване е продължена от T. Maruta, който доказа нови резултати за разширимост [147, 149, 150, 151]. Най-интересен за нас е резултатът от [150], съгласно който за нечетни $q$ всеки $[n,k,d]_q$-код с $d \equiv -2 \pmod q$, имащ тегла $\equiv -2,-1,0 \pmod q$, е разширим.

Изследванията по разширимост на арки предхождат тези по разширимост на кодове и протичат независимо от тях. Може би първият такъв резултат е теоремата на Barlotti [12], съгласно която всяка $((w-1)(q+1),w)$-арка в $\mathrm{PG}(2,q)$ е разширима до максимална $((w-1)(q+1)+1,w)$-арка. Резултатите за разширимост са специален случай на широк клас от резултати, известни като теореми за стабилност.

В тази глава е предложен нов геометричен подход към задачата за разширимост, разбирана като формулиране на условия, при които $(n,w)$-арка в $\mathrm{PG}(r,q)$ е разширима до $(n+1,w)$-арка чрез увеличаване на кратността на една точка. Основната идея е да се свърже разширимостта на дадена арка $\mathcal{K}$ със структурата на специална арка $\widetilde{\mathcal{K}}$ в дуалната геометрия. От особен интерес е въпросът за разширимостта на т.нар. арки с $t$-квазиделимост. Такива арки се появяват при разглеждане на кодове на Griesmer с $d \equiv -t \pmod q$, $t<q$.

В раздел 4.1 въвеждаме т.нар. $(t \mod q)$-арки. Те се получават при подходящо дуализиране на арки със свойството $t$-квазиделимост, които на свой ред са асоциирани с кодове на Griesmer с минимално разстояние $d \equiv -t \pmod q$. Основен резултат в този раздел е Теорема 4.3, съгласно която достатъчно условие за $c$-кратна разширимост на $t$-квазиделима арка $\mathcal{K}$ е дуалната арка $\widetilde{\mathcal{K}}$ да е сума на $c$ хиперравнини и някоя друга арка. В частност, една арка $\mathcal{K}$ с $t$-квазиделимост е 1-разширима (или просто разширима), ако носителят ѝ $\operatorname{Supp}\mathcal{K} = \{X \mid \mathcal{K}(X) > 0\}$ съдържа хиперравнина. Това обуславя и важността на задачата за определяне на структурата на $(t \mod q)$-арките.

В раздел 4.2 се изследва структурата на $(t \mod q)$-арки без връзка със задачата за разширимост. Най-важен тук е въпросът за структурата на $(0 \mod q)$-арките, т.е. тези арки, за които всяка хиперравнина е с кратност $\equiv 0 \pmod q$. Изследването ни е ограничено само до геометриите $\mathrm{PG}(r,p)$ от прост ред $p$. В този случай кратностите на точките могат да се разглеждат като елементи на $\mathbb{F}_p$ и всички $(0 \mod p)$-арки образуват векторно пространство над $\mathbb{F}_p$ (Следствие 4.14). В Теорема 4.6 представяме обща конструкция, при която от $(t \mod q)$-арка $\mathcal{F}_0$ в $\mathrm{PG}(r-1,q)$ получаваме $(t \mod q)$-арка $\mathcal{F}$ в $\mathrm{PG}(r,q)$. Последната наричаме арка, получена от $\mathcal{F}_0$ чрез лифтинг. Основен резултат в този раздел е Теорема 4.12, в която се доказва, че всяка $(0 \mod q)$-арка в $\mathrm{PG}(r,q)$ е сума на допълнения на хиперравнини (или сума на афинни пространства). Този резултат се получава с използване на класическата формула на N. Hamada [73] за $p$-ранга на матрицата на инцидентност на $\mathrm{PG}(r,q)$, в която редовете са индексирани с точките, а стълбовете – с правите на тази геометрия. Затворен вид на формулата за ранга е получен от J. van Lint като доказателството се съдържа в работата на P. V. Ceccherini и J. Hirschfeld [39]. От Теорема 4.12 следва, че всяка $(0 \mod p)$-арка, а оттук и всяка $(t \mod p)$-арка за $t < p$ е сума на арки, получени чрез лифтинг (Следствие 4.13 и 4.14). В равнинния случай доказваме, че тази сума не включва повече от $p$ събираеми (Теорема 4.15). Изглежда правдоподобно, че аналогично твърдение е в сила и за геометрии от произволна размерност. Доказателството на това твърдение зависи от проверката на условие, което гарантира валидността на формулата за включване и изключване за размерностите на подпространства. Известно е, че тази формула не е вярна в общия случай.

Раздел 4.3 е посветен на изследване на $(t \mod q)$-арки, в които максималната кратност на точка е $t$. В равнинния случай е доказано, че такива арки са еквивалентни на блокиращи множества, при които кратностите на правите се съдържат в интервал с дължина $t$ (Теорема 4.19). В края на раздела са характеризирани $(3 \mod 5)$-арките в $\mathrm{PG}(2,5)$ с малък брой точки: 18, 23, 28 и 33. От тази характеризация следва, че всяка $(3 \mod 5)$-арка $\mathcal{F}$ в $\mathrm{PG}(3,5)$ с мощност, ненадхвърляща 158, е получена с лифтинг от равнинна $(3 \mod 5)$-арка, т.е. $|\mathcal{F}| = 93, 118$, или 143. Този резултат се използва по-нататък за доказване на несъществуването на някои хипотетични оптимални кодове.

В следващите два раздела 4.4 и 4.5 се съдържат разултати за разширимост на грийсмърови арки. В случаите, когато минималното разстояние $d$ на асоциирания с такава арка код удовлетворява $d \equiv -t \pmod{q}$, тези арки притежават свойството $t$-квазиделимост с $t \equiv -d \pmod{q}$. Така за тях могат да бъдат използвани резултатите от предните три раздела. Основен резултат в 4.4 е Теорема 4.26, която дава достатъчно условие за разширимост на $(n, n-d)$-арки в $\mathrm{PG}(k-1, q)$, имащи свойството $t$-квазиделимост. Ако числото $d$ е представено във вида

$$d = sq^{k-1} - \sum_{i=0}^{k-2} \varepsilon_i q^i,$$

където $0 \leq \varepsilon_i < q$ за всички $i = 0, 1, \ldots, k-2$, и за числата $\varepsilon_i$ са изпълнени неравенствата

$$t = \varepsilon_0 < \sqrt{q}, \varepsilon_1 < \sqrt{q}, \ldots, \varepsilon_{k-2} < \sqrt{q},$$

то $\mathcal{K}$ е $t$-кратно разширима. Този резултат дава условие за разширимост и на линейни кодове (Теорема 4.27).

В общия случай параметрите на една арка $\mathcal{K}$ с $t$-квазиделимост не определят параматерите на дуалната ѝ $\widetilde{\mathcal{K}}$. Все пак в случаите, когато е известен спектърът на рестрикцията на $\mathcal{K}$ върху максимална хиперравнина, то мощността на $\widetilde{\mathcal{K}}$ може да бъде ограничена. В редица случаи това позволява да се докаже разширимостта на $\mathcal{K}$. Един такъв резултат представлява Теорема 4.28, която дава достатъчно условие за разширимост, зависещо от спектъра на $\mathcal{K}|_H$, където $H$ е максимална хиперравнина. В края на раздел 4.4 са представени два примера, в които се прилагат получените резултати за разширимост. В първия пример се изследва клас от хипотетични арки в $\mathrm{PG}(3, q)$ с параметри $(q^3 - 3q - 6, q^2 - 3)$. Оказва се, че всички те са разширими до несъществуващите $(q^3 - 3q - 3, q^2 - 3)$-арки. За $q \geq 11$ този резултат следва от Теорема 4.26. В случаите $q = 5, 7, 8, 9$ хипотетичните арки с параметри $(q^3 - 3q - 6, q^2 - 3)$ са отново разширими, но доказателството изисква и допълнителни геометрични аргументи. Във втория пример е доказана $t$-разширимостта на $(q^2 + 1 - t)$-шапки в $\mathrm{PG}(3, q)$ за всяко $t < \sqrt{q}$.

В раздел 4.5 е доказано несъществуването на арки с параметри $(104, 22)$ в $\mathrm{PG}(3, 5)$. Това решава един от четирите открити случая за кодове с

$k = 4, q = 5$ [152]. Идеята е, че ако съществува такава арка $\mathcal{K}$, то тя има свойството 3-квазиделимост и е неразширима. Така дуалната арка $\widetilde{\mathcal{K}}$ не съдържа в носителя си равнина и има допълнителното свойство, че не съществува 18-равнина съдържаща 18-права. Използвайки структурата на $(3 \mod 5)$-арките от раздел 4.3, стигаме до противоречие.

**Глава 5. Афинни блокиращи множества.** Глава 5 е посветена на конструирането на афинни блокиращи множества. Едно множество $\mathcal{B}$ от точки в $\mathrm{AG}(n, q)$ наричаме афинно $t$-кратно блокиращо множество, ако всяка хиперравнина на $\mathrm{AG}(n, q)$ съдържа поне $t$ точки от $\mathcal{B}$.

Границата за минималната мощност на 1-блокиращо множество е доказана независимо от R. Jamison [117] и A. Brouwer и A. Schrijver [31]:

$$|\mathcal{B}| \geq n(q-1) + 1. \tag{1.4}$$

Тази граница е точна за всички размерности $n$ и всички полета $\mathbb{F}_q$. Един пример за такова блокиращо множество са $n$ конкурентни прави, никои три от които не лежат в една равнина. Значително обобщение на тази граница е направено от A. Bruen [32], който доказа, че ако $\mathcal{B}$ е $t$-кратно блокиращо множество, то за мощността му е в сила неравенството:

$$|\mathcal{B}| \geq (n + t - 1)(q - 1) + 1. \tag{1.5}$$

Тази граница е нетривиална за $1 \leq t \leq (n-1)(q-1)$, тъй като за стойности на $t$ извън този интервал тя става по-слаба от тривиалната

$$|\mathcal{B}| \geq tq.$$

За големи стойности на $t$ границата на Bruen не се достига. C. Zanella [200] доказа, че за стойности на $t$, за които

$$t > \frac{(n-1)(q-1)+1}{2}$$

не съществуват блокиращи множества, удовлетворяващи границата на Bruen. Границата на Bruen може съществено да се подобри за някои специални стойности на $t$ и $n$. S. Ball [2] доказа, че за $t < q$ едно $t$-кратно блокиращо множество $\mathcal{B}$ в $\mathrm{AG}(n, q)$, $q = p^h$, е с мощност поне $(n+t-1)(q-1) + k$ при условие, че съществува цяло число $j$, за което е изпълнено

$$\binom{k-n-t}{j} \not\equiv \pmod{p}.$$

По-специално, ако $\binom{-n}{t-1} \not\equiv 0 \pmod{p}$, то

$$|\mathcal{B}| \geq (n+t-1)q - n + 1.$$

В същата работа [2] S. Ball конструира и блокиращи множества в $\mathrm{AG}(n,q)$ с параметри $((n+t-1)q - n + \varepsilon, 2)$, където

$$\varepsilon = \begin{cases} 1 & \text{за } n \not\equiv 0 \pmod{p}, \\ 0 & \text{за } n \equiv 0 \pmod{p}. \end{cases}$$

В случаите, когато $\varepsilon = 0$ конструираните блокиращи множества достигат границата на Bruen. Независимо един от друг C. Zanella [200] и S. Ball [2] отбелязват, че ако от хиперболичната квадрика в $\mathrm{PG}(3,q)$ се изтрие равнина, минаваща по две нейни прави, то резултатът е $(q^2, q-1)$-блокиращо множество в $\mathrm{AG}(3,q)$, лежащо на границата на Bruen. Така към 2012 г. бяха известни следните класове от блокиращи множества, достигащи границата на Bruen:

(1) $t = 1$ за всички $n$ и $q$;

(2) $t = 2$ за всяко $n \equiv 0 \pmod{p}$ и всяко $q = p^h$;

(3) $t = q-1$, $n = 3$ за всяко $q = p^h$.

Раздел 5.1 съдържа обзор на известните долни граници за мощността на блокиращо множество в $\mathrm{AG}(n,q)$.

В раздел 5.2 е изложен основният резултат на глава 5. Това е Теорема 5.6, в която е представена нова обща конструкция на афинни блокиращи множества. По-специално е доказано, че ако съществуват $(M,w)$-арка в $\mathrm{PG}(r,q)$, $2 \leq r \leq n-2$, $q = p^h$, и блокиращо множество с параметри $(M', u)$ в афинната геометрия $\mathrm{AG}(n-r-1,q)$, то съществува $(N,t)$-блокиращо множество в $\mathrm{AG}(n,q)$ с параметри

$$N = qM, t = \min\{M - w, aqu\},$$

където $a = \lfloor M/M' \rfloor$.

В няколко следствия са описани важни специални случаи на прилагане на Теорема 5.6. В Следствие 5.7 арката и блокиращото множество са с една и съща мощност, докато в Следствие 5.8 арката се избира в подпространство с коразмерност 2, т.е. $r = n - 2$. В тези случаи се получава и семейство от блокиращи множества с параметри $(q^2, q-n+2)$ в $\mathrm{AG}(n,q)$, $3 \le n \le q-1$ (Теорема 5.12). Това е нов клас от блокиращи множества, достигащи границата на Bruen. Този клас включва хиперболичните квадрики от (3), които се получават при $n = 3$. Така конструираният клас може да бъде използван по-нататък за получаване на нови примери на оптимални блокиращи множества (имащи минимална мощност при фиксирани $t$, $n$ и $q$). Такъв пример е Теорема 5.13, в която е доказано, че за всяко $s = 0, 1, \ldots, q+1-n$, съществува блокиращо множество в $\mathrm{AG}(n,q)$, $3 \le n \le q-1$, с параметри $(q^2 - s(n-2+s), q-(n-2+s))$. По-специално, при $s = 1$ получаваме блокиращи множества с параметри $(q^2 - n + 1, q - n + 1)$, които не лежат на границата на Bruen, за които доказваме, че са оптимални (Теорема 5.14).

По-нататък, като използваме Теорема 5.6 конструираме блокиращи множества със следните параметри:

$$
\begin{array}{ll}
(28,4) \text{ в } \mathrm{AG}(5,4); & (40,4) \text{ в } \mathrm{AG}(9,4); \\
(52,4) \text{ в } \mathrm{AG}(13,4); & (64,4) \text{ в } \mathrm{AG}(17,4); \\
(120,8) \text{ в } \mathrm{AG}(9,8). &
\end{array}
$$

Тези пет блокиращи множества са оптимални и лежат на границите на Ball от [4] и Ball-Blokhuis от [8]. Освен че са първите примери въобще на блокиращи множества, за които тези граници се достигат, те са и единствените известни примери към настоящия момент.

В раздел 5.4 представяме две таблици. Първата от тях е таблица за блокиращи множества в $\mathrm{AG}(n,4)$, получени от конструкцията в Теорема 5.6, които са сравнени с долните граници от работите [4, 8]. Втората таблица съдържа долни и горни граници за мощността на 3-кратни 4-кратни блокиращи множества в малки афинни геометрии $\mathrm{AG}(n,q)$, за $n = 3,4,5$, $q = 5,7,8,9,11,13$.

Резултатите в този дисертационн труд са публикувани в седем научни статии [127, 128, 129, 130, 164, 165]. Глава 3 е написана по [128, 131, 165]. Общото изследване на функцията $t_q(k)$ от първите три раздела е в работа [131]. Несъществуванията на арки със специални параметри в раздел 3.4 се съдържат в [128] и [165]. Глава 4 съдържа идеи от [127] и е нейно продължение. Резултатите от нея са публикувани в [129] като несъществуването на $(104, 22)$-арки в $\mathrm{PG}(4, 5)$ се съдържа в [130]. Глава 5 е написана по работа [164].

Резултатите от този дисертационен труд са докладвани на много конференции у нас и в чужбина, по важните от които са следните:

- ALCOMA: Thurnau, Germany 2010; Kloster Banz, Germany 2015
- Workshop on Coding and Cryptography: Paris, 2015; St. Jacut-de-la-Mer 2019
- Combinatorics: Perugia, 2012; Gaeta 2014; Maratea 2016; Arco, 2018
- Finite Fields and Their Applications Fq13: Gaeta 2017
- Finite Geometries: Kloster Irsee 2014; Germany, Kloster Irsee 2017
- CSECS: Fulda, Germany 2016; Boston University 2018; Fulda 2019
- ACCT: Pomorie 2012; Svetlogorsk 2014, Russia; Albena 2016; Svetlogorsk 2018

Изказвам най-голяма благодарност на проф. дмн Иван Ланджев. Признателна съм му за безценните съвети и дискусии при съвместната ни работа и за техническата помощ при оформяне на този труд. Благодаря на колегите от катедра "Геометрия" и катедра "Алгебра" на ФМИ към СУ "Св. Кл. Охридски", които искрено са ме подкрпяли през годините и ме подкрепят в тези необичайни времена. Специално благодаря на колегите от секция МОИ на ИМИ при БАН, както и на колегите от групата по кодиране за подкрепата и критичното отношение към работата ми.

# Глава 2

# Предварителни сведения

В тази глава представяме основните понятия и факти от крайните геометрии и теорията на линейните кодове. Голяма част от изложените резултати се съдържат в класическите книги по крайни геометрии [44, 106, 108, 109, 111, 114] и по кодиране [29, 92, 98, 135, 143, 116]. Най-новите резултати в тези области се съдържат в работите [5, 109, 110, 178, 182].

## 2.1 Проективни геометрии над крайни полета

### 2.1.1 Проективни пространства

Нека $\mathcal{P}$ и $\mathcal{L}$ са две множества с елементи, които ще наричаме съответно *точки* и *прави* и нека $I \subseteq \mathcal{P} \times \mathcal{L}$ е релация на инцидентност. Структурата на инцидентност $(\mathcal{P}, \mathcal{L}, I)$ наричаме *проективно пространство*, ако удовлетворява следните три аксиоми:

(P1) С всеки две различни точки е инцидентна точно една права.

(P2) С всяка права са инцидентни поне три различни точки.

(P3) Ако $P, Q, R$ и $S$ са различни точки и правите $PQ$ и $RS$ се пресичат, то правите $PR$ и $QS$ също се пресичат.

Да отбележим, че аксиома (P3) може да бъде заменена от аксиомата на Veblen:

(P3′) Четири различни прави не могат да се пресичат в пет различни точки.

Нека $(\mathcal{P}, \mathcal{L}, I)$ е проективно пространство. Едно подмножество от точки $\mathcal{P}' \subseteq \mathcal{P}$ наричаме *проективно подпространство* на $(\mathcal{P}, \mathcal{L}, I)$, ако с всеки две свои точки $P, Q \in \mathcal{P}'$, то съдържа и всички точки от определената от тях права $PQ$. Ако $\mathcal{L}'$ е множеството на всички прави, определени от двойки точки от $\mathcal{P}'$, то подпространството от точките на $\mathcal{P}'$ само по себе си е структура на инцидентност

$$(\mathcal{P}', \mathcal{L}', I|_{\mathcal{P}' \times \mathcal{L}'}).$$

Ясно е, че сечението на проективни подпространства е проективно пространство. Нека $\mathcal{M} \subset \mathcal{P}$. Сечението на всички проективни подпространства, съдържащи $\mathcal{M}$, ще означаваме с $\langle \mathcal{M} \rangle$ и ще наричаме проективно пространство, породено от $\mathcal{M}$. [1] Нека $\mathcal{P}' \subseteq \mathcal{P}$ е проективно подпространство на $(\mathcal{P}, \mathcal{L}, I)$ и нека $P$ е точка извън $\mathcal{P}$, т.е. $P \in \mathcal{P} \setminus \mathcal{P}'$. Подпространството $\langle \mathcal{P} \cup \{P\} \rangle$ се състои от точно тези точки, които са инцидентни с правите, свързващи $P$ с точките от $\mathcal{P}'$.

Едно множество от точки $\mathcal{B} \subset \mathcal{P}$ наричаме *база* на $(\mathcal{P}, \mathcal{L}, I)$, ако

(1) $\langle \mathcal{B} \rangle = \mathcal{P}$ и

(2) $\langle \mathcal{B}' \rangle \neq \mathcal{P}$ за всяко $\mathcal{B}' \subsetneq \mathcal{B}$.

Всяко проективно пространство има база и всички бази са равномощни. *Размерност* на проективното пространство $\Sigma = (\mathcal{P}, \mathcal{L}, I)$ се дефинира чрез $\dim \Sigma := |\mathcal{B}| - 1$, където $\mathcal{B}$ е произволна база на $\Sigma$. По-специално имаме $\dim\{P\} = 0$, за всяка точка $P \in \mathcal{P}$ и $\dim L = 1$ за всяка права $L \in \mathcal{L}$. Също така, ако $P \notin \mathcal{P}'$, то е изпълнено $\dim\langle \mathcal{P}' \cup \{P\} \rangle = \dim \mathcal{P}' + 1$. Удобно е да се приеме, че $\dim \varnothing = -1$.

Проективно пространство с размерност 2 се нарича *проективна равнина*. Проективните равнини се дефинират и аксиоматично като структура на инцидентност $(\mathcal{P}, \mathcal{L}, I)$, удовлетворяваща (P1), (P2) и следните две аксиоми:

(P4) В $\mathcal{P}$ съществуват четири точки, никои три от които не са колинеарни.

[1] По-нататък ще пишем $\langle \mathcal{M}_1, \ldots, \mathcal{M}_s \rangle$ вместо $\langle \cup_{i=1}^s \mathcal{M}_i \rangle$, както и $\langle P_1, \ldots, P_s \rangle$ вместо $\langle \{P_1, \ldots, P_s\} \rangle$.

(P5) Всеки две прави са инцидентни с точно една точка.

Проективните подпространства на $\Sigma = (\mathcal{P}, \mathcal{L}, I)$ с размерност $\dim \Sigma - 1$ и $\dim \Sigma - 2$ наричаме съответно *хиперравнини* и *хиперправи*.

Нека $\Sigma = (\mathcal{P}, \mathcal{L}, I)$ е проективно пространство, и нека $\mathcal{P}'$ и $\mathcal{P}''$ са подпространства на $\Sigma$. Тогава е в сила следната формула за размерностите

$$\dim\langle \mathcal{P}' \cup \mathcal{P}'' \rangle + \dim(\mathcal{P}' \cap \mathcal{P}'') = \dim \mathcal{P}' + \dim \mathcal{P}''. \tag{2.1}$$

Ще отбележим, че в общия случай (2.1) не се обобщава за сума на повече от две пространства. [2]

Нека $\Sigma = (\mathcal{P}, \mathcal{L}, I)$ е проективно пространство и нека $\widetilde{\mathcal{P}}$ и $\widetilde{\mathcal{L}}$ са съответно множествата на хиперравнините и хиперправите в $\Sigma$. Дефинираме $\widetilde{I} \subseteq \widetilde{\mathcal{P}} \times \widetilde{\mathcal{L}}$ за съответните подпространства по следния начин: $(H, F) \in \widetilde{I}$ точно тогава, когато $F \subset H$. Структурата $\widetilde{\Sigma} = (\widetilde{P}, \widetilde{L}, \widetilde{I})$ наричаме *дуално пространство* на $\Sigma$.

### 2.1.2 Проективни пространства над крайни полета.

Широк клас проективни пространства се получават като координатни геометрии над подходящи алгебрични структури. Нека $K$ е тяло и $V$ е $(r+1)$-мерно векторно пространство над $K$. За всяко подпространство $U \leq V$ означаваме с $U^*$ множеството $U^* = U \setminus \{\mathbf{0}\}$, където $\mathbf{0}$ е нулевият вектор. Нека $\mathcal{P}$ е множеството от всички едномерни подпространства на $V$:

$$\mathcal{P} = \{K^* \boldsymbol{v} \mid \boldsymbol{v} \in V^*\}$$

и да дефинираме изображението

$$\psi : \left\{ \begin{array}{ccc} V^* & \longrightarrow & \mathcal{P} \\ \boldsymbol{v} & \longrightarrow & K^* \boldsymbol{v} \end{array} \right. .$$

[2] Така например за три конкурентни прави в една равнина имаме

$$\begin{aligned} 2 = \dim\langle L_1, L_2, L_3 \rangle \quad \neq \quad & \dim L_1 + \dim L_2 + \dim L_3 \\ & - \dim(L_1 \cap L_2) - \dim(L_1 \cap L_3) - \dim(L_2 \cap L_3) + \dim(L_1 \cap L_2 \cap L_3) = 3. \end{aligned}$$

Принципът за включване и изключване за размерностите е в сила, когато за всеки $k$ от подпространствата $\mathcal{P}_1, \ldots, \mathcal{P}_n$ е в сила

$$\mathcal{P}_{i_1} \cap \langle \mathcal{P}_{i_2} \cup \ldots \cup \mathcal{P}_{i_k} \rangle = \langle (\mathcal{P}_{i_1} \cap \mathcal{P}_{i_2}) \cup \ldots \cup (\mathcal{P}_{i_1} \cap \mathcal{P}_{i_k}) \rangle.$$

Тогава за всяко двумерно подпространство $U \leq V$ дефинираме

$$\psi(U) = \{K^* \boldsymbol{v} \mid \boldsymbol{v} \in U^*\}$$

и задаваме $\mathcal{L}$ чрез

$$\mathcal{L} := \{\psi(U) \mid U \leq V, \dim U = 2\}.$$

Структурата на инцидентност $(\mathcal{P}, \mathcal{L}, I)$, където $I$ се задава с теоретико-множествено включване, $(P, L) \in I \Leftrightarrow P \subset L$, изпълнява аксиомите (P1)–(P3) и следователно е проективно пространство. Това пространство означаваме с $\mathrm{PG}(V, K)$. Ако $K = \mathbb{F}_q$, $q = p^h$, $h \geq 1$, и $V = \mathbb{F}_q^{r+1}$, то се нарича *$r$-мерна проективна геометрия* над $\mathbb{F}_q$ и се означава с $\mathrm{PG}(r, q)$.

Казваме, че векторът $\boldsymbol{u} \in V$ представя точката $K^* \boldsymbol{v}$ в хомогенни координати, ако $\boldsymbol{u} \in K^* \boldsymbol{v}$, т.е. $\boldsymbol{u} = a\boldsymbol{v}$ за някое $a \in K^*$.

За всяко $m = -1, 0, 1, \ldots, r$, $m$-мерно подпространство на $\mathrm{PG}(r, K)$ е множеството от точки, чиито представящи ги вектори заедно с $\mathbf{0}$ образуват $(m+1)$-мерно подпространство на $V$. Както по-горе, подпространства с размерност $0, 1, 2, r-2, r-1$ наричаме съответно *точки*, *прави*, *равнини*, *хиперправи* и *хиперравнини*. Подпространства с размерност $r-s$ ще наричаме подпространства с *коразмерност $s$*. Така хиперравнините и хиперправите са подпространства с коразмерност съответно 1 и 2.

Нека $\Sigma = (\mathcal{P}, \mathcal{L}, I)$ и $\Sigma' = (\mathcal{P}', \mathcal{L}', I')$ са проективни пространства. Една биекция

$$\kappa : \left\{ \begin{array}{rcl} \mathcal{P} \cup \mathcal{L} & \rightarrow & \mathcal{P}' \cup \mathcal{L}' \\ \mathcal{P} & \rightarrow & \mathcal{P}' \\ \mathcal{L} & \rightarrow & \mathcal{L}' \end{array} \right.$$

наричаме *колинеация* от $\Sigma$ в $\Sigma'$, ако запазва инцидентността, т.е.:

$$(P, L) \in I \Longleftrightarrow (\kappa(P), \kappa(L)) \in I'.$$

Колинеация на $\Sigma$ в себе се нарича *автоморфна колинеация* или *автоморфизъм* на $\Sigma$. Автоморфизмите на $\Sigma$ образуват група по отношение на операцията композиция на изображения.

Нека $V$ е векторно пространство над тялото $K$. Една биекция $\alpha : V \to V$ се нарича полулинейно изображение, ако

(1) $\alpha(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}) = \alpha(\boldsymbol{x}) + \alpha(\boldsymbol{y}), \;\; \forall \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in V$;

(2) $\alpha(a\boldsymbol{x}) = a^\sigma\alpha(\boldsymbol{x}),\ \ \forall a \in K, \forall \boldsymbol{x} \in V$ за някой автоморфизъм $\sigma \in \operatorname{Aut} K$.

Множеството от всички полулинейни изображения във $V$ е група по отношение на операцията композиция на изображения и се означава с $\Gamma\mathrm{L}(V, K)$. При $K = \mathbb{F}_q$ и $V = \mathbb{F}_q^{r+1}$ е прието тази група да се означава с $\Gamma\mathrm{L}(r+1, q)$. Подгрупата на $\Gamma\mathrm{L}(r+1, q)$, съдържаща всички линейни изображения, т.е. тези $\alpha \in \Gamma\mathrm{L}(V, K)$ , за които $\sigma = \mathrm{id}$, се означава с $\mathrm{GL}(V, K)$ или $\mathrm{GL}(r+1, q)$, когато $K = \mathbb{F}_q$ и $V = \mathbb{F}_q^{r+1}$.

Ясно е, че всяко полулинейно изображение във $V$ индуцира колинеация в геометрията $\mathrm{PG}(r, q)$. Тези колинеации образуват група, която се означава с $\mathrm{P\Gamma L}(r+1, q)$. Аналогично, групата от колинеации, породена от линейните изображения, се означава с $\mathrm{PGL}(r+1, q)$. Следната теорема, известна като първа основна теорема на проективната геометрия, гарантира, че всички колинеации на $\mathrm{PG}(r, q)$ се индуцират от полулинейните изображения на $V$.

**Теорема 2.1.** *(Първа основна теорема на проективната геометрия)*

(1) *Нека $V$ е векторно пространство над тяло $K$. Тогава всяко полулинейно изображение $\alpha \in \Gamma\mathrm{L}(V, K)$ поражда колинеация $\overline{\alpha}$ на $\mathrm{PG}(V, K)$, която се задава чрез*
$$\overline{\alpha}(K^*\boldsymbol{x}) = K^*\alpha(\boldsymbol{x}).$$

(2) *Нека $\dim V \geq 3$. Тогава за всяка колинеация $\kappa$ на $\mathrm{PG}(V, K)$ съществува полулинейно изображение $\alpha \in \Gamma\mathrm{L}(V, K)$, за което $\overline{\alpha} = \kappa$.*

Да отбележим, че ако полулинейните изображения $\alpha, \beta \in \Gamma\mathrm{L}(V, K)$ са със съответни автоморфизми на $K$ $\sigma_1$ и $\sigma_2$, т.е.

$$\alpha(a\boldsymbol{x}) = a^{\sigma_1}\boldsymbol{x},\ \ \beta(a\boldsymbol{x}) = a^{\sigma_2}\boldsymbol{x}.$$

и $\alpha$ и $\beta$ индуцират една и съща колинеация на $\mathrm{PG}(V, K)$, то съществува елемент $a \in K^*$, за който е изпълнено $\beta(\boldsymbol{x}) = \alpha(a\boldsymbol{x})$ за всяко $\boldsymbol{x} \in V$ и $b^{\sigma_2} = (aba^{-1})^{\sigma_1}$ за всяко $b \in K$.

Обратно, за всяко полулинейно изображение $\alpha \in \Gamma\mathrm{L}(V, K)$ и всяко $a \in K^*$ изображението
$$\beta : \begin{cases} V & \to & V \\ \boldsymbol{x} & \to & \alpha(a\boldsymbol{x}) \end{cases}$$

е полулинейно изображение такова, че $\overline{\alpha} = \overline{\beta}$. С други думи, $\alpha$ и $\beta$ индуцират една и съща колинеация в $\mathrm{PG}(V, K)$.

Втората основна теорема в проективната геометрия отразява факта, че всяка колинеация в $r$-мерната геометрия $\mathrm{PG}(V, K)$ се определя еднозначно от действието си върху $r+2$ точки в общо положение.

**Теорема 2.2.** *(Втора основна теорема на проективната геометрия) Нека $\Sigma = \mathrm{PG}(V, K)$ е $r$-мерно проективно пространство над тяло $K$. Нека $(P_1, P_2, \ldots, P_{r+2})$ и $(Q_1, Q_2, \ldots, Q_{r+2})$ са две редици от точки, такива, че кои да е $r+1$ точки от всяка от редиците образуват база на $\mathrm{PG}(V, K)$. Тогава съществува точно една колинеация $\kappa \in \mathrm{PGL}(V, K)$, за която*

$$P_i^{\kappa} = Q_i, \; i = 1, 2, \ldots, r+2.$$

Нека $\Sigma = \mathrm{PG}(V, K)$ е проективно $r$-мерно пространство и нека $H_\infty$ е фиксирана хиперравнина в $\Sigma$. Множеството от точки и прави извън $H_\infty$ с инцидентност наследена от $\mathrm{PG}(V, K)$ наричаме $r$-мерно *афинно подпространство* над $K$. Ако $K = \mathbb{F}_q$, афинното пространство означаваме с $\mathrm{AG}(r, q)$. Хиперравнината $H_\infty$ наричаме *безкрайна хиперравнина* на $\mathrm{PG}(r, q)$. Подпространствата на $\mathrm{AG}(V, K)$ са точно подпространствата на $\mathrm{PG}(V, K)$, несъдържащи се в $H_\infty$, от които са "изтрити" точките на $H_\infty$.

Структурата на едно афинно пространство не зависи от избора на хиперравнината $H_\infty$. Афинните пространства, получени след "изтриване" на различни хиперравнини в $\mathrm{PG}(r, q)$ са изоморфни, затова е коректно да говорим за $r$-мерната афинна геометрия $\mathrm{AG}(r, q)$. Обратно, всяко $r$-мерно афинно пространство над поле $K$ се влага по единствен начин в $r$-мерно проективно пространство над $K$.

Известно е, че при комбинаторни пресмятания в простанства над крайни полета съществено се използват така нараечените *гаусови коефициенти*, които се дефинират по следния начин. Нека $V = \mathbb{F}_q^n$. Броят на подпространствата на $V$ от фиксирана размерност $k$ се задава чрез:

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q := \frac{(q^n - 1)(q^{n-1} - 1) \ldots (q^{n-k+1} - 1)}{(q^k - 1)(q^{k-1} - 1) \ldots (q - 1)}. \tag{2.2}$$

С тяхна помощ лесно се изразява броят на подпространствата с дадена размерност в $\mathrm{PG}(r, q)$.

**Теорема 2.3.** *Броят на $s$-мерните подпространства на* $\mathrm{PG}(r,q)$*, съдържащи фиксирано $t$-мерно подпространство, където $0 \le t \le s \le r$, е равен на е* $\begin{bmatrix} r-t \\ s-t \end{bmatrix}_q$*. В частност, броят на всички $s$-мерни подпространства на* $\mathrm{PG}(r,q)$ *е равен на* $\begin{bmatrix} r+1 \\ s+1 \end{bmatrix}_q$.

### 2.1.3 Мултимножества от точки

Нека $\Sigma = \mathrm{PG}(r,q)$ е $r$-мерната проективна геометрия над $\mathbb{F}_q$, $r \ge 2$, и нека $\mathcal{P}$ е множеството от точки на $\Sigma$. *Мултимножество* в $\Sigma$ наричаме всяко изображение

$$\mathcal{K} : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathcal{P} & \to & \mathbb{N}_0 \\ P & \to & \mathcal{K}(P) \end{array} \right. ,$$

което на всяка точка $P \in \Sigma$ съпоставя цяло неотрицателно число $\mathcal{K}(P)$ наречено *кратност* на $P$. Това изображение се продължава по естествен начин върху подмножествата от точки $\mathcal{Q} \subseteq \mathcal{P}$:

$$\mathcal{K}(\mathcal{Q}) = \sum_{P \in \mathcal{Q}} \mathcal{K}(P).$$

Цялото неотрицателно число $\mathcal{K}(\mathcal{Q})$ наричаме *кратност* на $\mathcal{Q}$. В частност точките, правите, равнините,..., хиперравнините с кратност $i$ наричаме съответно $i$-точки, $i$-прави, $i$-равнини, ..., $i$-хиперравнини. Кратността $\mathcal{K}(\mathcal{P})$ на мултимножеството $\mathcal{K}$ наричаме негова *мощност. Носител* $\operatorname{Supp}\mathcal{K}$ на $\mathcal{K}$ е множеството от всички точки с положителна кратност:

$$\operatorname{Supp}\mathcal{K} = \{P \mid P \in \mathcal{P},\ \mathcal{K}(P) > 0\}.$$

Едно мултимножество $\mathcal{K}$ наричаме *неизродено*, ако $\langle \operatorname{Supp}\mathcal{K} \rangle = \Sigma$. Едно мултимножество $\mathcal{K}$ наричаме *проективно*, ако всяка точка $P \in \mathcal{P}$ е с кратност $\mathcal{K}(P) = 0$ или $\mathcal{K}(P) = 1$. Всяко проективно мултимножество може да се разглежда като множество като се идентифицира с носителя си. За всяко множество $\mathcal{Q}$ дефинираме негова *характеристична функция* чрез

$$\chi_{\mathcal{Q}}(P) := \left\{ \begin{array}{ll} 1, & \text{ако } P \in \mathcal{Q}, \\ 0, & \text{ако } P \notin \mathcal{Q}. \end{array} \right.$$

Две мултимножества $\mathcal{K}$ и $\mathcal{K}'$ в $\mathrm{PG}(r,q)$ наричаме *изоморфни* или *проективно еквивалентни*, ако съществува колинеация $\kappa \in \mathrm{P\Gamma L}(r+1,q)$, за която

$$\mathcal{K}(P) = \mathcal{K}'(P^{\kappa})$$

за всяка точка $P \in \mathcal{P}$.

Нека $\mathcal{K}$ е мултимножество в $\Sigma$. Означаваме с $a_i$, $i = 0, 1, 2\ldots$, броя на хиперравнините в $\Sigma$ с кратност $i$. Числата $a_i$ наричаме числа на пресичане, а редицата $(a_i)_{i\geq 0}$ – *спектър* на $\mathcal{K}$.

Едно мултимножество $\mathcal{K}$ може да бъде интерпретирано като арка или като блокиращо множество в зависимост от това дали поставяме горна или долна граница за кратността на хиперравнините. Мултимножеството $\mathcal{K}$ в $\Sigma$ наричаме $(n,w)$-*арка*, ако:

(a) мощността на $\mathcal{K}$ е $\mathcal{K}(\mathcal{P}) = n$;

(b) всяка хиперравнина $H$ е с кратност $\mathcal{K}(H) \leq w$;

(c) съществува хиперравнина $H_0$ с кратност $\mathcal{K}(H_0) = w$ .

От друга страна, едно мултимножество $\mathcal{K}$ в $\Sigma$ наричаме $(n,w)$-*блокиращо множество*, ако:

(a) мощността на $\mathcal{K}$ е $\mathcal{K}(\mathcal{P}) = n$;

(b) всяка хиперравнина $H$ е с кратност $\mathcal{K}(H) \geq w$;

(c) съществува хиперравнина $H_0$ с кратност $\mathcal{K}(H_0) = w$ .

Нека $\mathcal{K}$ е $(n,w)$-арка в $\mathrm{PG}(r,q)$. Да означим с $\lambda_i$ броя на точките от $\mathrm{PG}(r,q)$, имащи кратност $i$. Тогава са в сила следните равенства:

$$\sum_{i=0}^{w} a_i = \frac{q^{r+1}-1}{q-1}, \tag{2.3}$$

$$\sum_{i=1}^{w} i a_i = n \cdot \frac{q^{r}-1}{q-1}, \tag{2.4}$$

$$\sum_{i=2}^{w} \binom{i}{2} a_i = \binom{n}{2}\frac{q^{r-1}-1}{q-1} + q^{r-1} \cdot \sum_{j\geq 2} \binom{j}{2}\lambda_j. \tag{2.5}$$

Оттук лесно следва:

$$\sum_{i=0}^{w-2}\binom{w-i}{2}a_i=\binom{w}{2}\frac{q^{r+1}-1}{q-1}-n(w-1)\frac{q^r-1}{q-1}+\binom{n}{2}\frac{q^{r-1}-1}{q-1}+q^{r-1}\sum_{j\geq 2}\binom{j}{2}\lambda_j. \tag{2.6}$$

При проективните арки последното събираемо вдясно е равно на нула.

Нека $\mathcal{K}$ е мултимножество от точки в $\Sigma$. С $w_i(\mathcal{K})$ ще означаваме максималната кратност на $i$-мерно подпространство в $\Sigma$, т.е.

$$w_i(\mathcal{K})=\max_{\delta}\mathcal{K}(\delta),$$

където $\delta$ пробягва всички $i$-мерни подпространства на $\Sigma$. За $(n,w)$-арка имаме по дефиниция $w_r=n$ и $w_{r-1}=w$. За числата $w_i$ се изпълняват следните неравенства.

**Теорема 2.4.** *Нека $\mathcal{K}$ е неизродена $(n,w)$-арка в $\Sigma=\mathrm{PG}(r,q)$. Тогава са в сила неравенствата*

$$0<w_0<w_1<\cdots<w_{r-1}<w_r=n.$$

Наредената $r+1$-орка $(w_0,w_1,\ldots,w_r)$ наричаме *йерархия на кратностите* на $\mathcal{K}$.

Нека $S$ е $(u-1)$-мерно подпространство в $\Sigma$. Тогава $\chi_S$ е блокиращо множество в $\Sigma$ с параметри $(n,w)$, където

$$n=\begin{bmatrix}u\\1\end{bmatrix}_q=\frac{q^u-1}{q-1},\quad w=\begin{bmatrix}u-1\\1\end{bmatrix}_q=\frac{q^{u-1}-1}{q-1}.$$

Една $(n,w)$-арка $\mathcal{K}$ в $\Sigma$ наричаме *$t$-разширима*, ако съществува $(n+t,w)$-арка $\mathcal{K}'$ в $\Sigma$, такава че за всяка точка $P\in\mathcal{P}$ е изпълнено $\mathcal{K}'(P)\geq\mathcal{K}(P)$. С други думи $\mathcal{K}$ е $t$-разширима, ако можем да увеличим кратностите на някои точки сумарно с $t$, така че да запазим максималната кратност на хиперравнините (по отношение на $\mathcal{K}$). Арки, които са 1-разширими, наричаме просто *разширими*. По аналогия, едно $(n,w)$-блокиращо множество $\mathcal{K}$ в $\Sigma$ наричаме *$t$-съкратимо*, ако съществува $(n-t,w)$-блокиращо множество $\mathcal{K}'$, такова че за всяка точка $P\in\mathcal{P}$ е изпълнено $\mathcal{K}'(P)\leq\mathcal{K}(P)$. Както и по-горе 1-съкратимите блокиращи множества наричаме просто *съкратими*.

Нека $\mathcal{K}$ е $(n,w)$-арка в $\Sigma$ със спектър $(a_i)_{i\geq 0}$. Ако съществува такова цяло число $\Delta > 1$, че $a_i = 0$ за всяко $i \not\equiv n \pmod{\Delta}$, ще казваме, че $\mathcal{K}$ има *делител* $\Delta$. Самата арка ще наричаме *арка с делимост*. Нека $\mathcal{K}$ е $(n,w)$-арка в $\Sigma$ със спектър $(a_i)_{i\geq 0}$ и $w \equiv n+t \pmod{\Delta}$, $1 \leq t < \Delta$. Казваме, че $\mathcal{K}$ притежава свойството $t$-*квазиделимост* с делител $\Delta$, ако $a_i = 0$, за всяко $i \not\equiv n, n+1, \ldots, n+t \pmod{\Delta}$.

### 2.1.4 Конструкции на мултимножества

В този раздел представяме някои общи конструкции на мултимножества в $\mathrm{PG}(r,q)$.

**A. Сума на мултимножества.**

Нека $\mathcal{K}'$ и $\mathcal{K}''$ са арки в $\Sigma = \mathrm{PG}(r,q)$ с параметри съответно $(n',w')$ и $(n'',w'')$. Нека $a,b \in \mathbb{Q}$ са рационални числа, $(a,b) \neq (0,0)$, такива че за всяка точка $P$ от $\Sigma$, $a\mathcal{K}'(P) + b\mathcal{K}''(P)$ е неотрицателно цяло число. Тогава арката $\mathcal{K} = a\mathcal{K}' + b\mathcal{K}''$ има параметри $(n,w)$, където $n = an' + bn''$ и $w \leq aw' + bw''$. Следните случаи представляват специален интерес:

- $\mathcal{K} = a\mathcal{K}'$ – арка, кратна на дадена арка $\mathcal{K}'$;
- $\mathcal{K} = b\chi_{\mathcal{P}} - \mathcal{K}'$, където $b = \max_{P\in\mathcal{P}} \mathcal{K}'(P)$; обикновено $\mathcal{K}'$ е блокиращо множество с подходящи параметри. В този случай параметрите на арката $\mathcal{K}$ се определят еднозначно от параметрите на $\mathcal{K}'$.

Важен случай на арка, конструирана като сума на мултимножества е следният. Нека $S_i$, $i = 1,\ldots,h$, са подпространства на $\mathrm{PG}(r,q)$, за които $\dim S_i = \lambda_i$. Тогава мултимножеството $\mathcal{F} = \sum_{i=1}^{h} \chi_{S_i}$ е блокиращо множество с параметри

$$\left(\sum_{i=1}^{h} \frac{q^{\lambda_i+1}-1}{q-1}, \sum_{i=1}^{h} \frac{q^{\lambda_i}-1}{q-1}\right).$$

Ако $s = \max_{P\in\mathcal{P}} \sum_{i=1}^{h} \chi_{S_i}(P)$, то мултимножеството $\mathcal{K} = s\chi_{\mathcal{P}} - \mathcal{F}$ е арка с параметри

$$\left(s\frac{q^{r+1}-1}{q-1} - \sum_{i=1}^{h} \frac{q^{\lambda_i+1}-1}{q-1}, s\frac{q^{r}-1}{q-1} - \sum_{i=1}^{h} \frac{q^{\lambda_i}-1}{q-1}\right).$$

**B. Ограничение върху подпространство**

Нека $\mathcal{K}$ е $(n,w)$-арка в $\mathrm{PG}(r,q)$ и нека $U$ е $u$-мерно подпространство в $\mathrm{PG}(r,q)$. Ограничението на $\mathcal{K}$ върху $U$ се дефинира чрез

$$\mathcal{K}|_U : \left\{ \begin{array}{ccc} U & \to & \mathbb{N}_0 \\ P & \to & \mathcal{K}(P) \end{array} \right. .$$

Тогава $\mathcal{K}|_U$ е $(n',w')$-арка в $U \cong \mathrm{PG}(u,q)$, където $n' = \mathcal{K}(U)$. За стойността на $w'$ в общия случай може да се даде само граница.

**C. Проектиране върху подпространство.**

Нека $\mathcal{K}$ е $(n,w)$-арка в $\mathrm{PG}(r,q)$. Нека $U$ и $V$ са две непресичащи се подпространства в $\mathrm{PG}(r,q)$ с допълващи се размерности, $\dim U + \dim V = r-1$, $U \cap V = \emptyset$. Дефинираме проекцията $\varphi = \varphi_{U,V}$ като изображение от точките на $\mathrm{PG}(r,q) \setminus U$ върху точките на $V$ чрез:

$$\varphi_{U,V} : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathcal{P} \setminus U & \to & V \\ P & \to & V \cap \langle U, P \rangle \end{array} \right. .$$

Нека $\dim U = u$ и $\dim V = v$. Тогава $\varphi_{U,V}$ изобразява $(u+s)$-мерните подпространства, съдържащи $U$ в $(s-1)$-мерни подпространства на $V$. За точките на $V$ дефинираме арката $\mathcal{K}^\varphi$, която наричаме *арка, индуцирана* от $\varphi$:

$$\mathcal{K}^\varphi : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathcal{P} \cap V & \to & \mathbb{N}_0 \\ P & \to & \sum_{Q:\varphi_{U,V}(Q)=P} \mathcal{K}(Q). \end{array} \right. .$$

Ако $S$ е подпространство във $V$, то $\mathcal{K}^\varphi(S) = \mathcal{K}(\langle S, U \rangle) - \mathcal{K}(U)$. Следователно $\mathcal{K}$ е $(n - \mathcal{K}(U), w' - \mathcal{K}(U))$-арка във $V \cong \mathrm{PG}(v,q)$, където $w' \leq w$, е максималната мощност на хиперравнина, съдържаща $U$. Аналогично, ако $\mathcal{K}$ е $(n,w)$-блокиращо множество, то $\mathcal{K}^\varphi$ е $(n - \mathcal{K}(U), w' - \mathcal{K}(U))$-блокиращо множество, където $w' \geq w$ е минималната мощност на хиперравнина през $U$.

Най-често срещаният случай в изложението по-нататък е този, в който подпространството $V$ е избрано да бъде равнина, т.е. $\dim V = 2$. Подпространството $U$ е точка в тримерния случай, права - в четиримерния и т.н. Образът на всяка хиперравнина през $U$ е права. Нека $L$ е права в равнината на проектиране $V$ и $P_0, P_1, \ldots, P_q$ са точките инцидентни с

$L$. Наредената $(q+1)$-орка $(\mathcal{K}^{\varphi}(P_0), \mathcal{K}^{\varphi}(P_1), \ldots, \mathcal{K}^{\varphi}(P_q))$ наричаме *тип на правата* $L$ при проекцията $\varphi = \varphi_{U,V}$.

**D. Дуална конструкция.**

Тази конструкция е обобщение на класически конструкции за случая, когато са допустими кратни точки. Тя е описана от A. Brouwer и M. van Eupen [30] за линейни кодове и е формулирана за арки от S. Dodunekov и J. Simonis [56] (вж. също [133]). Нека $\mathcal{K}$ е $(n,w)$-арка в $\mathrm{PG}(r,q)$ и нека $W = \{\mathcal{K}(H) \mid H \in \mathcal{H}\}$, където $\mathcal{H}$ е множеството на всички хиперравнини в $\mathrm{PG}(r,q)$. Нека $\sigma : W \to \mathbb{N}_0$ е произволно изображение. Арката

$$\mathcal{K}^{\sigma} : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathcal{H} & \to & \mathbb{N}_0 \\ H & \to & \sigma(\mathcal{K}(H)) \end{array} \right. .$$

наричаме *σ-дуална* арка на $\mathcal{K}$. Нека $(a_i)_{i\geq 0}$ е спектърът на $\mathcal{K}$. Параметрите на $\mathcal{K}^{\sigma}$ са $(n', w')$, където

$$n' = \sum_{i\in W} \sigma(i) a_i, \quad w' = \max_P \mathcal{K}^{\sigma}(P) = \max_P \sum_{P:P\in H} \mathcal{K}^{\sigma}(H).$$

В случая, когато $\sigma(x) = \alpha x + \beta$, $\alpha, \beta \in \mathbb{Q}$ и $\sigma(x)$ приема само цели неотрицателни стойности за $x \in W$ параметрите на $\sigma$-дуалната на $\mathcal{K}$ арка могат да бъдат пресметнати.

**Теорема 2.5.** *Нека $\mathcal{K}$ е $(n,w)$-арка в $\mathrm{PG}(r,q)$ и нека $\sigma = \alpha x + \beta$. Тогава $\mathcal{K}^{\sigma}$ е с параметри*

$$\begin{aligned} n' &= \alpha n \frac{q^r - 1}{q-1} + \beta \frac{q^{r+1}-1}{q-1}, \\ w' &= \max_P \left( \alpha \left( n \frac{q^{r-1}-1}{q-1} + q^{r+1} \mathcal{K}(P) \right) + \beta \frac{q^r - 1}{q-1} \right). \end{aligned}$$

*където максимумът е по всички точки $P$ на $\mathrm{PG}(r,q)$.*

## 2.2 Класове от арки и блокиращи множества

В този раздел описваме някои класически резултати за множества от точки в крайни проективни геометрии, които ще използваме в по-нататъшното изложение.

**$k$-арки в** $\mathrm{PG}(r,q)$**.**

*$k$-арка* в $\mathrm{PG}(2,q)$ наричаме множество от $k$ точки, никои три от които не са колинеарни. Максималният брой точки в една $k$-арка означаваме с $m(2,q)$. Ясно е, че $m(2,q) \le q+2$. Множество от точки в $\mathrm{PG}(2,q)$, проективно еквивалентно на $\mathcal{P}_2 = \{(x,y,z) \mid x,y,z \in \mathbb{F}_q, x^2+yz=0\}$, се нарича *коника*. Лесно се проверява, че $\mathcal{P}_2$ е $(q+1)$-арка [106]. Права, пресичаща к-арка в точно $i$ точки, се нарича *$i$-секанта*. По-специално, 0- и 1-секантите наричаме съответно *външни прави* и *тангенти*. При четно $q$, всички тангенти към $(q+1)$-арка са конкурентни. Общата им точка се нарича *нуклеус* на арката. Следователно всяка $(q+1)$-арка при $q$ четно може да бъде допълнена по единствен начин до $(q+2)$-арка чрез добавяне на нуклеуса. За нечетно $q$ всяка точка извън $(q+1)$-арка лежи на точно две тангенти или на нито една тангента. Точки от първия тип наричаме *външни*, а от втория – *вътрешни*. Следната теорема определя точната стойност на $m(2,q)$:

**Теорема 2.6.** *[23, 162]*

$$m(2,q) = \begin{cases} q+1 & \text{за } q \text{ нечетно,} \\ q+2 & \text{за } q \text{ четно.} \end{cases}$$

Обикновено равнинните $(q+1)$-арки се наричат *овали*, а равнинните $(q+2)$-арки –*хиперовали*. Всяка коника е овал за нечетно $q$, а коника плюс нуклеуса е хиперовал за четно $q$. Такъв хиперовал се нарича *регулярен*. Фундаментален проблем е класификацията на всички овали за нечетно $q$ и на всички хиперовали за четно $q$. Следната класическа теорема на B. Segre решава този проблем за нечетни $q$:

**Теорема 2.7.** *[166, 167] При $q$ нечетно, всеки овал е коника.*

При $q = 2^h, h \ge 4$, съществуват хиперовали, които не са регулярни (наричаме ги *нерегулярни*). Въпреки че са известни няколко безкрайни класове от нерегулярни хиперовали, проблемът за класифицирането им изглежда извънредно труден. Известна е характеризация на хиперовалите, която свързва съществуването им със съществуването на полиноми със специални свойства.

**Теорема 2.8.** *[106, 171] Нека $F \in \mathbb{F}_q[T]$, $q > 2$ четно, е полином, за който $F(0)=0$, $F(1)=1$. Множеството*

$$\mathcal{O}_F = \{P(F(t),t,1) \mid t \in \mathbb{F}'_q\} \cup \{U_1(0,1,0)\},$$

*където* $\mathbb{F}'_q = \mathbb{F}_q \cup \{\infty\}$, *е хиперовал в* $\mathrm{PG}(2,q)$, *съдържащ точките* $U_0(1,0,0)$, $U_1(0,1,0)$, $U_2(0,0,1)$, $U(1,1,1)$ *точно тогава, когато*

*(i)* $F$ *е пермутационен полином над* $\mathbb{F}_q$*;*

*(ii) полиномът* $F_s$*, дефиниран чрез*

$$F_s(T) = \frac{F(T+s)+F(T)}{T}.$$

*е пермутационен полином за всяко* $s \in \mathbb{F}_q$*, удовлетворяващ* $F_s(0) = 0$*.*

Известни са няколко класа от нерегулярни хиперовали, но въпросът за пълното им характеризиране е далеч от решение [40, 160, 169, 172, 173].

**Дефиниция 2.9.** Едно множество, съдържащо $k$ точки от $\mathrm{PG}(r,q)$, наричаме *$k$-арка*, ако никои $r+1$ от точките му не лежат в една хиперравнина, но съществува хиперравнина с $r$ точки. Еквивалентно, едно множество от $k$ точки от $\mathrm{PG}(r,q)$ е $k$-арка, ако кои да са $r+1$ от тях образуват база на $\mathrm{PG}(r,q)$.

Ще отбележим, че $k$-арките са еквивалентни на линейни кодове, лежащи на границата на Singleton, т.е. на MDS-кодове (вж. раздел 2.3). *Нормална рационална крива* наричаме множеството от точки в $\mathrm{PG}(r,q)$, $1 \le r \le q-2$, проективно еквивалентно на $\big\{(1,t,\ldots,t^{r-1},t^r) \quad | \quad t \in \mathbb{F}_q\big\} \cup \big\{(0,0,\ldots,0,1)\big\}$. Всяка нормална рационална крива е $(q+1)$-арка в $\mathrm{PG}(r,q)$.

Както по-горе, нека $m(r,q)$ означава максималната мощност на $k$-арка в $\mathrm{PG}(r,q)$. Интерес представлява следният проблем, поставен от B. Segre в [168]:

*При зададени* $r$ *и* $q$*, да се определи максималната стойност* $m(r,q)$ *на* $k$*, за която съществува* $k$*-арка в* $\mathrm{PG}(r,q)$*?*

Изследванията върху тази задача са инициирани от K. A. Bush и B. Segre. K. Bush [35] доказва, че за всяко $q$, степен на просто число, и за всяко цяло число $r \ge q-1$, $m(r,q) = r+2$. Всяка арка с такава мощност е еквивалентна на

$$\big\{(1,0,\ldots,0),(0,1,\ldots,0),\ldots,(0,\ldots,0,1),(1,1,\ldots,1)\big\}.$$

B. Segre доказва, че $m(r,q) = q+1$ за $r = 2,3,4$ и $q$ нечетно [168]. Освен това той показва, че за $r = 3$ всяка $(q+1)$-арка е нормална рационална крива. Аналогичен резултат съществува и за $q$ четно: $m(r,q) = q+1$ за $r = 3,4$ [36]. Класификацията на $(q+1)$-арките в $\mathrm{PG}(3,q)$, $q = 2^h$, дължим на L. Casse и D. Glynn [37]. Те доказаха, че такава арка е еквивалентна на множеството $\{(1,t,t^e,t^{e+1}) \mid t \in \mathbb{F}_q\} \cup \{(0,0,0,1)\}$, където $e = 2^m$ и $(m,h) = 1$.

J. Thas [184] доказа, че $m(q-3,q) = m(q-4,q) = q+1$ за всяко $q$ степен на просто число, $m(q-2,q) = q+1$ за $q$ нечетно, и $m(q-2,q) = q+2$ за $q$ четно. Характеризация на $(q+2)$-арките в $\mathrm{PG}(q-2,q)$ бе извършена от L. Storme и J. Thas [180]. Всички известни до момента резултати за горната задача подкрепят следната хипотеза (вж. [33, 34, 38, 65, 107, 112, 153, 179, 184, 185]:

*За всички $r \geq 2$, $q$ нечетно, и за $r \neq 2, q-2$, $q$ четно, $m(r,q) = q+1$.*

Тази хипотеза допуска естествена формулировка в термините на линейни кодове и е известна като MDS-хипотеза за линейни кодове. Забележителен напредък бе постигнат от S. Ball, който доказа тази хипотеза в случая на просто поле [3, 10].

**$(n,w)$-арки в $\mathrm{PG}(2,q)$**

Да припомним, че едно множеството $\mathcal{K}$ от $n$ точки в $\mathrm{PG}(2,q)$ наричаме *$(n,w)$-арка*, ако никои $w+1$ от тях не са колинеарни, но съществува права, съдържаща $w$ точки от $\mathcal{K}$.

С $m_w(2,q)$ ще означаваме максималния брой точки, съдържащи се в $(n,w)$-арка в $\mathrm{PG}(2,q)$. Основната задача за $(n,w)$-арки е следната:

*При зададени $w$ и $q$, да се определи максималната стойност $m_w(2,q)$ за $n$, за която съществува $(n,w)$-арка в $\mathrm{PG}(2,q)$.*

Тази задача е еквивалентна на задачата за намиране на минималната дължина $n_q(3,d)$ на проективен линеен код с размерност 3 и минимално разстояние $d$.

Една горна граница за $m_w(2,q)$ е формулирана в Теорема 2.10.

**Теорема 2.10.** *Нека $\mathcal{K}$ е $(n,w)$-арка и да допуснем, че съществува $m$-секанта към $\mathcal{K}$, за някое цяло $m \neq 0$. Тогава $n \leq (w-1)q+m$. По специално, $m_w(2,q) \leq (w-1)q+w$.*

Арки, достигащи границата от Теорема 2.10, се наричат *максимални.*

Ясно е, че за $w = q$ и $w = q + 1$ максимални арки се получават тривиално за всяко $q$ като множествата от точки съответно на $\mathrm{AG}(2, q)$ и $\mathrm{PG}(2, q)$. Следователно е смислено да разглеждаме максимални арки, за които $2 \leq w \leq q - 1$. Пример за максимални арки с $w = 2$ са хипероралите в равнините от четен ред. Следният резултат от [41] (вж. също [106]) дава необходимо условие за съществуване на максимални арки.

**Теорема 2.11.** *Ако $\mathcal{K}$ е $((w-1)q + w, w)$-арка в $\mathrm{PG}(2, q)$, то $w$ дели $q$ и дуалната на допълнението на $\mathcal{K}$ образува $\left(\frac{q(q+1-w)}{w}, \frac{q}{w}\right)$-арка, която е отново максимална арка.*

**Теорема 2.12.** *Една $(n, w)$-арка $\mathcal{K}$ е максимална точно тогава, когато всяка права в $\mathrm{PG}(2, q)$ е 0-секанта или $w$-секанта към $\mathcal{K}$.*

Всяка $(n, w)$-арка с $(w-1)q + w - 1$ точки е непълна и може да бъде разширена до максимална арка чрез добавяне на пресечната точка на всички $(w-1)$-секанти [12, 106] (вж. също и Теорема 2.32). Известно е, че максимални $(n, w)$-арки съществуват за $q = 2^h$ за всяко $w$ делящо $q$. Конструкции на максимални арки са предложени от R. Denniston[45], J. Thas [186, 188] и R. Mathon [155]. J.Thas [187] доказа, че не съществуват максимални арки в полета с характеристика 3. Неотдавна S. Ball, A. Blokhuis и F. Mazzocca [7, 9] доказаха, че не съществуват максимални арки в равнини от нечетен прост ред.

**Теорема 2.13.** *[7][9] Нека $q$ е степен на нечетно просто число, а $w$ е естествено число с $1 < w < q$. Не съществуват максимални $(wq - q + w, w)$-арки в равнината $\mathrm{PG}(2, q)$.*

Точните стойности на $m_w(2, q)$ за $q \leq 9$ са известни за всички $w$ (вж. напр. [6] или [110]). В таблицата по-долу са представени тези стойности за $q \leq 13$. В случаите, в които точни стойности не са известни, представяме долни и горни граници. Голяма част от резултатите са получени с помощта на компютър. Детайли върху долните и горните граници от таблицата могат да бъдат намерени в [6, 106, 110].

| $q$ / $w$ | 3 | 4 | 5 | 7 | 8 | 9 | 11 | 13 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 2 | 4 | 6 | 6 | 8 | 10 | 10 | 12 | 14 |
| 3 | | 9 | 11 | 15 | 15 | 17 | 21 | 23 |
| 4 | | | 16 | 22 | 28 | 28 | 32 | 38–40 |
| 5 | | | | 29 | 33 | 37 | 43–45 | 49–53 |
| 6 | | | | 36 | 42 | 48 | 56 | 64–66 |
| 7 | | | | | 49 | 55 | 67 | 79 |
| 8 | | | | | | 65 | 78 | 92 |
| 9 | | | | | | | 89–90 | 105 |
| 10 | | | | | | | 100–102 | 118–119 |
| 11 | | | | | | | | 132–133 |
| 12 | | | | | | | | 145–147 |

По-долу ще опишем пълните $(n, 3)$-арки в PG$(2, 4)$, които използваме многократно по-нататък. С точност до еквивалентност съществуват четири пълни $(\kappa, 3)$-арки. Една от тях съдържа седем точки и не е оптимална. Тя се състои от точките на подравнина на Baer, съдържаща се в PG$(2, 4)$.[3] Останалите три арки са с максималния възможен брой точки [106]. Краткото им описание е представено по-долу.

($\mathcal{A}1$) Множеството от всички точки $(x_1, x_2, x_3)$, удовлетворяващи уравнението $x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 = 0$. Тази арка се състои от точките на *ермитова крива.* [4]

($\mathcal{A}2$) Допълнението на обединението на коника и две от тангентите ѝ.

($\mathcal{A}3$) Допълнението на три неконкурентни прави.

Числата на пресичане за тези арки са представени в следната таблица:

[3] Равнина на Baer за проективната равнина Π от ред $q$, където $q$ е точен квадрат, е множество от $q + \sqrt{q} + 1$ точки и $q + \sqrt{q} + 1$ прави, образуващи проективна равнина от ред $\sqrt{q}$.

[4] По-общо, ермитова крива в равнина от ред $q$, $q$ четна степен на просто число, е множеството от точки с хомогенни координати $(x_1, x_2, x_3)$, удовлетворяващи $x_1^{\sqrt{q}+1} + x_2^{\sqrt{q}+1} + x_3^{\sqrt{q}+1} = 0$.

| | $a_0$ | $a_1$ | $a_2$ | $a_3$ |
|---|---|---|---|---|
| $(\mathcal{A}1)$ | 0 | 9 | 0 | 12 |
| $(\mathcal{A}2)$ | 2 | 3 | 6 | 10 |
| $(\mathcal{A}3)$ | 3 | 0 | 9 | 9 |

Нека $\mathcal{K}$ е (9,3)-арка и нека $P$ е точка извън $\mathcal{K}$. Да означим с $\rho_i$, $i = 0, 1, 2, 3$, броя на правите през $P$, пресичащи $\mathcal{K}$ в точно $i$-точки. За числата $\rho_i$ имаме следните възможности:

| | $\rho_0$ | $\rho_1$ | $\rho_2$ | $\rho_3$ | брой точки от този тип |
|---|---|---|---|---|---|
| $(\mathcal{A}1)$ | 0 | 3 | 0 | 2 | 12 |
| $(\mathcal{A}2)$ | 2 | 0 | 0 | 3 | 1 |
| | 1 | 1 | 1 | 2 | 6 |
| | 1 | 0 | 3 | 1 | 2 |
| | 0 | 2 | 2 | 1 | 3 |
| $(\mathcal{A}3)$ | 2 | 0 | 0 | 3 | 3 |
| | 1 | 0 | 3 | 1 | 9 |

### $n$-шапки в $\mathrm{PG}(r, q)$

**Дефиниция 2.14.** Едно множество от $n$ точки в $\mathrm{PG}(r, q)$, $r \geq 3$, наричаме *$n$-шапка*, ако никои три негови точки не са колинеарни. Една $n$-шапка е *пълна*, ако не се съдържа в $(n + 1)$-шапка.

По-нататък от изложението става ясно, че $n$-шапките в $\mathrm{PG}(k - 1, q)$ са еквивалентни на проективни $[n, k]_q$ кодове $C$ с $d(C^\perp) \geq 4$.

С $\mu(r, q)$ означаваме максималната стойност на $n$, за която съществува $n$-шапка в $\mathrm{PG}(r, q)$. Интересът в изследванията от последните години е съсредоточен главно върху следната задача:

*При зададени цяло число $r \geq 3$ и степен на просто число $q = p^h$, да се определи стойността на $\mu(r, q)$.*

Ще отбележим, че аналогична задача може да бъде поставена и за максималната стойност на шапка в $\mathrm{AG}(r, q)$, която ще означаваме с $\mu'(r, q)$.

Тези задачи са разглеждани за първи път от R. Bose [23] и B. Qvist [162]. B. Segre [170] доказа, че $\mu(r, 2) = 2^r$ и $2^r$-шапка в $\mathrm{PG}(r, 2)$ е допълнение на хиперравнина.

Елиптична квадрика в $\mathrm{PG}(3,q)$ е множеството от точки

$$\{(x_0,x_1,x_2,x_3) \mid f(x_0,x_1)+x_2x_3=0\},$$

където $f(x_0,x_1)$ е неразложима квадратична форма над $\mathbb{F}_q$. Всяка елиптична квадрика в $\mathrm{PG}(3,q)$ съдържа $q^2+1$ точки, никои три от които не са колинеарни, и следователно е $(q^2+1)$-шапка. Афинната част на $(q^2+1)$-шапка в $\mathrm{PG}(3,q)$ е $q^2$-шапка в $\mathrm{AG}(3,q)$ и е максимална. В случая, когато характеристиката е 2, съществува и друго семейство от $(q^2+1)$-шапки в $\mathrm{PG}(3,q)$, $q=2^{2m+1}$, т.нар. овоиди на Tits [191] (вж. също [61, 158]).

Известно е, че от съществуването на $n$-шапка в $\mathrm{PG}(r,q)$ следва съществуването на $2n$-шапка в $\mathrm{AG}(r+1,q)$ (вж [20, 157]). Така от съществуването на 10-шапки в $\mathrm{PG}(3,3)$ следва съществуването на 20-шапки в $\mathrm{AG}(4,3)$ и $\mathrm{PG}(4,3)$. Доказателство на факта, че не съществуват по-големи шапки, е на G. Pellegrino и се съдържа в [159]. R. Hill доказа в [97], че съществуват девет нееквивалентни 20-шапки в $\mathrm{PG}(4,3)$.

56-шапка в $\mathrm{PG}(5,3)$ бе конструирана от R. Hill [94, 95]. Той доказа и единствеността на тази шапка [95]. Афинната част на шапката на Hill е максимална 45-шапка в $\mathrm{AG}(5,3)$ [58]. Конструкцията на A. Mukhopadhyay [157], приложена към шапката на Hill дава 112-шапка в $\mathrm{AG}(6,3)$ (и в $\mathrm{PG}(6,3)$). A. Potechin [161] показа, че тези шапки са максимални. 41-шапка в $\mathrm{PG}(4,4)$ бе конструирана от G. Tallini [183]; несъществуването на по-големи шапки в $\mathrm{PG}(4,4)$ бе доказано наскоро от Y. Edel и J. Bierbrauer [57].

Така към настоящия момент точната стойност на $\mu(r,q)$ е известна в следните случаи:

$$\mu(r,2) = 2^r \text{ [23]},$$

$$\mu(3,q) = q^2+1, \quad \begin{cases} q- \text{ нечетно} & \text{[23]} \\ q- \text{ четно}, \ q>2 & \text{[162]} \end{cases}$$

$$\mu(4,3) = 20 \text{ [159]},$$

$$\mu(5,3) = 56 \text{ [94]},$$

$$\mu(6,3) = 112 \text{ [161]},$$

$$\mu(4,4) = 41 \text{ [57]}.$$

Не са известни други точни стойности за $\mu(r,q)$. По-долу даваме някои долни и горни граници за $\mu(4,q)$ за малки стойности на $q$.

$$66 \le \mu(4,5) \le 111 \;\; [20,\ 72], \qquad \mu(4,7) \le 316 \;\; [72], \qquad \mu(4,9) \le 703 \;\; [110],$$

$$\mu(4,11) \le 1266 \;\; [110], \qquad \mu(4,13) \le 2107 \;\; [110].$$

Следната рекурсивна горна граница за $\mu(r,q)$ дължим на R. Hill.

**Теорема 2.15.** *[95]*

$$\mu(r,q) \le q\mu(r-1,q) - (q+1), q \ne 2, r \ge 4.$$

Съществуват многобройни подобрения на тази граница. Най-добрата от тях дължим на R. Meshulam [156] (вж. също [18, 19]). Нека $C_r(q)$ е максималната мощност на шапка в $\mathrm{AG}(r,q)$, а $c_r = C_r(q)/q^r$. Тогава

$$c_r(q) \le \frac{q^{-r} + c_{r-1}(q)}{1 + c_{r-1}(q)}, \;\; q > 2, r \ge 3.$$

Една по-слаба форма на това неравенство е

$$c_r(q) \le \frac{r+1}{r^2}, \;\; q > 2, r \ge 3.$$

Като използваме тези неравенства заедно с удвояващата конструкция на Mukhopadhyay получаваме и граници за шапки в проективни пространства. Така, ако съществува $n$-шапка в $\mathrm{PG}(r-1,q)$, то съществува и $2n$-шапка в $\mathrm{AG}(r,q)$, откъдето $n \le C_r(q)/2$. В ниските размерности съществуват и по-добри граници [181].

Особено смислено от гледна точка на теория на кодирането е да се разглеждат и по-общи шапки. Можем да дефинираме $(n,w)$-шапка в $\mathrm{PG}(r,q)$ като множество $\mathcal{C}$ от $n$ точки със свойството, че всяка права съдържа не повече от $w$ точки от $\mathcal{C}$. Конструкции и граници за такива обобщени шапки са дадени в [59, 96, 154, 198]. Да означим с $\mu_w(r,q)$ максималната мощност на $(n,w)$-шапка в $\mathrm{PG}(r,q)$. За шапки с $w > 2$ са известни следните резултати:

$$\begin{aligned} \mu_q(N,q) &= q^N, \quad \text{за всички } q, \\ \mu_3(3,4) &= 31 \;\; [96], \\ \mu_3(3,5) &= 43 \;\; [59], \\ 64 \le \mu_4(3,5) &\le 75 \;\; [198]. \end{aligned}$$

# 2.3 Линейни кодове над крайни полета

## 2.3.1 Линейни кодове

Нека $\mathbb{F}_q$ е крайно поле с $q$ елемента, $q = p^h$, $p$ просто число, и нека $\mathbb{F}_q^n$ е векторното пространство на всички наредени $n$-орки над $\mathbb{F}_q$. В $\mathbb{F}_q^n$ въвеждаме метрика (*разстояние на* Hamming) чрез

$$\rho_{\mathrm{Ham}} : \begin{cases} \mathbb{F}_q^n \times \mathbb{F}_q^n & \to & \mathbb{N}_0 \\ \boldsymbol{x} \times \boldsymbol{y} & \to & |\{i \mid x_i \neq y_i\}| \end{cases} . \tag{2.7}$$

С други думи, разстоянието между два вектора (думи) от $\mathbb{F}_q^n$ е броя на позициите, в които те се различават. *Тегло на* Hamming на един вектор $\boldsymbol{x} \in \mathbb{F}_q^n$ се дефинира като броя на ненулевите му координати, или $w_{\mathrm{Ham}}(\boldsymbol{x}) = \rho_{\mathrm{Ham}}(\boldsymbol{x}, \mathbf{0})$. Тук с $\mathbf{0}$ бележим нулевия вектор в $\mathbb{F}_q^n$. Метриката на Hamming е инвариантна относно транслация, откъдето

$$\rho_{\mathrm{Ham}}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = w_{\mathrm{Ham}}(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}).$$

*Линеен* $[n, k]$*-код* над $\mathbb{F}_q$ или $[n, k]_q$-код наричаме всяко $k$-мерно векторно подпространство $C$ на $\mathbb{F}_q^n$. Числата $n$ и $k$ наричаме съответно *дължина* и *размерност* на кода $C$. *Минимално разстояние* на линеен код $C$ наричаме минималното разстояние на Hamming между две различни думи от $C$. Линеен код над $\mathbb{F}_q$ с дължина $n$, размерност $k$ и минимално разстояние $d$ наричаме $[n, k, d]_q$-код. Понякога, когато не се интересуваме от минималното разстояние, говорим само за $[n, k]_q$-кодове. Ясно е, че минималното разстояние на линеен код $C$ е равно на най-малкото ненулево тегло на кодова дума от $C$:

$$d(c) = \min_{\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{y}} \rho_{\mathrm{Ham}}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \min_{\boldsymbol{x} \neq \mathbf{0}} w_{\mathrm{Ham}}(\boldsymbol{x}).$$

Във векторното пространство $\mathbb{F}_q^n$ дефинираме скаларно произведение на два вектора чрез

$$\boldsymbol{x}\boldsymbol{y} = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \ldots + x_n y_n,$$

където $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ и $\boldsymbol{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ са вектори от $\mathbb{F}_q^n$. Два вектора наричаме *ортогонални*, ако $\boldsymbol{x}\boldsymbol{y} = 0$. Множеството на всички думи от $\mathbb{F}_q^n$, ортогонални на всички думи от $C$ наричаме *ортогонален код* на $C$ и означаваме с $C^\perp$:

$$C^\perp = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{F}_q^n \mid \boldsymbol{x}\boldsymbol{y} = 0 \text{ за всяко } \boldsymbol{y} \in C\}.$$

Ако $C$ е линеен $[n,k]_q$-код, то $C^\perp$ е линеен код с параметри $[n, n-k]_q$.

*Пораждаща матрица* на един линеен код $C$ наричаме всяка матрица $G$, чиито редове образуват база на $C$. *Проверочна матрица* на $C$ наричаме всяка пораждаща матрица $H$ на $C^\perp$. Един вектор $\boldsymbol{c}$ е кодова дума от линейния $[n,k]_q$-код $C$ с пораждаща матрица $G$ точно тогава, когато съществува вектор $\boldsymbol{u} \in \mathbb{F}_q^k$, за който

$$\boldsymbol{c} = \boldsymbol{u}G.$$

Ако кодът $C$ има проверочна матрица $H$, то $\boldsymbol{c} \in C$ точно тогава, когато

$$H\boldsymbol{c}^T = \boldsymbol{0} \in \mathbb{F}_q^n.$$

Минималното разстояние на един линеен код може да се характеризира чрез свойствата на коя да е негова проверочна матрица.

**Теорема 2.16.** *Нека $C$ е линеен $[n,k]_q$-код с проверочна матрица $H$. Минималното разстояние на $C$ е $d$ точно тогава, когато всеки $d-1$ стълба на $H$ са линейно независими и в $H$ съществуват $d$ линейно зависими стълба.*

### 2.3.2 Изоморфизъм на линейни кодове

Да разгледаме следните трансформации на думите на линеен код $C \leq \mathbb{F}_q^n$:

(1) Пермутация на координатните позиции.

(2) Умножение на елементите във фиксирана позиция с ненулев елемент на $\mathbb{F}_q$.

(3) Действие с автоморфизъм на $\mathbb{F}_q$ върху елементите във всички позиции едновременно.

Всяка от горните трансформации запазва теглото на Hamming и изобразява един $[n,k,d]_q$-код в код със същите параметри.

Два линейни кода $C'$ и $C''$ наричаме *изоморфни* или *еквивалентни*, ако всички думи на $C''$ могат да бъдат получени от думите на $C'$ чрез фиксирана редица от трансформации от вида (1–3) и обратно, всички думи на $C'$ могат да бъдат получени от думите на $C''$ чрез редица от трансформации от вида (1)–(3). Ясно е, че два изоморфни кода имат едни и същи параметри.

Трансформациите от вида (1) и (2) могат да бъдат реализирани чрез умножение с подходяща мономиална матрица[5]. Така два $[n,k]_q$ кода $C'$ и $C''$ са изоморфни, ако съществуват мономиална матрица $M \in \mathrm{Mon}(n,q)$ и автоморфизъм $\sigma \in \mathrm{Aut}\,\mathbb{F}_q$, за които е изпълнено:

$$\boldsymbol{c} \in C' \implies \boldsymbol{c}^{(M,\sigma)} = (\boldsymbol{c}M)^\sigma \in C''.$$

*Автоморфизъм* на линеен код $C$ наричаме всеки изоморфизъм от $C$ в $C$. Множеството

$$\mathfrak{G} = \{(M,\sigma) \mid \boldsymbol{c}^{(M,\sigma)} \in C \quad \forall \boldsymbol{c} \in C\}$$

е група по отношение на умножението $(M_1,\sigma_1) \circ (M_2,\sigma_2) = (M_1M_2, \sigma_1\sigma_2)$. Групата $\mathfrak{G}$ наричаме *група от автоморфизми* на $C$. Подгрупата $\mathfrak{H} = \{(M,\sigma) \in \mathfrak{G} \mid \sigma = \mathrm{id}\}$ е нормална подгрупа на $\mathfrak{G}$ и $\mathfrak{G} = \mathfrak{H} \leftthreetimes \mathrm{Aut}\,\mathbb{F}_q$.

### 2.3.3 Спектър на линеен код

Нека $C$ е линеен код с параметри $[n,k,d]_q$. Броят на кодовите думи в $C$ с тегло на Hamming $i$ означаваме с $A_i$. Редицата $(A_i)_{i\geq 0}$ наричаме *спектър* на $C$. Със спектъра на $C$ свързваме полинома

$$W_C(x,y) = \sum_{i=0}^{n} A_i x^{n-i} y^i,$$

който наричаме *номератор на теглата на $C$*.

Съществува връзка между спектрите на линеен код $C$ и неговия ортогонален код $C^\perp$. Тя се дава от следната теорема на MacWilliams [140, 143].

**Теорема 2.17.** *Нека $C$ е линеен $[n,k]$-код над $\mathbb{F}_q$. Тогава*

$$W_{C^\perp}(x,y) = \frac{1}{|C|} W_C(x+(q-1)y, x-y).$$

[5] Мономиална матрица е квадратна матрица с точно един ненулев елемент в ред и стълб.

Да означим с $(B_i)_{i\geq 0}$ спектъра на $C^\perp$. Теорема 2.17 е еквивалентна на следния резултат.

**Теорема 2.18.** *Нека $C$ е линеен $[n,k]_q$-код и нека спектърът на ортогоналния му код $C^\perp$ е $(B_i)_{i\geq 0}$. Тогава за всяко $i = 0, 1, \ldots, n$*

$$B_i = \frac{1}{|C|}\sum_{j=0}^{n} A_j K_j(i,n), \tag{2.8}$$

*където*

$$K_j(x,n) = \sum_{i=0}^{j}(-1)^i(q-1)^{j-i}\binom{x}{i}\binom{n-x}{j-i}$$

*са полиномите на* Кравчук.

Прието е равенствата (2.8) да се наричат *тъждества на* MacWilliams. От Теорема 2.17 се получава и следния резултат.

**Теорема 2.19.** *Нека $(A_i)_{i\geq 0}$ и $(B_i)_{i\geq 0}$ са съответно спектрите на линеен $[n,k]_q$-код $C$ и неговия ортогонален $C^\perp$. Тогава за всяко $j = 0, 1, \ldots, n$ е в сила*

$$\sum_{i=0}^{n-j}\binom{n-i}{j}A_i = q^{k-j}\sum_{i=0}^{j}\binom{n-i}{j-i}B_i.$$

### 2.3.4 Граници за линейни кодове

В този раздел представяме някои общи граници за параметрите на линейни кодове.

**Теорема 2.20.** (*Граница на сферичната опаковка*) *Нека $C$ е $[n,k,d]_q$-код. Тогава*

$$\sum_{i=0}^{\lfloor (d-1)/2\rfloor}\binom{n}{i}(q-1)^i < q^{n-k}.$$

Кодове, за чиито параметри се достига равенство в границата на сферичната опаковка се наричат *съвършени*. Параметрите на всички съвършени кодове са известни [136, 137, 189, 190, 201].

**Теорема 2.21.** *[63, 194] (Граница на* VARSHAMOV-GILBERT*) Нека $n, k, d$ са естествени числа, а $q$ е степен на просто число. Ако*

$$\sum_{i=1}^{d-2} \binom{n-1}{i} (q-1)^i < q^{n-k},$$

*то съществува линеен $[n, k, d]_q$-код.*

**Теорема 2.22.** *[175] (Граница на* SINGLETON*) Нека $C$ е $[n, k, d]_q$-код. Тогава*

$$n \geq d + k - 1.$$

Линейни кодове, за чиито параметри в границата на SINGLETON се достига равенство, се наричат *MDS-кодове* или *кодове с максимално достижимо разстояние.* Широк клас MDS-кодове е построен от I. REED и G. SOLOMON [163].

Следващата границана на GRIESMER е обобщение на границата на SINGLETON.

**Теорема 2.23.** *[71] (Граница на* GRIESMER*) Нека $C$* е *$[n, k, d]_q$-код. Тогава*

$$n \geq \sum_{i=0}^{k-1} \lceil \frac{d}{q^i} \rceil.$$

Прието е дясната страна на горното неравенство да се означава с $g_q(k, d)$. Линейни кодове с дължина, за която в границата на GRIESMER се достига равенство, т.е. кодове с параметри $[g_q(k, d), k, d]_q$, се наричат *кодове на* GRIESMER или *грийсмърови кодове.*

Нека $C$ е линеен код над $\mathbb{F}_q$. Множеството от всички координатни позиции на $C$, в които думите му не са тъждествено нула наричаме *носител* на кода $C$ и означаваме със $\operatorname{Supp} C$. Код, за който $n = |\operatorname{Supp} C|$ наричаме *неизроден код* или *код с пълна дължина.*

Нека $C$ е $[n, k]_q$-код. Под *$r$-то обобщено тегло на* HAMMING разбираме минималната мощност на носител на $[n, r]$-подкод[6], $1 \leq r \leq k$:

$$d_r(C) = \min\{|\operatorname{Supp} C| \mid D \text{ е } [n, r]_q - \text{подкод на } C\}. \tag{2.9}$$

Ясно е, че минималното разстояние на $C$ съвпада с $d_1(C)$.

Следните резултати от [197] обобщават известни факти за линейни кодове.

[6] Всяко $r$-мерно подпространство на линейния $[n, k]_q$-код $C$ наричаме $[n, r]$-*подкод на $C$.*

**Теорема 2.24.** *За всеки линеен $[n,k]_q$-код $C$ са в сила неравенствата*

$$0 < d_1(C) < d_2(C) < \ldots < d_k(C) = n.$$

**Теорема 2.25.** *Нека $H_C$ е проверочна матрица на линейния $[n,k]_q$-код $C$ и нека $H_i$ е $i$-тия стълб на $H_C$. Тогава за $r$-тото обобщено тегло на Hamming имаме*

$$d_r(C) = \min\{|I| \mid |I| - \mathrm{rk}\langle H_i, i \in I\rangle \geq r\}.$$

**Теорема 2.26.** *Нека $C$ е линеен $[n,k]_q$-код, а $C^\perp$ е неговият ортогонален. Тогава*

$$\{d_r(C) \mid r = 1,\ldots,k\} \cup \{n+1-d_r(C^\perp) \mid r = 1,\ldots,n-k\} = \{1,2,\ldots,n\}.$$

**Теорема 2.27.** *(обобщена граница на* Singleton*) Нека $C$ е $[n,k]$-код над $\mathbb{F}_q$. Тогава*

$$d_r(C) \leq n-k+r \tag{2.10}$$

за $r = 1,2,\ldots,k$.

MDS-кодовете удовлетворяват обобщената граница на Singleton за всяко $r$. Кодове, удовлетворяващи тази граница за $r = 2,\ldots,k$, а $d_1 = n-k$, се наричат почти-MDS кодове. Тези кодове имат близки свойства до тези на MDS-кодовете [53, 54, 55].

## 2.4 Линейни кодове и арки в $\mathrm{PG}(k-1,q)$

Между мултимножествата от точки в геометриите $\mathrm{PG}(k-1,q)$ и линейните кодове над крайни полета има естествена връзка.[7] В този раздел описваме относително подробно тази връзка.

Нека $C$ е линеен $[n,k,d]_q$-код с пълна дължина, т.е. такъв код, никоя координата на който не е тъждествено нула. С други думи, за всеки индекс $i \in \{1,\ldots,n\}$ съществува кодова дума $\boldsymbol{c} = (c_1,\ldots,c_n) \in C$, за която $c_i \neq 0$.

Нека $G = (\boldsymbol{g}_1^T,\ldots,\boldsymbol{g}_n^T)$, $\boldsymbol{g}_i \in \mathbb{F}_q^k$ е пораждаща матрица на $C$. Тогава стълбовете $\boldsymbol{g}_i^T$ на $G$ могат да бъдат разглеждани като точки $P_i$ в проективната геометрия $\mathrm{PG}(k-1,q)$. Следователно, на кода $C$ можем да съпоставим наредена $n$-орка от точки $\boldsymbol{p} = (P_1,\ldots,P_n)$ като се допуска някои

[7] По думите на James Hirschfeld: "Linear codes are arcs."

от тези точки да се повтарят. На тази $n$-орка съпоставяме мултимножеството $\mathcal{K}_{\boldsymbol{p}} : \mathcal{P} \to \mathbb{N}_0$ като дефинираме $\mathcal{K}_{\boldsymbol{p}}(P) := |\{i \mid P_i = P\}|$, т.е. $\mathcal{K}_{\boldsymbol{p}}(P)$ е броя на появяванията на точката $P$ в $\boldsymbol{p}$. Ясно е, че това съответствие е нееднозначно, тъй като с един линеен код $C$ се асоциират различни мултимножества $\mathcal{K}_{\boldsymbol{p}}$. Също така, непосредствено се проверява, че кое да е от мултимножествата, асоциирани с линейния $[n,k,d]_q$-код $C$ по описания начин, е арка в $\mathrm{PG}(k-1,q)$ с параметри $(n, n-d)$.

Нека сега $\mathcal{K}$ е $(n,w)$-арка в $\mathrm{PG}(k-1,q)$, такава че носителят ѝ $\operatorname{Supp}\mathcal{K}$ не се съдържа в никоя от коя да е от нейните хиперравнини и $G$ е матрица, в която точно $\mathcal{K}(P)$ стълба съдържат хомогенните координати на точката $P$. Тогава кодът $C$ с пораждаща матрица $G$ е линеен $[n,k,d]_q$-код с $d = n - w$. Тъй като с арка $\mathcal{K}$ се асоциират различни кодове, то така описаното съответствие между $\mathcal{K}$ и $C$ не е еднозначно.

По описания начин на изоморфни кодове съпоставяме проективно еквивалентни арки и обратно, проективно еквивалентни арки се асоциират с изоморфни кодове. Връзката между кодове и арки е известна отдавна – поне от 60-те години на XX век (напр. [24]) и е формулирана в явен вид на различни места [56, 113, 122, 193, 195]. Представената формулировка в следващата теорема е най-близка до тази в [195] .

**Теорема 2.28.** *Съществува взаимно еднозначно съответствие между класовете на проективно еквивалентните $(n, n-d)$-арки в $PG(k-1,q)$ и класовете на еквивалентност на неизродените $[n,k,d]_q$-кодове, където $k \geq 2$ и $d \geq 1$.*

Оттук нататък арка, асоциирана с линейния код $C$ означаваме с $\mathcal{K}_C$, а код, асоцииран с арката $\mathcal{K}$, означаваме със $C_{\mathcal{K}}$. Тези означения в известен смисъл са неточни, тъй като кодът, асоцииран с дадена арка, и арката, асоциирана с даден код, не се определят еднозначно, но благодарение на Теорема 2.28 това не води до недоразумения.

Ясно е, че ако $C$ е линеен код със спектър $(A_i)_{i\geq 0}$, а $\mathcal{K}_C$ е асоциирана с него арка със спектър $(a_i)_{i\geq 0}$, то връзката между двата спектъра се задава чрез

$$a_i = \frac{1}{q-1} A_{n-i}.$$

Горната връзка между кодове и арки е полезна с това, че отменя произвола при избора на код от даден клас на еквивалентност. Да отбележим, че при изследването на арки отпада и необходимостта от фиксиране на база в $\mathbb{F}_q^n$. Също така задачата за възможните параметри на арка в дадена геометрия е далеч по-естествена от задачата за възможните параметри на линеен код, защото се свежда до въпроса, какво е най-общото положение на $n$ точки в геометрията $\mathrm{PG}(k-1,q)$. Над безкрайно поле отговорът е тривиален – за всяка размерност $k$ и всяко естествено $n$ можем да изберем $n$ точки в общо положение. Над крайни полета този въпрос е труден и има отговор само за прости полета [3, 10] и малки размерности в случай на съставни полета.

За максималната кратност на хиперравнина на дадена арка имаме следния резултат, който в някакъв смисъл е еквивалентен на границата на GRIESMER.

**Теорема 2.29.** *Нека $\mathcal{K}$ е $(n,w)$-арка в $\mathrm{PG}(k-1,q)$ и нека $S$ е $(s-1)$-мерно подпространство в $\mathrm{PG}(k-1,q)$, $2 \le s < k$, с кратност $\mathcal{K}(S) = u$. Тогава за всяко $(s-2)$-мерно подпространство $T$, съдържащо се в $S$, е в сила неравенството*

$$\mathcal{K}(T) \le w_{s-1}(\mathcal{K}) - \frac{n-u}{q^{k-s}+\ldots+q}.$$

В следващите глави съществено използваме забележителната теорема на H. N. WARD [196] за делимостта на теглата на кодове, лежащи на границата на GRIESMER. По-долу формулираме резултата на WARD в термините на арки в $\mathrm{PG}(k-1,q)$ (вж. също [123] за обобщение на резултата на WARD).

**Теорема 2.30.** *Нека $\mathcal{K}$ е грийсмърова $(n,w)$-арка в $\mathrm{PG}(k-1,p)$, където $p$ е просто число. Ако $w \equiv n \pmod{p^e}$, $e \ge 1$, то за всяка хиперравнина $H$ на $\mathcal{K}$ е изпълнено $\mathcal{K}(H) \equiv n \pmod{p^e}$.*

За кодове над $\mathbb{F}_4$, съответно арки в геометрии над $\mathbb{F}_4$, е в сила следната отслабена версия на тази теорема [196].

**Теорема 2.31.** *Нека $\mathcal{K}$ е грийсмърова $(n,w)$-арка в $\mathrm{PG}(k-1,4)$, за която $w \equiv n \pmod{4^e}$. Тогава за всяка хиперравнина $H$ на $\mathcal{K}$ е в сила $\mathcal{K}(H) \equiv n \pmod{2^e}$.*

Една $(n,w)$-арка $\mathcal{K}$ в $\mathrm{PG}(k-1,q)$ наричаме *разширима*, ако съществува арка $\mathcal{K}'$ в $\mathrm{PG}(k-1,q)$ с параметри $(n+1,w)$, за която $\mathcal{K}'(P) \ge \mathcal{K}(P)$ за всички точки от $\mathrm{PG}(k-1,q)$. Следващата теорема е геометрична версия на теоремата на HILL–LIZAK за разширимост [103];

**Теорема 2.32.** *Нека $\mathcal{K}$ е $(n, w)$-арка в $\mathrm{PG}(k-1, q)$, за параметрите на която е изпълнено $(n-w, q) = 1$. Нека кратностите на всички хиперравнини са сравними с $n$ или $w$ по модул $q$. Тогава $\mathcal{K}$ може да бъде разширена до $(n+1, w)$-арка.*

Следващата теорема от [127] обобщава резултата на Hill и Lizak и следва от един резултат на A. Beutelspacher [17] за блокиращи множества (вж. също [91]).

**Теорема 2.33.** *Нека $\mathcal{K}$ е $(n, w)$-арка в $\mathrm{PG}(k-1, q)$, $q = p^h$, със спектър $(a_i)_{i\geq 0}$. Ако $w \not\equiv n \pmod{p}$ и*

$$\sum_{i \not\equiv w \pmod{q}} a_i \leq q^{k-2} + q^{k-3} + \ldots + 1 + q^{k-3} \cdot r(q),$$

*където $q + r(q) + 1$ е максималната мощност на нетривиално блокиращо множество в $\mathrm{PG}(2, q)$, то тогава съществува $(n+1, w)$-арка в $\mathrm{PG}(k-1, q)$.*

От тази теорема се получава следният полезен резултат, съгласно който арка, в която броят на хиперравнините с кратност $\not\equiv n, n+1 \pmod{q}$ не е много голям, е по необходимост разширима [127].

**Следствие 2.34.** *Нека $\mathcal{K}$ е неразширима $(n, w)$-арка в $\mathrm{PG}(k-1, q)$, $q = p^h$, за която $w \equiv n + 1 \pmod{q}$ и която има спектър $(a_i)_{i\geq 0}$. Нека $\theta$ е максималният брой хиперравнини с кратност $\not\equiv n + 1 \pmod{q}$, които минават през произволно подпространство с коразмерност 2 в някоя хиперравнина $H$ с $\mathcal{K}(H) \equiv w \pmod{q}$. Тогава*

$$\sum_{i \not\equiv n, n+1 \pmod{q}} a_i > q^{k-3} \cdot r(q)/(\theta - 1),$$

*където $r(q)$ е дефинирано както в Теорема 2.33. По-специално е изпълнено*

$$\sum_{i \not\equiv n, n+1 \pmod{q}} a_i > q^{k-3} \cdot r(q)/(q - 1).$$

По-долу представяме синтезирано връката между някои основни понятия за линейни кодове и арки.

| | | |
|---|---|---|
| неизроден $[n,k,d]_q$ - код $C$ | $\Leftrightarrow$ | $(n, w=n-d)$-арка $\mathcal{K}$ в $\mathrm{PG}(k-1,q)$ |
| $\boldsymbol{u} \in C, \boldsymbol{u} \neq \mathbf{0}$, $w_{\mathrm{Ham}}(\boldsymbol{u}) = u$ | $\Leftrightarrow$ | хиперравнина $H$ с $\mathcal{K}(H) = n-u$, |
| $(A_i)_{i\geq 0}$ | $\Leftrightarrow$ | $(a_i)_{i\geq 0},\ a_i = \frac{1}{q-1}A_{n-i}$ |
| разширим $[n,k,d]_q$ -код $C$ | $\Leftrightarrow$ | разширима $(n, n-d)$-арка $\mathcal{K}$ в $\mathrm{PG}(k-1,q)$ |
| $[n,k,d]_q$-код $C$ с делител $\Delta$<br>$A_i = 0$ за всяко $i \not\equiv 0 \pmod{\Delta}$ | $\Leftrightarrow$ | $(n, n-d)$-арка $\mathcal{K}$ в $PG(k-1,q)$ с делител $\Delta$<br>$a_i = 0$ за всяко $i \not\equiv n \pmod{\Delta}$ |
| грийсмъров $[n,k,d]_q$ - код $C$ | $\Leftrightarrow$ | грийсмърова $(n,w)$-арка $\mathcal{K}$ в $\mathrm{PG}(k-1,q)$ |
| $n = \sum_{i=0}^{k-1} \lceil d/q^i \rceil$ | | $n = \sum_{i=0}^{k-1} \lceil (n-w)/q^i \rceil$ |

# Глава 3

# Арки и оптимални кодове

В тази глава се изследва въпросът за достижимостта на границата на Griesmer, както и за структурата на кодовете, които лежат на нея. Обща конструкция за получаване на двоични линейни кодове, лежащи на границата на Griesmer бе представена от Belov, Logachov и Sandimirov в [15]. Същността на конструкцията се състои в изтриване на копия на симплекс кодове с подходяща размерност от конкатенацията на няколко копия на $k$-мерния симплекс код. Тази конструкция бе обобщена от Hill [99] и Додунеков [46] за линейни кодове над произволно поле. От този резултат се получават няколко следствия, най-важното от които е това, че за фиксирана размерност и фиксирано поле $\mathbb{F}_q$ грийсмърови кодове съществуват за всички достатъчно големи стойности на $d$. С други думи, за фиксирани размерност $k$ и $q$ – степен на просто число, съществува цяло положително число $d_0$, за което е изпълнено

$$n_q(k,d) - g_q(k,d) = 0 \text{ за всяко } \; d \geq d_0.$$

За фиксирани разменост $k$ и ред на поле $q$ дефинираме функцията $\delta(k,q)$ като най-голямата стойност $d$, за която не съществува $[n = g_q(k,d), k, d]_q$-код на Griesmer или: (a) $n_q(k,d) = g_q(k,d)$ за всички $d > \delta(k,q)$; (b) $n_q(k,d) > g_q(k,d)$ за $d = \delta(k,q)$ (вж. също [87]). Следователно, $\delta(k,q)$ е най-малкото подходящо $d_0$ в горната дефиниция.

От друга страна един резултат на Додунеков [46] показва, че при фиксирани $d$, $q$ и размерност $k$, която клони към безкрайност, разликата $n_q(k,d) - g_q(k,d)$ расте неограничено, или в горните означения

$$n_q(k,d) - g_q(k,d) \xrightarrow[k\to\infty]{} \infty.$$

Казано по друг начин, когато редът на полето и минимално разстояние са фиксирани, а размерността на кода расте неограничено, то и оптималната дължина на линейните кодове се отдалечава неограничено от границата на Griesmer.

В тази глава изследваме въпроса за намиране на добри оценки за функцията $t_q(k)$, дефинирана като

$$t_q(k) := \max_d (n_q(k,d) - g_q(k,d)).$$

От резултата на Додунеков следва, че $t_q(k) \to \infty$, когато $k \to \infty$. Нашата цел е да намерим оценка за скоростта на нарастване на тази функция. Еквивалентна задача в частния случай на 3-мерни кодове е поставена от S. Ball в [6]. Неговата формулировка гласи: "Вярно ли е, че за всяко фиксирано $n-d$ същесвуват 3-мерни кодове, лежащи на гарницата на Griesmer (или различаващи се от нея с константа или дори с $\log q$)?" В поставения въпрос се предлага дори и оценка за $t_q(3)$, която по-нататък ще докажем в частния случай на полета от четен ред. Подобен подход към основната задача на теория на кодирането е използван и от N. Hamada и T. Maruta [86], които доказват следната теорема:

**Теорема 3.1.** *[86] Нека $(e_0, e_1, \ldots, e_{k-2})$ е наредена $(k-1)$-орка от цели числа, за които $0 \le e_i \le q-1$, и нека $d = q^{k-1} - \sum_{i=0}^{k-2} e_i q^i$ за фиксирано цяло число $k \ge 3$ и фиксирана степен на просто число $q \ge 3$. Тогава съществуват неотрицателни функции $h_{k,q}(e_0, \ldots, e_{k-2})$, $k = 3, \ldots, k$, за които $n_q(k,d) - g_q(k,d)$ може да се представи във вида*

$$n_q(k,d) - g_q(k,d) = \sum_{j=3}^{k} h_{j,q}(e_{k-j}, \ldots, e_{k-2}).$$

Макар Hamada и Maruta да определят точните стойности на величината $h_{k,q}(e_0, \ldots, e_{k-2})$ за $q = 3$ и $k = 3, 4, 5$ (вж. [86]), намирането им за големи размерности $k$ и големи $q$ изглежда безнадеждно.

В раздел 3.1 даваме три еквивалентни формулировки на задачата, която изследваме в термините на линейни кодове, арки и минихипери. Тук представяме и теоремата на Додунеков за безкрайното отклонение на оптималната дължина на линеен код от границата на Griesmer. В раздел 3.2 описваме конструкция на минихипери, аналогична на конструкцията на Белов, Логачов и Сандимиров за кодове на Griesmer.

С нейна помощ доказваме няколко оценки за $t_q(k)$, получени при съкращаване на добри линейни кодове. За четни размерности доказваме неравенството $t_q(k) \leq 2(q^{k/2}-1)/(q-1)-(k+q-1)$, от което получаваме и подобна оценка и за нечетните размерности. Раздел 3.3 е посветен на 3-мерни кодве и равнинни арки. Тук доказваме един резултат, който дава частичен отговор на въпроса на S. Ball за тримерни линейни кодове и равнинни арки. По-специално, в равнини от четен ред съществуват арки, за които дължините на асоциираните линейни кодове надхвърлят границата на Griesmer с не повече от $\log_2 q - 1$. За редове, които са четни степени на прости числа доказваме по-слабата оценка $t_q(3) \leq \sqrt{q}-1$. Накрая в раздел 3.4 определяме точните стойности за $n_4(5,d)$ за някои специални минимални разстояния, за които въпросът за съществуване на кодове на Griesmer стоеше открит. В края на раздела е представена таблица на нерешените случаи за оптималната дължина на линеен код с $q=4,\ k=5$.

## 3.1 Основна задача на теория на кодирането

Започваме този раздел с няколко еквивалентни формулировки на основната задача, която е предмет на изследване в тази глава. Най-напред представяме формулировка в термините на линейни кодове.

**Задача А.** *Нека са дадени степен на просто число $q$ и цяло положително число $k$. Да се намери минималната стойност на $t$, за която съществуват $[g_q(k,d)+t,k,d]_q$-кодове за всички $d$.*

Тази минимална стойност на $t$ означаваме с $t_q(k)$, или, формално

$$t_q(k) := \max_{1\leq d\leq\infty}(n_q(k,d)-g_q(k,d)).$$

Задача А е сходна с основната задача на теория на кодирането, състояща се в намирането на точната стойност на $n_q(k,d)$ за фиксирани $q,k$ и $d$. Но така поставена задачата за намиране на $n_q(k,d)$ за всички $q,k,d$ е безнадеждна и ние не можем да добием представа, доколко е добра границата на Griesmer, сравнена със стойностите, получени за оптималните кодове. Един възможен подход е да се намери точно решение за малки стойности на $q$ и $k$ за *всички* $d$. Това бе предложено от R. Hill и бе обект на изследвания в огормен брой работи на С. Додунеков, Н. Манев, И. Буюклиев, N. Hamada, T. Helleseth, R. Hill, H. van Tilborg, Ø. Ytrehus, T. Maruta, L. Storme и др. От техните резултати, както и от резултатите за равнинни арки с максимална мощност (вж. таблиците [29, 69, 152], както и работите [25]–[28],[47]–[52],[70],[74]–[90], [93],[101],[102],[119],[120],[124]–[126]) може да се получи, че

$$t_q(1) = t_q(2) = 0, \quad \text{за всички } q;$$

$$t_q(3) = 1 \text{ за всички нечетни } q \leq 19;$$

$$t_q(3) \leq 2 \text{ за всички } q = 23, 25, 27, 29;$$

$$t_2(4) = 0, t_2(5) = 1, t_2(6) = 1, t_2(7) = 2, t_2(8) = 3;$$

$$t_3(4) = 1, t_3(5) = 2, t_3(6) = 2 \text{ или } 3;$$

$$t_4(4) = 1, t_4(5) = 2; t_5(4) = 2, 2 \leq t_5(5) \leq 5.$$

В началото на 70-те години Белов, Логачов и Сандимиров намират достатъчно условие за съществуване на двоични кодове на Griesmer. Доказателството им е конструктивно и дава доста общ метод за получаване въобще на добри линейни кодове [15] (вж. също [13, 14, 138]). По-късно R. Hill обобщава техния резултат за кодове над произволни крайни полета [99]. За излагането на резултата на Hill е необходимо да въведем редица означения. Те ще бъдат използвани до края на настоящия раздел без специална уговорка.

Нека $d$ и $k$ са цели положителни числа и нека $d$ е представено в следния вид:

$$d = sq^{k-1} - \lambda_{k-2}q^{k-2} - \ldots - \lambda_1 q - \lambda_0, \tag{3.1}$$

където $0 \leq \lambda_i \leq q-1$. Лесно се проверява, че

$$g_q(k,d) = sv_k - \lambda_{k-2}v_{k-1} - \ldots \lambda_1 v_2 - \lambda_0 v_1, \tag{3.2}$$

където $v_i = (q^i - 1)/(q-1)$.

Нека $V_{i,q}$, $i = 1, \ldots, k-1$ е множеството на всички $i$-мерни подпространства на $\mathbb{F}_q^k$ и да означим с $U_{i,q}^k$ множеството на всички матрици с $k$ реда и $(q^i - 1)/(q-1)$ ненулеви стълба от някое подпространство на $V_{i,q}$, имащи 1 за първа ненулева координата. Ясно е, че редовете на всяка матрица от $U_{i,q}^k$ пораждат симплекс-код с параметри $\left[\dfrac{q^i-1}{q-1}, i, q^{i-1}\right]_q$. Да означим с $S_{k,q}$ матрицата, имаща за стълбове всички ненулеви вектори на $\mathbb{F}_q^k$, в които първата ненулева координата е равна на 1. Да вземем конкатенация на $s$ копия на $S_{k,q}$ и да изтрием от получената матрица $\lambda_i$ матрици от $U_{i,q}^k$. Полученият код е код на Griesmer (вж. [99]). Следвайки F. MacWilliams и N. Sloane [143], всеки линеен код, построен по описания начин наричаме код от тип BV.

Сега представяме $d$ в малко по-различен вид:

$$d = sq^{k-1} - \sum_{i=1}^{l} q^{u_i - 1},$$

където $s = \lceil d/q^{k-1} \rceil$, $k > u_1 \geq u_2 \geq \ldots \geq u_l$, и най-много $q-1$ от числата $u_i$ приемат една и съща стойност. Следващата теорема е формулирана и доказана в [99].

**Теорема 3.2.** *[15, 99] Код от тип BV с параметри $[g_q(k,d), k, d]_q$ съществува точно тогава, когато*

$$\sum_{i=1}^{\min(s+1,l)} u_i \leq sk.$$

От тази теорема се получава принципен резултат за достижимостта на границата на Griesmer, който формулираме по-долу.

**Следствие 3.3.** *За всяко цяло положително число $k$ и всяка степен на просто число $q$, съществува цяло число $d_0$, за което е изпълнено $n_q(k,d) = g_q(k,d)$ за всички $d \geq d_0$.*

*Доказателство.* Да положим $d_0 = (k-2)q^{k-1} + 1$. Тогава $s \geq k-1$ и тъй като $u_i \leq k-1 \leq s$ за всички $i$, имаме

$$\sum_{i=1}^{\min(s+1,l)} u_i \leq \sum_{i=1}^{s+1} u_i \leq (s+1)(k+1) = sk - (s+1-k) \leq sk.$$

$\square$

От Следствие 3.3 получаваме, че е изпълнено $n_q(k,d) - g_q(k,d) = 0$ за фиксирано $k$ и $d \to \infty$. Оттук получаваме и оценката $\delta(k,q) \leq (k-2)q^{k-1}$. Тази стойност не дава най-добрата граница за $d_0$. Съществуват няколко подобрения на Следствие 3.3 (вж. напр. [87, 119, 120, 144, 145]). Някои изследователи изказват хипотезата, че $\delta(k,q) = (k-2)q^{k-1} - (k-1)q^{k-2}$, която е доказана в някои специални случаи [120, 144].

От друга страна поведението на разликата $n_q(k,d) - g_q(k,d)$ е доста различно, ако фиксираме $d$ и оставим $k$ да клони към безкрайност. В случаите, когато $k$ расте неограничено дължините на оптималните кодове се отклоняват неограничено от границата на Griesmer. Това наблюдение е направено от Додунеков в [46].

**Теорема 3.4.** *[46] За всеки две цели числа $t$ и $d \geq 3$, съществува такова цяло $k_0$, за което е изпълнено $n_q(k,d) - g_q(k,d) \geq t$, за всички $k \geq k_0$.*

*Доказателство.* Нека $d$ е фиксирано цяло положително число и нека $q$ е фиксирана степен на просто число. Полагаме $\rho = \lfloor (d-1)/2 \rfloor$ и означаваме с $B^n(\rho)$ кълбо в $\mathbb{F}_q^n$ с неопределен център и радиус $\rho$. Тогава

$$|B^n(\rho)| = \sum_{i=0}^{\rho} \binom{n}{i} (q-1)^i.$$

Ако $k \to \infty$, то $g_q(k,d) \to \infty$ и

$$|B_q^{g_q(k,d)}(\rho)| = \sum_{i=0}^{\rho} \binom{g_q(k,d)}{i} (q-1)^i \xrightarrow[k\to\infty]{} \infty.$$

Оттук също следва, че

$$\log_q \left( |B_q^{g_q(k,d)}(\rho)| \right) \xrightarrow[k\to\infty]{} \infty. \tag{3.3}$$

От друга страна да разгледаме оптимален код с параметри $[n_q(k,d), k, d]_q$. От границата на сферичната опаковка (Теорема 2.20) получаваме

$$\begin{aligned} q^{n_q(k,d)} &\geq q^k \cdot \sum_{i=0}^{\rho} \binom{n_q(k,d)}{i} (q-1)^i \\ &\geq q^k \cdot \sum_{i=0}^{\rho} \binom{g_q(k,d)}{i} (q-1)^i, \end{aligned}$$

откъдето

$$n_q(k,d) - k \geq \log_q |B_\rho^{g_q(k,d)}(\rho)| \to \infty. \tag{3.4}$$

Сега от границата на Griesmer имаме

$$\begin{aligned} g_q(k,d) &= d + \lceil \frac{d}{q} \rceil + \lceil \frac{d}{q^2} \rceil + \ldots + \lceil \frac{d}{q^{k-1}} \rceil \\ &< d + \frac{d}{q} + \frac{d}{q^2} + \ldots + \frac{d}{q^{k-1}} + k - 1, \end{aligned}$$

откъдето

$$g_q(k,d) - k < d\frac{q^k - 1}{q^k - q^{k-1}} - 1. \tag{3.5}$$

Комбинирайки (3.4) и (3.5), получаваме

$$n_q(k,d) - g_q(k,d) > \log_q |B_q^{g_q(k,d)}(\rho)| - d\frac{q^k-1}{q^k - q^{k-1}} + 1.$$

От (3.3) и факта, че $\lim\limits_{k\to\infty} \dfrac{q^k - 1}{q^k - q^{k-1}} = 1$ получаваме

$$n_q(k,d) - g_q(k,d) \xrightarrow[k\to\infty]{} \infty.$$

□

*Забележка* 3.5. Горното доказателство е реконструкция на оригиналното, което почива на подобна идея. То отразява наблюдението, че за големи размерности границата на сферичната опаковка става по-добра от границата на Griesmer.

От Теорема 3.4 следва, че за фиксирано $d$ имаме $n_q(k,d) - g_q(k,d) \to \infty$, и следователно, $t_q(k) \to \infty$ при фиксирано $q$ и $k$ клонящо към безкрайност. Проблемът е да се намери подходяща функция, която добре апроксимира (отгоре) $t_q(k)$.

Преди да продължим, ще дадем две еквивалентни геометрични версии на Задача А. Нека отново числата $k, d$ и $q$ са фиксирани и нека $d$ е записано във вида (3.1). Тогава $g_q(k,d)$ се задава с израза (3.2). Дефинираме $w_q(k,d) := g_q(k,d) - d$. От (3.1) и (3.2), използвайки известната рекурентна връзка за гаусовите коефициенти $v_i = v_{i-1} + q^{i-1}$, получаваме

$$w_q(k,d) = sv_{k-1} - \lambda_{k-2}v_{k-2} - \ldots - \lambda_1 v_1. \tag{3.6}$$

Тъй като $[n,k,d]_q$-кодове съществуват точно тогава, когато съществуват $(n,n-d)$-арки в $\mathrm{PG}(k-1,q)$, то Задача А може да се формулира по следния начин.

**Задача В.** *Нека са фиксирани степен на просто число $q$ и цяло положително число $k$. Да се намери минималната стойност на $t$, за която съществува арка в $\mathrm{PG}(k-1,q)$ с параметри $(g_q(k,d)+t, w_q(k,d)+t)$ за всички $d$.*

Както вече споменахме, задачата за намиране на $t_q(k)$ при фиксирани $q$ и $k$, е крайна. Всъщност можем да напишем

$$t_q(k) = \max_{1\le d\le \delta(k,q)} (n_q(k,d) - g_q(k,d)),$$

където по-горе дефинирахме $\delta(k,q)$ като максималната стойност на $d$, за която не съществува код на Griesmer (тук $k$ и $q$ са фиксирани). Интервалът за $d$ може да се намали още, благодарение на следното наблюдение.

**Лема 3.6.** *Ако $n_q(k,d) = g_q(k,d)+t$, то $n_q(k,d+q^{k-1}) \le g_q(k,d+q^{k-1})+t$.*

*Доказателство.* Нека $\mathcal{K}$ е $(n,w)$-арка в $\mathrm{PG}(k-1,q)$, за която $n = n_q(k,d)+t$ и $w = w_q(k,d)+t$. Да дефинираме арка $\mathcal{K}'$ като увеличим с 1 кратността на всяка точка в $\mathrm{PG}(k-1,q)$, т.е. $\mathcal{K}' = \mathcal{K}+\chi_{\mathcal{P}}$, където $\chi_{\mathcal{P}}$ е характеристичната функция на множеството от точки $\mathcal{P}$ на $\mathrm{PG}(k-1,q)$. Ясно е, че $\mathcal{K}'$ е $(n+v_k, w+v_{k-1})$-арка. От друга страна имаме

$$g_q(k,d+q^{k-1}) = \sum_{i=0}^{k-1} \left\lceil \frac{d+q^{k-1}}{q^i} \right\rceil = g_q(k,d)+v_k,$$

което завършва доказателството. □

От Лема 3.6 получаваме, че при фиксирани $k$ и $q$ е достатъчно да разглеждаме само стойности на $d$, които са по-малки от $q^{k-1}$:

$$t_q(k) = \max_{1\le d\le q^{k-1}} (n_q(k,d) - g_q(k,d)).$$

Интервалът за $d$ може да се намали още, отбелязвайки, че грийсмърови кодове съществуват за всяко $d = q^{k-1}$. За тази стойност на $d$ е достатъчно да вземем симплекс-кода или, геометрично, всички точки на $\mathrm{PG}(k-1,q)$.

За $d = q^{k-1} - q^{k-2}$ също винаги съществуват кодове на Griesmer. Това са кодовете, асоциирани с точките на афинното пространство $\mathrm{AG}(k-1, q)$. Тези кодове се явяват частен случай на т.нар. кодове на MacDonald.

Продължаваме с преформулирането на Задача B в термините на т.нар. *минихипери*. Понятието минихипер е предложено от Hamada и е еквивалентно на понятието блокиращо множество по отношение на хиперравнините. Макар да не се е наложило в геометричната литература, то се използва в теория на кодирането във връзка с изследвания, отнасящи се до оптимални кодове и основната задача на теория на кодирането. Нека $\mathcal{K}$ е $(g_q(k,d)+t, w_q(k,d)+t)$-арка в $\mathrm{PG}(k-1,q)$. Да означим с $s_0$ максималната кратност на точка в $\mathcal{K}$. Ако $d$ е зададено с (3.1), то $s_0 \le s+t$. Това следва от лемата по-долу, която е известна като фолклор (вж. също [15, 148]).

**Лема 3.7.** *Нека $d = sq^{k-1} - \lambda_{k-2}q^{k-2} - \ldots - \lambda_0$ и нека $\mathcal{K}$ е $(g_q(k,d)+t, w_q(k,d)+t)$-арка в $\mathrm{PG}(k-1,q)$. Тогава за всяко $j$-мерно подпространство $S$ в $\mathrm{PG}(k-1,q)$*

$$\mathcal{K}(S) \le t + \sum_{i=k-1-j}^{k-1} \lceil \frac{d}{q^i} \rceil.$$

*Доказателство.* Непосредствено се проверява, че твърдението е вярно за хиперравнини, т.е. за $j = k-2$. Да допуснем, че твърдението е вярно за подпространства с размерност $j \le k-2$. Тогава, като преброим кратностите на всички $j$-мерни подпространства през фиксирано $(j-1)$-мерно подпространство с максимална кратност получаваме, че резултатът е верен и за подпространствата с размерност $j-1$. □

Да разгледаме мултимножеството $\mathcal{F} := s_0\chi_{\mathcal{P}} - \mathcal{K}$. То е минихипер с параметри

$$(\sigma v_k + \lambda_{k-2}v_{k-1} + \cdots + \lambda_1 v_2 + \lambda_0 v_1 - t, \sigma v_{k-1} + \lambda_{k-2}v_{k-2} + \cdots + \lambda_1 v_1 - t),$$

където

$$\sigma = \begin{cases} s_0 - s & \text{за } s < s_0 \le s+t, \\ 0 & \text{за } s_0 \le s. \end{cases}$$

Този минихипер има допълнителното свойство, че максималната кратност на точка не надхвърля $\sigma + s$. Всъщност максималната кратност на точка ще бъде точно $\sigma + s$, ако арката $\mathcal{K}$ има 0-точка. Задача B се преформулира като задача за минихипери, както следва.

**Задача C.** *Да се намери максималната стойност на $t$, такава че за всички $d$, зададени с (3.1), съществува минихипер в* $\mathrm{PG}(k-1,q)$ *с параметри*

$$(\sigma v_k + \lambda_{k-2}v_{k-1} + \lambda_1 v_2 + \lambda_0 v_1 - t, \sigma v_{k-1} + \lambda_{k-2}v_{k-2} + \lambda_1 v_1 - t),$$

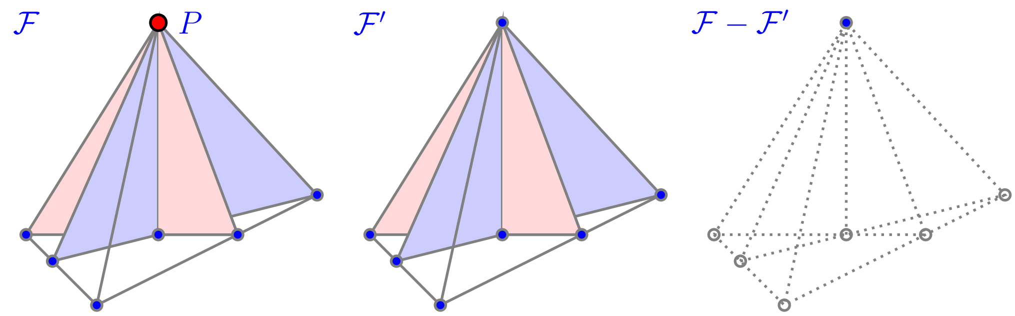
*с кратност на точките, ненадхвърляща $\sigma + s$.*

Формулировката на Задача C, не е така ясна, както тази на предните две. Затова я илюстрираме с два примера.

*Пример* 3.8. За произволна фиксирана степен на просто число $q$ ще разгледаме параметрите $k = 4$ и $d = 2q^3 - 4q^2$. Тогава в горните означения $s = 2$, $\lambda_2 = 4$, $\lambda_0 = \lambda_1 = 0$. Съществуването на грийсмъров код с размерност $k$ и минимално разстояние $d$ е еквивалентно на съществуването на минихипер с параметри $(4v_3, 4v_2)$ и с максимална кратност на точка $s = 2$. Такъв минихипер е по необходимост сума на четири хиперравнини (това следва от характеризацията на $(xv_t, xv_{t-1})$-минихипери, направена в [134]). Оттук следва, че съществува точка с кратност 3, откъдето получаваме, че не съществува 4-мерен грийсмъров код, имащ минимално разстояние $d = 2q^3 - 4q^2$ за всички $q$. Код с параметри $[n, 4, d]_q$ с $n = g_q(4, d) + t$ съществува точно тогава, когато съществува минихипер с някое от множествата от праметри в ред $t$ на таблицата по-долу.

| $s_0$ / $t$ | 2 | 3 | 4 | ... |
|---|---|---|---|---|
| 0 | $(4v_3, 4v_2)$ | | | |
| 1 | $(4v_3 - 1, 4v_2 - 1)$ | $(v_4 + 4v_3 - 1, v_3 + 4v_2 - 1)$ | | |
| 2 | $(4v_3 - 2, 4v_2 - 2)$ | $(v_4 + 4v_3 - 2, v_3 + 4v_2 - 2)$ | $(2v_4 + 4v_3 - 2, 2v_3 + 4v_2 - 2)$ | |
| 3 | $(4v_3 - 3, 4v_2 - 3)$ | $(v_4 + 4v_3 - 3, v_3 + 4v_2 - 3)$ | $(2v_4 + 4v_3 - 3, 2v_3 + 4v_2 - 3)$ | ... |

За параметрите в стълба, индексиран с $s_0$, максималната кратност на точка е ограничена от $s_0$. Така минихиперите с параметри в първия стълб са с максимална кратност на точка равна на 2, максималната кратност на точка за параметрите във втория стълб е равна на 3 и т.н. Да разгледаме сумата на четири равнини в $\mathrm{PG}(3, q)$, имащи обща точка $P$, но никои три от които нямат обща права. Намаляваме кратността на $P$ с две (вж. Теорема 3.10). Получаваме $(4v_3 - 2, 4v_2 - 2)$-минихипер, а с това и код с $t = 2$.




Да отбележим, че за $q = 5$ е известно съществуването на $[189, 4, 150]_5$-код, което дава дори $n_5(4, 150) = g_5(4, 150) + 1$.

*Пример* 3.9. Да разгледаме случая $d = q^3 - 4q^2$. Тогава $s = 1$, $\lambda_2 = 4$, $\lambda_1 = \lambda_0 = 0$, и максималните кратности на точка в горната таблица се намаляват с 1. Така минихиперите, имащи параметри в първия стълб трябва да са проективни, във втория стълб трябва да имат максимална кратност на точка 2 и т.н. Сега конструкцията от горния пример дава кодове с много голямо $t$, тъй като трябва да намалим кратностите на всички точки $P$, за които $\mathcal{K}(P) > 1$. Тук можем да използваме друг подход и да разгледаме сумата на $4q$ прави, съдържащи се в *спред*. [1] Сумата на тези $4q$ прави дава минихипер с параметри $(4qv_2, 4qv_1)$. Разбира се, трябва да сме сигурни, че такъв спред съдържа поне $4q$ прави, но това е вярно за всички $q \geq 4$. В $\mathrm{PG}(3, q)$ съществува пълен спред от прави, т.е. покриващ всички точки с $q^2 + 1$ прави. Ясно е, че за $q \geq 4$ имаме $q^2 + 1 \geq 4q$. Като изпозваме равенството $v_i = qv_{i-1} + 1$ получаваме, че този минихипер е с параметри $(4v_3 - 4, 4v_2 - 4)$, т.е. за $k = 4$, $d = q^3 - 4q^2$ имаме $t \leq 4$ за всяко $q$. Известно е, че за $q = 5$ може да се конструира код с $d = 25$ и $t = 2$. Всъщност това е единствената стойност за $d$ в случая $q = 5$, $k = 4$, при която $t = 2$; за всички останали стойности на $d$ имаме $t \leq 1$.

---

[1] Едно множество $\mathcal{F}$ от $r$-мерни подпространства на $\mathrm{PG}(n, q)$ наричаме *$r$-спред*, ако подпространствата от $\mathcal{F}$ образуват разбиване на точковото множество на $\mathrm{PG}(n, q)$. За да съществува $r$-спред в $\mathrm{PG}(n, q)$ е необходимо и достатъчно $r + 1$ да дели $n + 1$. Така спредове от прави, например, съществуват във всички геометрии с нечетна размерност.

## 3.2 Обща конструкция

Започваме този раздел с едно обобщение на Пример 3.8, който в известен смисъл представлява обобщение на конструкцията на Белов, Логачов и Сандимиров.

**Теорема 3.10.** *Нека $d = sq^{k-1} - \lambda_{k-2}q^{k-2} - \ldots - \lambda_1 q - \lambda_0$, и нека мултимножеството $\mathcal{F}$ е минихипер в $\mathrm{PG}(k-1,q)$ с параметри*

$$(\sigma v_k + \lambda_{k-2}v_{k-1} + \ldots + \lambda_0 v_1 - \tau_1, \sigma v_{k-1} + \lambda_{k-2}v_{k-2} + \ldots + \lambda_1 v_1 - \tau_1).$$

*Дефинираме мултимножеството $\mathcal{F}'$ по следния начин:*

$$\mathcal{F}'(x) = \begin{cases} \mathcal{F}(x), & \text{ако } \mathcal{F}(x) \le \sigma + s, \\ \sigma + s, & \text{ако } \mathcal{F}(x) > \sigma + s. \end{cases}$$

*Нека $N = |\mathcal{F}|$ и $N' = |\mathcal{F}'|$. Ако $\mathcal{F} - \mathcal{F}'$ е $(N - N', \tau_2)$-арка, то съществува $(g_q(k,d)+t, w_q(k,d)+t)$-арка в $\mathrm{PG}(k-1,q)$, или, еквивалентно, линеен код с параметри $[g_q(k,d)+t, k, d]_q$, където $t = \tau_1 + \tau_2$.*

*Доказателство.* Минихиперът $\mathcal{F}'$ има параметри

$$(\sigma v_k + \lambda_{k-2}v_{k-1} + \ldots + \lambda_0 v_1 - \tau_1 - (N-N'), \sigma v_{k-1} + \lambda_{k-2}v_{k-2} + \ldots + \lambda_1 v_1 - \tau_1 - \tau_2),$$

тъй като според конструкцията кратността на всяка хиперравнина се намалява най-много с $\tau_1$. Нещо повече, кратността на всяка точка е най-много $\sigma + s$. Увеличавайки кратностите на подходящо избрани точки построяваме минихипер $\mathcal{F}''$ с параметри

$$(\sigma v_k + \lambda_{k-2}v_{k-1} + \ldots + \lambda_0 v_1 - (\tau_1+\tau_2), \sigma v_{k-1} + \lambda_{k-2}v_{k-2} + \ldots + \lambda_1 v_1 - (\tau_1+\tau_2))$$

и максимална кратност на точка $\sigma + s$. Ако $\mathcal{P}$ е множеството от точки на $\mathrm{PG}(k-1,q)$, то мултимножеството $(\sigma+s)\chi_{\mathcal{P}} - \mathcal{F}''$ е $(g_q(k,d)+t, w_q(k,d)+t)$-арка в $\mathrm{PG}(k-1,q)$. □

Фиксираме целите числа $t$ и $k$ и нека $q$ е степен на просто число. Дефинираме множеството:

$$D_q^{(t)}(k) := \{d \in \mathbb{Z}^+ \mid n_q(k,d) = g_q(k,d) + t\},$$

което се състои от тези минимални разстояния при фиксирана размерност $k$, за които оптималната дължина на $[n,k,d]_q$-код надхвърля с $t$ стойността, получена от границата на Griesmer.

**Лема 3.11.** *Ако $d \in D_q^{(t)}(k)$, то $d-1 \in D_q^{(t')}(k)$, където*

$$t' \leq t + \sum_{j=1}^{k-2} \left( \lceil \frac{d}{q^j} \rceil - \lceil \frac{d-1}{q^j} \rceil \right).$$

*Доказателство.* От условието на лемата следва, че съществува код с параметри $[g_q(k,d)+t, k, d]_q$. Използвайки подходящо съкращаване можем да конструираме линеен $[g_q(k,d)+t-1, k, d-1]_q$-код. Следователно, $n_q(k, d-1) \leq g_q(k,d) + t - 1$.

Нека $d$ е представено във вида (3.1), а с $i$ е означен най-малкият индекс, за който

$$\lambda_0 = \ldots = \lambda_{i-1} = q-1, \lambda_i < q-1.$$

Тогава $d - 1 = q^{k-1} - \lambda_{k-2}q^{k-2} - \ldots - (\lambda_i + 1)q^i$ и от (3.2) получаваме

$$g_q(k,d) - g_q(k,d-1) = i + 1. \tag{3.7}$$

От друга страна имаме

$$\lceil \frac{d}{q^j} \rceil = \begin{cases} \lceil \frac{d-1}{q^j} \rceil + 1 & \text{за } j = 1, \ldots, i, \\ \lceil \frac{d-1}{q^j} \rceil & \text{за } j = i+1, \ldots, k-2, \end{cases}$$

откъдето

$$\sum_{j=1}^{k-2} \left( \lceil \frac{d}{q^j} \rceil - \lceil \frac{d-1}{q^j} \rceil \right) = i. \tag{3.8}$$

Ако $d - 1 \in D_q^{(t')}(k)$ от (3.7) и (3.8) получаваме, че

$$\begin{aligned} t' &\leq g_q(k,d) - g_q(k,d-1) + t - 1 \\ &= t + \sum_{j=1}^{k-2} \left( \lceil \frac{d}{q^j} \rceil - \lceil \frac{d-1}{q^j} \rceil \right). \end{aligned}$$

□

**Следствие 3.12.** *Ако $d \in D_q^{(t)}(k)$ и $d' < d$, то $d' \in D_q^{(t')}(k)$, където*

$$t' \leq t + \sum_{j=1}^{k-2} \left( \lceil \frac{d}{q^j} \rceil - \lceil \frac{d'}{q^j} \rceil \right).$$

*По-специално, ако $k = 3$ имаме*

$$t' \leq t + \lceil \frac{d}{q} \rceil - \lceil \frac{d'}{q} \rceil.$$

Сега ще докажем, че за четни размерности $k$ функцията $t_q(k)$ не надхвърля $q^{k/2}$. Тази оценка, макар да е груба, е най-добрата, която имаме към настоящия момент. Нека отново $d$ е предствено във вида (3.1) и да положим $k = 2l$. Ако за всяко такова $d$ съществува проективен минихипер в $\mathrm{PG}(k-1,q)$ с параметри

$$(\lambda_{k-2}v_{k-1} + \ldots + \lambda_1 v_2 - t_0, \lambda_{k-2}v_{k-2} + \ldots + \lambda_1 v_1 - t_0)$$

то тогава $t_q(k) \leq t_0$.

**Теорема 3.13.** *Ако $k = 2l$, то*

$$t_q(k) \leq 2\frac{q^l - 1}{q-1} - (2l + q - 1).$$

*Доказателство.* Нека $d = sq^{k-1} - \lambda_{k-2}q^{k-2} - \ldots - \lambda_1 q - \lambda_0$. От четността на $k$ следва, че съществува разбиване $\mathcal{S}$ на точките от $\mathrm{PG}(k-1,q)$ на подпространства с размерност $l-1$, което наричаме също $(l-1)$-спред в $\mathrm{PG}(k-1,q)$. Избирайки подпространства от $\mathcal{S}$, можем да конструираме минихипер в $\mathrm{PG}(k-1,q)$ с параметри

$$\left((\lambda_{k-2}q^{k/2-1} + \ldots + \lambda_{k/2-1})v_{k/2}, (\lambda_{k-2}q^{k/2-1} + \ldots + \lambda_{k/2-1})v_{k/2-1}\right).$$

Като използваме $v_{i+1} = qv_i + 1$ получаваме

$$\begin{aligned}
\left(\sum_{i=0}^{k/2-1} \lambda_{k/2+i-1}q^i\right) v_{k/2} &= (\lambda_{k-2}q^{k/2-2} + \ldots + \lambda_{k/2})v_{k/2+1} + \\
&\qquad \lambda_{k/2-1}v_{k/2} - (\lambda_{k-2}q^{k/2-2} + \ldots + \lambda_{k-2}) \\
&= (\lambda_{k-2}q^{k/2-3} + \ldots + \lambda_{k/2+1})v_{k/2+1} + \lambda_{k/2}v_{k/2+1} + \\
&\quad \lambda_{k/2-1}v_{k/2} - (\lambda_{k-2}q^{k/2-2} + \ldots + \lambda_{k/2}) + \\
&\qquad (\lambda_{k-2}q^{k/2-3} + \ldots + \lambda_{k/2+1}) \\
&= \lambda_{k-2}v_{k-1} + \ldots + \lambda_{k/2-1}v_{k/2} - \sum_{i=k/2}^{k-2} \lambda_i v_{i-k/2+1} \\
&= \sum_{i=1}^{k-2} \lambda_i v_{i+1} - \sum_{i=k/2}^{k-2} \lambda_i v_{i-k/2+1} - \sum_{i=1}^{k/2-2} \lambda_i v_{i+1}
\end{aligned}$$

Да отбележим, че $\lambda_{k-2}v_{k-1}+\ldots+\lambda_{k/2-1}v_{k/2} < q^{k/2}+1$, т.е. винаги е наличен необходимият брой $(l-1)$-подпространства в спреда. Конструираният по този начин минихипер е с параметри $(N, W)$, където

$$\begin{aligned} N &= \lambda_{k-2}v_{k-1} + \ldots + \lambda_1 v_2 - t_0 \\ W &= \lambda_{k-2}v_{k-2} + \ldots + \lambda_1 v_1 - t_0, \end{aligned}$$

и

$$t_0 = \sum_{i=k/2}^{k-2} \lambda_i v_{i-k/2+1} - \sum_{i=1}^{k/2-2} \lambda_i v_{i+1}.$$

Тъй като $\lambda_i \leq q-1$ за всяко $i$ имаме

$$\begin{aligned} t_0 &\leq \sum_{i=k/2}^{k-2} (q-1)v_{i-k/2+1} - \sum_{i=1}^{k/2-2} (q-1)v_{i+1} \\ &= \sum_{i=1}^{k/2-1} (q^i-1) - \sum_{i=2}^{k/2-1} (q^i-1) \\ &= 2 \cdot \sum_{i=1}^{k/2-1} (q^i-1) - (q-1) \\ &= 2\frac{q^l-1}{q-1} - (2l+q-1). \qquad \square \end{aligned}$$

В специалния случай $k=4$ получаваме следния резултат.

**Следствие 3.14.**

$$t_q(4) \leq q-1.$$

$\square$

За кодове от нечетна размерност идеята на Теорема 3.13, състояща се във взимане на подпростространства с размерност $k/2$ от подходящо избран спред, не дава добра оценка. По-добра горна граница се получава от неравенството $t_q(k-1) \leq t_q(k)$.

## 3.3 Случаят $k = 3$

Конструирането на добри тримерни кодове над $\mathbb{F}_q$ е еквивалентно на конструирането на добри арки в проективната равнина $\mathrm{PG}(2, q)$. Максималните мощности за проективни арки са известни за всички равнини от редове $q \leq 9$, а добри граници са намерени за всички равнини от ред $q \leq 29$ [6, 110]. В [6] е поставен следният въпрос, който е свързан със Задача B, която формулирахме по-горе:

*Вярно ли е, че за фиксирано $n - d$ съществува тримерен линеен $[n, 3, d]$-код, лежащ на границата на* GRIESMER *(или поне лежащ близо до границата на* GRIESMER, *може би различаващ се от нея с константа или с $\log q$)?*

Ясно е, че отговорът на първата част от този въпрос е "не". Нека например $w = n - d = q + 2$. Оптималните арки имат мощност $q^2 + q + 2$ и не са асоциирани с кодове на GRIESMER (вж. напр. [11]). Наистина, не съществуват $(q^2+q+3, q+2)$-арки, тъй като те задължително имат 2-точки и мощността им е ограничена отгоре от $2+(q+1)q$ (броене на кратностите на правите през 2-точка). От друга страна, една $(q^2 + q + 2, q + 2)$-арка се асоциира с $[q^2+q+2, 3, q^2]_q$-код, който не е грийсмъров: $g_q(3, q^2) = q^2+q+1$ . Втората част на въпроса на S. BALL поставя въпроса за горна граница на $t_q(3)$ като изказва две хипотези $t_q(3) \leq c$ и $t_q(3) \leq \log q$. Съществуващите таблици показват, че $t_q(3) \leq 2$ за всички $q \leq 29$. Към настоящия момент не е известно $w$, за което съществуващите оптимални $(n, w)$-арки водят до оптимални кодове, надхвърлящи гарницата на GRIESMER с 2. Затова ще преформулираме втората част на въпроса на BALL по следния начин:

*Вярно ли е, че за всяко фиксирано $w = n-d \leq q^2-q$ съществуват константа $c$ и тримерен линеен код с минимално разстояние $d$, чиято дължина надхвърля най-много със $c$ стойността $g_q(k, d)$, дадена от границата на* GRIESMER?

Макар че $\log_2 q$ изглежда груба оценка за $t_q(3)$, не съществува доказателство на това неравенство за нечетно $q$. По-долу ще докажем този резултат за равнини над полета с четна характеристика. Доказателството се опира на съществуването на максимални арки в равнини от четен ред [45, 155, 188].

От Лема 3.6 следва, че е достатъчно да се ограничим до случая на кодове с $d \leq q^2$. Ясно е, че можем да запишем $d$ във вида $d = q^2 - \lambda_1 q - \lambda_0$.

Оттук лесно получаваме, че

$$g_q(3,d) = v_3 - \lambda_1 v_2 - \lambda_0, w_q(3,d) = v_2 - \lambda_1 \leq q+1.$$

Тъй като съществуват тривиални примери на грийсмърови арки с $w = q$ и $q+1$ (това са съответно $\mathrm{AG}(2,q)$ и $\mathrm{PG}(2,q)$), ще разглеждаме стойности за $w$, удовлетворяващи $w \leq q-1$. Следващата полезна лема свързва границата на Griesmer с тривиалната горна граница за мощността на $(n,w)$-арка в $\mathrm{PG}(2,q)$.

**Лема 3.15.** *Нека $\mathcal{K}$ е $(n,w)$-арка в $\mathrm{PG}(2,q)$, за която $w \leq q-1$. Ако $n = (w-1)q + w - \alpha$ и $d = n - w$, то $n = t + g_q(3,d)$, където $t = \lfloor \alpha/q \rfloor$.*

*Доказателство.* Тъй като $d = (w-1)q - \alpha$ и $w \leq q-1$, имаме $\lceil d/q^2 \rceil = 1$ и

$$\begin{aligned} g_q(3,d) &= d + \lceil \frac{d}{q} \rceil + \lceil \frac{d}{q^2} \rceil \\ &= (w-1)q - \alpha + (w-1) - \lfloor \frac{\alpha}{q} \rfloor + 1 \\ &= n - \lfloor \frac{\alpha}{q} \rfloor. \end{aligned}$$

□

Сега ще докажем, че в случая на четно $q$ сумата на $r$ максимални арки дава линеен код, който се отклонява от границата на Griesmer най-много с $r-1$.

**Лема 3.16.** *Нека $q = 2^h$ и нека $\mathcal{K}_i$, $i = 1, \ldots, r$, са максимални арки. Дефинираме арката $\mathcal{K} = \sum_{i=1}^{r} \mathcal{K}_i$. Ако кодът $C_{\mathcal{K}}$, асоцииран с $\mathcal{K}$ има параметри $[n,3,d]_q$, то $n = g_q(3,d) + (r-1)$.*

*Доказателство.* Нека за всяко $i = 1, 2, \ldots, r$ е избрана максимална арка $\mathcal{K}_i$ с параметри $((2^{a_i}-1)q + 2^{a_i}, 2^{a_i})$, $a_i \in \{1, \ldots, h-1\}$. Сега сумата на арките $\mathcal{K}_i$, $\mathcal{K} = \sum \mathcal{K}_i$, има параметри

$$(N,W) = ((2^{a_1} + \ldots + 2^{a_r} - r)q + 2^{a_1} + \ldots + 2^{a_r}, 2^{a_1} + \ldots + 2^{a_r}).$$

Арките $\mathcal{K}_i$ могат да бъдат избрани по такъв начин, че $W$ да има точно стойността, дадена в горния израз. Тогава мощността $N$ може да се представи като

$$\begin{aligned} N &= (2^{a_1} + \ldots + 2^{a_r} - 1)q + (2^{a_1} + \ldots + 2^{a_r}) - (r-1)q \\ &= (W-1)q + W - (r-1)q. \end{aligned}$$

и резултатът се получава от Лема 3.15, в която сме взели $\alpha = (r-1)q$. □

**Лема 3.17.** *Нека* $q = 2^h$. *Всяко цяло число* $m \leq q$ *може да се представи във вида* $m = 2^{a_1} + \ldots + 2^{a_r} - r$, *където* $a_i \in \{1, \ldots, h-1\}$ *и* $r \leq h$.

*Доказателство.* Ще използваме индукция по $h$. За малки стойности на $h$ търсените представяния се намират лесно. Да допуснем, че лемата е вярна за $q = 2^h$ и нека $q' = 2^{h+1}$. Достатъчно е да покажем, че такива представяния съществуват за всички цели числа от вида $m = q+\beta$, където $\beta = 1, \ldots, q-1$, тъй като $q' = 2^{h+1} + 2^1 - 2$. Съгласно индукционното допускане имаме $\beta + 1 = 2^{a_1} + \ldots + 2^{a_r} - r$ с $a_i \in \{1, \ldots, h-1\}$, $r \leq h$. Сега

$$q + \beta = (2^h - 1) + (\beta + 1) = (2^h + 2^{a_1} + \ldots + 2^{a_r}) - (r + 1),$$

което е желаното представяне. $\square$

**Теорема 3.18.** *Ако* $q = 2^h$, *то* $t_q(3) \leq \log_2 q - 1$.

*Доказателство.* От Следствие 3.12 е ясно, че е достатъчно да разглеждаме само стойности на $d$, за които $d \leq q^2 - 2q$. Да запишем $d$ във вида $d = q^2 - \lambda q = (q - \lambda)q = jq$, $j = 1, \ldots, q-2$. Съгласно Лема 3.17 всяко цяло $j \in \{2, \ldots, q-2\}$ може да се представи като $j = 2^{a_1} + \ldots + 2^{a_r} - r$ за някое $r \leq h = \log_2 q$. От Лема 3.16 следва, че съществува $(n, w)$-арка с $n = jq + j + r$ и $w = j + r$, която е сума на $r$ максимални арки в $\mathrm{PG}(2, q)$. Съгласно Лема 3.15, дължината на линейния код, асоцииран с тази арка, надхвърля с $r - 1 = \log_2 q - 1$ границата на Griesmer $g_q(3, d)$. $\square$

**Теорема 3.19.** *Ако* $q$ *е четна степен на просто число, то* $t_q(3) \leq \sqrt{q} - 1$.

*Доказателство.* От резултат на R. Hill и J. Mason [104] (вж. също [110]) за $q$ четна степен на просто число, съществува $(n, w)$-арка с $n = (w-1)q + w - \sqrt{q}(q - w + 1)$. Това е смислено за $n - w > 0$, т.е. $w > \sqrt{q} + \frac{1}{\sqrt{q}+1}$. Следователно разглеждаме стойности за $w$, ограничени от

$$\sqrt{q} + 1 \leq w \leq q - 1.$$

Да положим $w = \sqrt{q} + \epsilon$, където $\epsilon \in \{1, \ldots, q - \sqrt{q} - 1\}$. Тези арки са свързани с кодове с минимално разстояние $d_\epsilon = \epsilon q - (\epsilon - 1)\sqrt{q}$. Може да се провери, че за $\epsilon = 1$, т.е. $d = q$, $n = g_q(3, d) + (\sqrt{q} - 1)$. За $\epsilon \geq 1$, $n = g_q(3, d_\epsilon) + t$, където $t \leq \sqrt{q} + 2$. Сега резултатът се получава от Следствие 3.12. $\square$

N. HAMADA [87] изказа хипотезата, че в случая на тримерни кодове $t_q(3) = 1$, т.е. винаги има тримерен код, надхвърлящ най-много с единица стойността, дадена от границата на GRIESMER. Геометрично, това е еквивалентно на твърдението (вж. Лема 3.15), че за всяко $w$ съществува $(n, w)$-арка в $\mathrm{PG}(2, q)$, за която $n \geq (w-2)q + w$. Съществуващите таблици за арки с максимален брой точки в равнини над малки полета (вж. напр. [6]) не отхвърлят това предположение. Въпреки това то изглежда твърде оптимистично. По слаба версия би била следната: съществува константа $c$, независеща от $q$, за която $t_q(3) \leq c$. В частна кореспонденция T. MARUTA изказа по-общата хипотеза, че $t_q(k) \leq k - 2$ за всички $q$.

## 3.4 Характеризация на оптимални арки и кодове

Задачата за определяне на точната стойност на $n_4(k, d)$ е решена в размерности $k \leq 4$ за всички минимални разстояния $d$. За следващата размерност $k = 5$ към 2010 г. съществуваха 112 стойности на $d$, за които точната стойност на $n_4(5, d)$ бе неизвестна. В този раздел доказваме несъществуване на грийсмърови кодове за седем стойности на $d$: $d = 295, 296, 297, 298, 347, 348$ и $349$. Това решава десет открити случая за точната стойност на $n_4(5, d)$. Подходът, който използваме е геометричен. Решението се свежда до доказване на несъществуване на арки с определени параметри в $\mathrm{PG}(4, 4)$.

### 3.4.1 Характеризация на $(117, 30)$- и $(118, 30)$-арки в $\mathrm{PG}(3, 4)$

Най-напред ще характеризираме арките с параметри $(118, 30)$ и $(117, 30)$ в проективната геометрия $\mathrm{PG}(3, 4)$.

Нека $\mathcal{K}$ е $(118, 30)$-арка в $\mathrm{PG}(3, 4)$ със спектър $(a_i)_{i\geq 0}$. За максималната кратност на точка, права и равнина Теорема 2.29 дава $w_0 = 2$, $w_1 = 8$, $w_2 = 30$. Тъй като $\mathcal{K}$ е грийсмърова арка, от Теорема 2.31 и Теорема 2.29 следва, че единствените възможни кратности за равнина в $\mathrm{PG}(3, 4)$ са 30, 26, 22, 18, 14 и 6. Да отбележим, че $\mathcal{K}$ няма права с кратност 1, както и че никоя 2-точка не е инцидентна с права с кратност по-малка от 6. Сега равенство (2.6) приема вида

$$6a_{26} + 28a_{22} + 66a_{18} + 120a_{14} + 276a_6 = -372 + 16\lambda_2. \tag{3.9}$$

**Лема 3.20.** *Нека $\mathcal{K}$ е $(118, 30)$-арка в $\mathrm{PG}(3, 4)$. Тогава $a_6 = 0$.*

*Доказателство.* Да допуснем противното и нека $\pi_0$ е 6-равнина. Ясно е, че $\mathcal{K}|_{\pi_0}$ е хиперовал. Равнини през 2-права на $\pi_0$ са с кратност 30, а тези през 0-права са три 30-равнини и една 22-равнина[2]. От (3.9) получаваме $6 \cdot 28 + \binom{24}{2} = -372 + 16\lambda_2$, т.е. $\lambda_2 = 51$. Да изберем 1-точка $P$ в $\pi_0$ и да разгледаме шестнадесетте прави през $P$, несъдържащи се в $\pi_0$. Поне три от тях ще съдържат по четири 2-точки и ще имат кратност 9, което е противоречие с $w_1 = 8$. $\square$

**Лема 3.21.** *Нека $\mathcal{K}$ е $(118, 30)$-арка в* $\mathrm{PG}(3, 4)$.

*(i) Ако $a_{14} > 0$, то $a_{14} = 2$.*

*(ii) Всяка $(118, 30)$-арка в $\mathrm{PG}(3, 4)$ с $a_{14} = 2$ е от вида*

$$\mathcal{K} = 2 - \chi_{\pi'} - \chi_{\pi''} - \chi_{L'} - \chi_{L''}.$$

*Тук $\pi', \pi''$ са равнини, а $L', L''$ – прави в такова взаимно положение, че никоя точка от мултимножеството $\chi_{\pi'} + \chi_{\pi''} + \chi_{L'} + \chi L''$ няма кратност по-голяма от 2.*

*Доказателство.* (i) Да отбележим, че две 14-равнини задължително се пресичат в 0-права. Тъй като 14-равнина не може да има две 0-прави получаваме $a_{14} \leq 2$. Нека допуснем, че в $\mathrm{PG}(3, 4)$ съществува точно една 14-равнина $\pi_0$. Това е или допълнението на права и две различни точки, или допълнението на подравнина на Baer. Така възможните спектри $(b_i)_{i \geq 0}$ на $(14, 4)$-арка са следните:

$$b_4 = 12, b_3 = 8, b_2 = 1, b_1 = 0, b_0 = 1;$$

и

$$b_4 = 14, b_3 = 0, b_2 = 7, b_1 = 0, b_0 = 0.$$

Първата възможност се отхвърля чрез преброяване на приноса на равнините през различните прави на $\pi_0$ към лявата страна на (3.9)[3].

[2] Последното е вярно защото $(26, 7)$-арка $\mathcal{F}$ в $\mathrm{PG}(2, 4)$ няма 0-права. Ако допуснем противното, то броят на 2-точките $\lambda_2(\mathcal{F})$ за такава арка е $\lambda_2(\mathcal{F}) = 5 + \lambda_0(\mathcal{F}) \geq 10$. Оттук следва, че съществуват четири колинеарни 2-точки, което е противоречие.

[3] През 4-права на $\pi_0$ минават четири 30-равнини; през 3-права минават три 30- и една 26-равнина; през 0-права минават две 22- и две 30-равнини (18-равнина няма 0-права). За 2-равнина в $\pi_0$ максимален принос към (3.9) се получава, когато равнините имат кратност 30,30,30,22. Така от (3.9) получаваме $120 + 1 \cdot 56 + 1 \cdot 28 + 8 \cdot 6 \geq -372 + 16\lambda_2$, т.е $\lambda_2 \leq 39$. От друга страна $\lambda_2 = 33 + \lambda_0 \geq 40$, тъй като 14-равнина има седем 0-точки, откъдето $\lambda_0 \geq 7$.

Да разгледаме по-подробно втората възможност, когато $\mathcal{K}|_{\pi_0}$ е допълнение на подравнина на Baer. Да разгледаме 2-права $L$ в $\pi_0$ и да означим равнините през $L$ с $\pi_i$, $i = 0, \ldots, 4$. Да допуснем, че една от $\pi_i$, да кажем $\pi_1$, е 22-равнина. Другите три равнини през $L$ са 30-равнини. Разглеждаме проекция $\varphi$ от коя да е 0-точка $P$ от $L$ в равнина, неинцидентна с $P$. Означаваме с $L_i$, $i = 0, 1, \ldots, 4$, образа на $\pi_i$ при проекцията $\varphi$. За всеки избор на $P$ правата $L_0$ е от тип $(2, 2, 2, 4, 4)$. От класификацията на $(22, 6)$-арките в $\mathrm{PG}(2, 4)$ (вж. [11, 105]), следва, че $L_1$ е от тип (2,2,6,6,6) или (2,4,4,6,6). От класификацията на $(30, 8)$-арките в $\mathrm{PG}(2, 4)$, или, еквивалентно, на $(12, 2)$-блокиращите множества с максимална кратност на точка равна на 2, правите $L_2, L_3, L_4$ са от тип (2,4,8,8,8) или (2,7,7,7,7). Тъй като всяка $(118, 30)$-арка има само равнини с четна кратност, то две от правите $L_2, L_3, L_4$ са от тип $(2, 7, 7, 7, 7)$ и една е от тип $(2, 4, 8, 8, 8)$. Сега е ясно, че в равнината на проектиране има права от тип $(4, 6, 7, 7, 8)$, която е прообраз на 32-равнина, противоречие с параметрите на $\mathcal{K}$.

С това доказахме, че по 2-права на $\pi_0$ минават две 26-равнини и две 30 равнини. Сега равенството (3.9) отново води до противоречие. Наистина,

$$\binom{16}{2} + 7 \cdot 12 \geq -372 + 16\lambda_2,$$

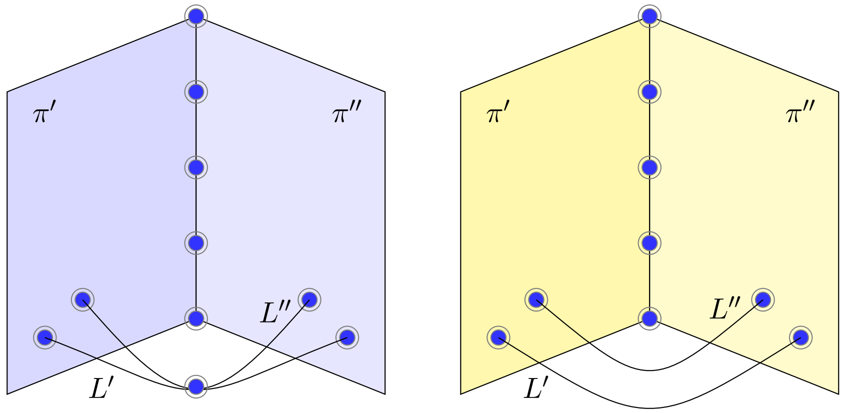
т.е. $\lambda_2 \leq 36$, което противоречи на $\lambda_2 = 33 + \lambda_0 \geq 40$. Следователно, ако $a_{14} > 0$, то $a_{14} = 2$.

(ii) Всяка $(118, 30)$-арка $\mathcal{K}$ в $\mathrm{PG}(3, 4)$ с $a_{14} = 2$ може да се опише като

$$\mathcal{K} = 2 - \mathcal{F},$$

където $\mathcal{F}$ е $(52, 12)$-блокиращо множество от вида $\mathcal{F} = \chi_{\pi'} + \chi_{\pi''} + \mathcal{G}$ с максимална кратност на точка, равна на 2. $\mathcal{G}$ е $(10, 2)$-блокиращо множество в $\mathrm{PG}(3, 4)$ и, следователно, е сума на две прави $L'$ и $L''$ (вж. [134]). Равнините $\pi'$ и $\pi''$ трябва да са избрани така, че максималната кратност на точка в $\mathcal{F}$ да не надхвърля 2. $\square$

*Забележка* 3.22. С известни усилия можем да получим, че съществуват точно три нееквивалентни $(118, 30)$-арки в $\mathrm{PG}(3, 4)$. В случая, когато $L'$ и $L''$ се пресичат получаваме единствена арка, докато в случая на кръстосани прави получаваме две проективно нееквивалентни арки. Тези два случая са илюстрирани на фигурите по-долу като са представени двете възможности за $(52, 12)$-блокиращото множество $\mathcal{F}$.




Да отбележим, че в първия случай равнината $\langle L', L''\rangle$ е с кратност 18 по отношение на $\mathcal{K}$.

**Лема 3.23.** *За всяка* $(118, 30)$*-арка* $\mathcal{K}$ *в* $\mathrm{PG}(3, 4)$*, за която* $a_{14} = 0$ *и* $a_{18} > 0$ *е изпълнено* $a_{18} = 2$*.*

*Доказателство.* Нека $a_{14} = 0, a_{18} > 0$ и нека $\pi_0$ е 18-равнина. Ясно е, че в $\pi_0$ всички точки са с кратност 0 или 1. Възможните спектри за арката $\mathcal{K}|_{\pi_0}$ са следните:

$$b_5 = 8, b_4 = 12, b_3 = 0, b_2 = 1, b_1 = 0, b_0 = 0;$$

или

$$b_5 = 9, b_4 = 9, b_3 = 3, b_2 = 0, b_1 = 0, b_0 = 0.$$

и съответстват на случаите, когато трите 0-точки на 18-равнината са колинеарни или неколинеарни. Втората възможност отхвърляме отново като оценяваме приноса на равнините през различните прави от $\pi_0$ към лявата страна на (3.9). Тук трябва да отчетем, че никоя $(22, 6)$-арка в $\mathrm{PG}(2, 4)$ няма 3-права (вж. [11]).

Повтаряме същия аргумент за първия спектър. Отново оценяваме приноса на равнините през различните прави на $\pi_0$ към дясната страна на (3.9) и получаваме $66 + 8 \cdot 0 + 12 \cdot 6 + 1 \cdot 66 \geq -372 + 16\lambda_2$, откъдето $\lambda_2 \leq 36$. От друга страна, $\lambda_2 = 33 + \lambda_0 \geq 36$ и следователно $\mathcal{K}$ има две 18-равнини, които се пресичат по 2-права. Следователно единственият възможен спектър за $(118, 30)$-арка с $a_{18} > 0, a_{14} = 0$ е: $a_{30} = 71$, $a_{26} = 12$, $a_{18} = 2$, $\lambda_0 = 3$, $\lambda_2 = 36$.

Съществуват две нееквивалентни арки с този спектър. Те се получават по следния начин. Нека $L$ е права и нека $\pi_0, \pi_1, \ldots, \pi_4$ са равнините през $L$. Фиксираме три точки върху $L$ и ги означаваме с $P_0$, $P_1$, $P_2$. Дефинираме мултимножество $\mathcal{L}$ по следния начин:

$$\mathcal{L}(P) = \begin{cases} 1, & \text{ако } P \in (\pi_3 \cup \pi_4); \\ 2, & \text{ако } P \in (\pi_0 \cup \pi_1 \cup \pi_2) \setminus L. \end{cases}$$

Сега можем да конструираме $(118, 30)$-арка с $a_{18} = 2$ във вида $\mathcal{K} = \mathcal{L} - \mathcal{F}$, където $\mathcal{F}$ е проективно $(15, 3)$-блокиращо множество, съдържащо се в $\pi_0 \cup \pi_1 \cup \pi_2$ и пресичащо $L$ в три точки. Съществуват две възможности за такова блокиращо множество: (1) сума на три кръстосани прави, съдържащи се съответно в $\pi_0$, $\pi_1$ и $\pi_2$, и (2) подгеометрия $\mathrm{PG}(3, 2)$, съдържаща се в $\pi_0 \cup \pi_1 \cup \pi_2$ и пресичаща $L$ в три точки. Ясно е, че тези арки не са проективно еквивалентни. Тъй като няма други блокиращи множества с параметри $(15, 3)$, горната конструкция дава всички $(118, 30)$-арки в $\mathrm{PG}(3, 4)$ с $a_{14} = 0, a_{18} > 0$. $\square$

Оставащите $(118, 30)$-арки, които не са описани в Лема 3.21 и Лема 3.23 са с възможни кратности на равнините 22, 26 и 30. Най-лесно тези арки се описват чрез дуалната конструкция от раздел 2.1.4.

**Лема 3.24.** *Съществуват три проективно нееквивалентни арки в* $\mathrm{PG}(3, 4)$ *с параметри* $(118, 30)$*, за които* $a_{14} = a_{18} = 0$.

*Доказателство.* Нека $\mathcal{K}$ е $(118, 30)$-арка в $\mathrm{PG}(3, 4)$, за която $a_{14} = a_{18} = 0$. Разглеждаме арката $\mathcal{K}^\sigma$, която е $\sigma$-дуална на $\mathcal{K}$ със $\sigma(x) = \frac{1}{4}(30 - x)$. С други думи, в дуалната геометрия 22-равнините стават точки с кратност 2, равнините с кратност 26 – точки с кратност 1 и 30-равнините – точки с кратност 0. От своя страна точките с кратност 0 стават равнини в дуалната геометрия с кратност 10, точките с кратност 1 са 6-равнини и точките с кратност 2 стават 2-равнини. Това се проверява чрез сумиране на кратностите на равнините съответно през 0-, 1- и 2-точка. Тогава $\mathcal{K}^\sigma$ е $(18, 10)$-арка с числа на пресичане 2, 6 и 10 и максимална кратност на точка 2.

Ще покажем, че съществуват точно три такива $(18, 10)$-арки в $\mathrm{PG}(3, 4)$. Те се описват както следва. Нека $\mathcal{O}$ е хиперовал и нека $L$ и $L'$ са две различни прави, които не са в равнината на хиперовала, но минават през фиксирана точка от $\mathcal{O}$. Първите две арки са съответно $2\chi_{\mathcal{O} \triangle L}$ и

$\chi_{\mathcal{O}\triangle L} + \chi_{\mathcal{O}\triangle L'}$. (Тук $A\triangle B$ е симетричната разлика на $A$ и $B$.) Третата арка се получава като вземем две копия на следните точки:

$$\begin{array}{ccccc} (1,0,0,0) & (0,1,0,0) & (0,0,1,0) & (0,0,0,1) & (1,\alpha,\alpha,\alpha) \\ & (1,1,0,0) & (1,0,1,0) & (1,0,0,1) & (1,\alpha^2,\alpha^2,\alpha^2) \end{array}$$

Спектрите на съответните $(18,10)$-арки са

$$\lambda_2 = 9, \lambda_1 = 0, \lambda_0 = 76, b_{10} = 6, b_6 = 40, b_2 = 39.$$

$$\lambda_2 = 5, \lambda_1 = 8, \lambda_0 = 72, b_{10} = 2, b_6 = 48, b_2 = 35.$$

□

От доказаните по-горе твърдения получаваме следната характеризация на $(118,30)$-арките в $\mathrm{PG}(3,4)$:

($\alpha$) $\mathcal{K} = 2-\mathcal{F}$, където $\mathcal{F}$ е $(52,12)$-блокиращо множество; $\mathcal{F}$ е сума на две равнини и две прави, взети така, че максималната кратност на точка е 2. Възможни са два спектъра:

$$\begin{array}{ll} a_{14} = 2, a_{22} = 0, a_{26} = 10, a_{30} = 73, & \lambda_0 = 9, \lambda_1 = 34, \lambda_2 = 42; \\ a_{14} = 2, a_{22} = 1, a_{26} = 8, a_{30} = 74, & \lambda_0 = 10, \lambda_1 = 32, \lambda_2 = 43 \end{array}$$

($\beta$) $\mathcal{K} = 2-\chi_{\pi_0\cup\pi_1}+\chi_L-\mathcal{F}$, където $\pi_i$ са равнините през фиксирана права $L$, а $\mathcal{F}$ е $(15,3)$-блокиращо множество, съдържащо се в $\pi_2\cup\pi_3\cup\pi_4$. Съществуват две такива арки; те се получават, ако блокиращото множество $\mathcal{F}$ е (а) сума на три кръстосани прави; (б) подгеометрията $\mathrm{PG}(3,2)$. И в двата случая получаваме един и същ спектър:

$$a_{18} = 2, a_{22} = 0, a_{26} = 12, a_{30} = 71, \lambda_0 = 3, \lambda_1 = 46, \lambda_2 = 36.$$

($\gamma$) $\mathcal{K}$ е дуална на мултимножество с мощност 18 и максимална кратност на точка 2 и числа на пресичане 2, 6, 10. Съществуват три такива мултимножества, които дават два възможни спектъра за $\mathcal{K}$:

$$\begin{array}{lll} (\gamma') & a_{22} = 5, a_{26} = 8, a_{30} = 73, & \lambda_0 = 2, \lambda_1 = 48, \lambda_2 = 35; \\ (\gamma'') & a_{22} = 9, a_{26} = 0, a_{30} = 76, & \lambda_0 = 6, \lambda_1 = 40, \lambda_2 = 39. \\ (\gamma''') & a_{22} = 9, a_{26} = 0, a_{30} = 76, & \lambda_0 = 6, \lambda_1 = 40, \lambda_2 = 39. \end{array}$$

($\gamma'$) Двете 0-точки са инцидентни с 6-права; равнините през тази 6-права са с кратности съответно 22, 30, 30, 30, 30.

($\gamma''$) Съществува 30-равнина, съдържаща всичките шест 0-точки; пет от тях са колинеарни; равнините през образуваната 0-права имат кратности 30, 22, 22, 22, 22; 2-точките, нележащи в тази 30-равнина образуват конус с връх шестата 0-точка и хиперовал като управителна крива.

($\gamma'''$) Съществува 22-равнина със седем 2-точки; през всяка от четирите ѝ 2-прави минават две 22- и две 30-равнини; всяка от тези 22-равнини съдържа четири 2-точки (за характеризацията на $(q^2+q+2, q+2)$-арките вж. [11, 105]).

*Забележка* 3.25. Да отбележим, че ако $\mathcal{K}$ е $(118, 30)$-арка, то всяка 26-равнина има 0-точка. Арките от тип ($\alpha$) имат 0-права. Арките от тип ($\beta$) имат 2-права, през която минават две 18- и три 30-равнини. Арките от тип ($\gamma'$) имат 6-права, съдържаща три 2-точки; осемте 26-равнини минават през 0-точките на горната 6-права.

**Лема 3.26.** *Всяка* $(117, 30)$*-арка в* $\mathrm{PG}(3, 4)$ *е разширима.*

*Доказателство.* Да допуснем противното и нека $\mathcal{K}$ е неразширима $(117, 30)$-арка в $\mathrm{PG}(3, 4)$. Ще стигнем до противоречие със Следствие 2.34 като докажем, че

$$\sum_{i \not\equiv n, n+1 \pmod q} a_i \leq \frac{q^{k-3} r(q)}{q-1} = \frac{4 \cdot 2}{3},$$

т.е. $\displaystyle\sum_{i \not\equiv n, n+1 \pmod q} a_i \leq 2.$

Съгласно Лема 2.29 арката $\mathcal{K}$ няма равнини с кратности: 2, 3, 4, 7, 8, 10, 11, 12, 23, 24, 28. От (2.6) получаваме

$$\sum_{i=0}^{28} \binom{30-i}{2} a_i = -348 + 16\lambda_2. \tag{3.10}$$

Да допуснем, че $a_i > 0$, за $i = 0, 1, 5$ или 6. Тогава $a_i = 1$ и за всички останали равнини $\pi$ имаме $\mathcal{K}(\pi) \geq 21$. Понеже 27-равнина не може да има 0- или 1-прави, то $\sum_{i \not\equiv n, n+1 \pmod q} a_i = 1$ и $\mathcal{K}$ е разширима. Следователно $a_0 = a_1 = a_5 = a_6 = 0$.

Да допуснем, че $a_9 > 0$, т.е. $a_9 = 1$. За кратностите на коя да е равнина $\pi$ през 0-права в 9-равнина имаме $\mathcal{K}(\pi) \geq 18$; следователно за всяка такава равнина $\mathcal{K}(\pi) \equiv n, n+1 \equiv 1, 2 \pmod 4$. Аналогично, всяка равнина, пресичаща 9-равнина в 1-, 2- или 3-права не може да е с кратност $\mathcal{K}(\pi) \not\equiv 1, 2 \pmod 4$. Следователно $\sum_{i \not\equiv n, n+1 \pmod q} a_i = 1$ и $\mathcal{K}$ е разширима, откъдето получаваме и $a_9 = 0$.

За да докажем разширимостта на арката $\mathcal{K}$ използваме Следствие 2.34, съгласно което е достатъчно да покажем, че

$$a_{15} + a_{16} + a_{19} + a_{20} + a_{27} \leq 2.$$

Нека $a_{16} > 0$ и нека $\pi$ е 16-равнина. Арката $\mathcal{K}|_\pi$ има спектър $b_0 = 1$, $b_4 = 20$. Четирите равнини, различни от $\pi$ през 4-права на $\pi$ имат кратности 30, 29, 29, 29. Най-много една от равнините през 0-права в $\pi$ е с кратност $\not\equiv n, n+1 \pmod q$. Следователно $\sum_{i \not\equiv n, n+1 \pmod q} a_i \leq 2$ и $\mathcal{K}$ е разширима. Така можем да приемем, че и $a_{16} = 0$. По същия начин можем да отхвърлим и съществуването на 20-равнини.

Можем да отхвърлим съществуването на 19- или 15-равнина $\pi$ като отново използваме идеята за оценяване на приноса към лявата страна на (3.10), направен от равнините през различните прави, лежащи в равнината $\pi$.

Така остава да отхвърлим само съществуването на 27-равнини. Да допуснем, че $a_{27} \neq 0$. Възможни са два типа 27-равнини:

(*A*) сума на равнина и хиперовал; в този случай спектърът на $(27, 7)$-арката е $b_5 = 6$, $b_7 = 15$;

(*B*) две копия на равнина, от която са изтрити три неконкурентни прави; спектърът на такава арка е $b_3 = 3$, $b_7 = 18$.

Да допуснем, че $\mathcal{K}$ е $(117, 30)$-арка с 27-равнина $\pi_0$ от тип $(A)$. Оценяваме приноса към лявата страна на (3.10). За 7-права той е 0, а за 5-права той е $\leq 36$; ако 5-права е инцидентна с друга 27-равнина, този принос е най-много 13. Така имаме

$$\binom{3}{2} + 4 \cdot 36 + 2 \cdot 13 \geq -348 + 16\lambda_2,$$

откъдето получаваме $\lambda_2 = 32$, $\lambda_1 = 53$, $\lambda_0 = 0$. Но това противоречи на $w_1 = 8$, тъй като в този случай съществуват четири колинеарни 2-точки и следователно 9-права (вж. [59, 96]).

Дотук доказахме, че единствените равнини с кратност $\not\equiv n, n+1 \pmod q$ са 27-равнини от тип $(B)$. Тъй като $\mathcal{K}$ не е разширима, трябва да имаме поне три такива равнини. Тъй като две равнини с кратност 27 се пресичат най-много в 6-права, то в този случай те се секат в 3-права. Следователно съществува 0-точка $P$, лежаща и в трите 27-равнини. Разглеждаме проекция $\varphi$ от тази точка. Образите на трите 27-равнини са от тип $(7,7,7,3,3)$. Означаваме с $Y_1, Y_2, Y_3$ трите точки в проекционната равнина, за които $\mathcal{K}^\varphi(Y_i) = 3$. Нека деветте точки в проекционната равнина извън 27-правите са $X_1, \ldots, X_9$. Полагаме $x_i = \mathcal{K}^\varphi(X_i)$. Съществуват девет прави в равнината на проектиране, несъдържащи никоя от точките $Y_i$. Означаваме тези прави с $L_i$, $i = 1, \ldots, 9$. Всяка от тях е от тип $(7,7,7,x_i,x_j)$ за някои $i$ и $j$ и е образ на 29- или 30-равнина[4]. Оттук следва, че $x_i + x_j = 8$ или 9. От друга страна всяка точка $X_i$ се съдържа в точно две такива прави. Така получаваме

$$45 = \sum_{i=1}^{9} x_i \leq \frac{1}{2} \cdot 9 \cdot 9,$$

противоречие. □

### 3.4.2 Характеризация на $(100, 26)$-арки в $\mathrm{PG}(3,4)$

В този раздел ще характеризираме арките с параметри $(100, 26)$ в $\mathrm{PG}(3,4)$. Известно е, че свързаните с тях $(102, 26)$-арки в $\mathrm{PG}(3,4)$ са единствени с точност до еквивалентност и се получават като сума на 17-шапка и цялото пространство [148]. От теоремата за разширимост на Hill и Lizak се получава, че всяка $(101, 26)$-арка е разширима до $(102, 26)$-арка. Тези факти са обобщени в следната теорема.

**Теорема 3.27.** *Съществува единствена* $(102, 26)$*-арка в* $\mathrm{PG}(3,4)$*. Тя се получава като сума на шапка и цялото пространство. Спектърът на такава арка е*

$$a_{22} = 17, a_{26} = 68, \quad \lambda_0 = 0, \lambda_1 = 68, \lambda_2 = 17.$$

*Всяка* $(101, 26)$*-арка в* $\mathrm{PG}(3,4)$ *е разширима.*

[4] Две 27-равнини не могат да се пресичат в 7-права.

От Теорема 3.27 непосредствено следва, че възможните кратности на равнини по отношение на $(101, 26)$-арка в $\mathrm{PG}(3, 4)$ са $21, 22, 25, 26$. Такава арка има най-много една 0-точка.

Един начин за получаване на $(100, 26)$-арки в $\mathrm{PG}(3, 4)$ е чрез изтриване на една точка от $(101, 26)$-арка, или, еквивалентно, чрез изтриване на две точки от $(102, 26)$-арка. Оказва се, че съществуват и неразширими $(100, 26)$-арки, които не могат да бъдат получени по описания начин.

Нека $\mathcal{K}$ е $(100, 26)$-арка. От Лема 3.7 имаме

$$w_0(\mathcal{K}) = 2, w_1(\mathcal{K}) = 7, w_2(\mathcal{K}) = 26.$$

Оттук нататък ще считаме, че $\mathcal{K}$ е неразширима $(100, 26)$-арка в $\mathrm{PG}(3, 4)$. Ограничението на $\mathcal{K}$ върху максимална хиперравнина е $(26, 7)$-арка в $\mathrm{PG}(2, 4)$. Характеризацията на равнинните $(26, 7)$-арки е свързана с характеризацията на блокиращите множества с параметри $(16, 3)$ и е описана в следната лема.

**Лема 3.28.** *Всяка* $(26, 7)$*-арка в* $\mathrm{PG}(2, 4)$ *е от един от следните три вида:*

*(1) две копия на* $\mathrm{PG}(2, 4)$ *минус три неконкурентни прави минус произволна точка, различна от точка на пресичане за две от правите (тип* $(A)$*);*

*(2) сума на равнина плюс хиперовал минус точка (тип* $(B)$*);*

*(3) две 7-прави, пресичащи се в 0-точка; всички останали точки извън тези две 7-прави са 1 точки (тип* $(C)$*).* □

Да отбележим, че арките от тип $(A)$ и $(B)$ са разширими, докато арката от тип $(C)$ е неразширима. В таблицата по-долу са представени спектрите на тези арки и типовете на правите, получени при проектиране на такава арка от 0-точка. Арките от тип $(B)$ с втория възможен спектър нямат 0-точки.

| тип | $a_7$ | $a_6$ | $a_5$ | $a_4$ | $a_3$ | $a_2$ | $\lambda_2$ | $\lambda_1$ | $\lambda_0$ | типове прави |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| (A) | 14 | 4 | 0 | 0 | 2 | 1 | 9 | 8 | 4 | 77732<br>77633<br>66662 |
| | 13 | 5 | 0 | 0 | 3 | 0 | 8 | 10 | 3 | 77633 |
| (B) | 12 | 3 | 4 | 2 | 0 | 0 | 6 | 14 | 1 | 66644 |
| | 10 | 5 | 6 | 0 | 0 | 0 | 5 | 16 | 0 | - |
| (C) | 11 | 6 | 1 | 3 | 0 | 0 | 6 | 14 | 1 | 77444 |

Полезно е да забележим, че никоя $(26, 7)$-арка няма нито 0-, нито 1-прави. Такава арка няма и 5-прави с 0-точка. Освен това никоя $(26, 7)$-арка не може да има едновременно 3- и 4-прави.

**Лема 3.29.** *Нека $\mathcal{L}$ е $(25, 7)$-арка в $\mathrm{PG}(2, 4)$, за която съществува 6-права $L$ с три 2-точки. Тогава $\mathcal{L}$ има и 7-права инцидентна с 0-точка.*

*Доказателство.* Да означим с $\lambda_i$, $i = 0, 1, 2$ броя на $i$-точките в $\mathcal{L}$. Ясно е, че $\lambda_2 - \lambda_0 = 4$, и тъй като $\lambda_0 \geq 2$, $\lambda_2 \leq 9$, трябва да разгледаме четири случая: $\lambda_2 = 6 + i$, $\lambda_0 = 2 + i$, където $i = 0, 1, 2, 3$.

Да допуснем, че не съществува 7-права с 0-точка. Да разгледаме случая $\lambda_0 = 2$ и нека трите 2-точки извън $L$ са колинеарни. Тогава правата, определена от тях пресича $L$ в 0-точка. Тази права трябва да има и втора 0-точка, което дава $\lambda_0 \geq 3$, противоречие. Ако трите 2-точки извън $L$ са неколинеарни, то поне една от трите прави определени от две от тези точки пресича $L$ в 2-точка. Отново трябва да съществува трета 0-точка, което е противоречие.

Случаите $\lambda_0 = 3, 4, 5$ се отхвърлят по подобен начин. □

**Лема 3.30.** *Нека $\mathcal{K}$ е $(100, 26)$-арка в $\mathrm{PG}(3, 4)$. Тогава за всяка равнина $\pi$ в $\mathrm{PG}(3, 4)$ е изпълнено $\mathcal{K}(\pi) \geq 12$.*

*Доказателство.* Да отбележим, че съгласно Лема 2.29, $\mathcal{K}(\pi) \neq 7, 10, 11, 23$. Без ограничение на общността, ще разгледаме случая, когато $\mathcal{K}$ е неразширима арка. Наистина, ако $\mathcal{K}$ е разширима, то възможните кратности на равнини са $26, 25, 24,\ 22, 21, 20$ и твърдението на лемата е изпълнено тривиално.

Равнини с кратност, която не надхвърля 5, се отхвърлят с помощта на факта, че никоя $(26, 7)$-арка няма 0- или 1-прави. Във всяка равнина $\pi$ с кратност, ненадхвъляща 5, съществува 0-точка $P$, която е инцидентна само с 0- и 1-прави. Тъй като $P$ се съдържа в поне една 26-равнина $\pi'$ (понеже приехме, че $\mathcal{K}$ е неразширима), то правата $\pi \cap \pi'$ е 0- или 1-права, противоречие.

Да допуснем, че съществува 6-равнина $\pi_0$. Да разгледаме 2-права $L$ в $\pi_0$. Правата $L$ е инцидентна с поне две 26-равнини, да кажем $\pi_1$ и $\pi_2$. Ясно е, че $\pi_1$ и $\pi_2$ са от тип (A). Съществува 0-точка от $L$ със следното свойство: след проектиране от тази точка образите на $\pi_1$ и $\pi_2$ са от тип $(7, 7, 7, 3, 2)$. Ясно е, че в равнината на проектиране съществува права от тип $(3, 3, 2/0, x, y)$. Тъй като 26-равнина няма 5-права с 0-точка, то

$x, y \leq 4$. Това е противоречие, понеже $\mathcal{K}$ не може да има едновременно 6-равнина и равнина с кратност $< 14$.

Да допуснем, че съществува равнина $\pi_0$ с кратност 8 и $L$ е 3-права в тази равнина. Разглеждаме проекция от 0-точка на $L$. Образите на останалите четири равнини през $L$ са от тип $(7, 7, 7-\epsilon, 3, 2+\epsilon)$, където $\epsilon \in \{0, 1\}$. Сега проекционната равнина задължително съдържа права от тип $(7, 7, 6, 6, 0)$, което е невъзможно поради Лема 3.28. Равнини с кратност 9 се отхвърлят по подобен начин. В този случай дори можем да изберем точката, от която проектираме по такъв начин, че образът на 9-равнината да има тип $(3, 3, 3, 0, 0)$, което упростява доказателството. □

**Лема 3.31.** *Нека* $\mathcal{K}$ *е* $(100, 26)$*-арка в* $\mathrm{PG}(3, 4)$*. Тогава не съществува равнина* $\pi$ *в* $\mathrm{PG}(3, 4)$ *с кратност* $12 \leq \mathcal{K}(\pi) \leq 15$.

*Доказателство.* Нека $\mathcal{K}$ е $(100, 26)$-арка в $\mathrm{PG}(3, 4)$. Най-напред ще отхвърлим съществуването на равнини с кратност 15. Да допуснем противното и нека $\pi_0$ е равнина с $\mathcal{K}(\pi_0) = 15$. Ограничението на $\mathcal{K}$ върху $\pi_0$ се състои от точките на равнината минус права $L$ минус точка $Q$, нележаща на $L$. Да допуснем, че съществува 0-точка $P$ извън $\pi_0$. Всяка 26-равнина $\pi_1$ през $P$ (такава съществува, тъй като $\mathcal{K}$ не е разширима) има поне две 0-точки ($P$ и още една в $\pi_0$). Следователно тази равнина съдържа $(26, 7)$-арка от тип $(A)$ и следователно минава през $Q$. Да разгледаме 7-права $L'$ в $\pi_1$ през $P$. Тя е инцидентна с поне две други 26-равнини, които имат поне две, а следователно и поне три 0-точки. От друга страна те пресичат $\pi_0$ в 4-права, което противоречи на Лема 3.30 ($(26, 7)$-арка от тип $(A)$ няма 4-права). Дотук доказахме, че не съществуват 0-точки извън $\pi_0$. Но точката $Q$ трябва да е инцидентна с 26-равнина, която пресича $\pi_0$ в 3-права и има две 0-точки, което е невъзможно.

По същия начин можем да отхвълим съществуването на 14-равнини. Такива равнини са допълнение на права и две точки или допълнението на подравнина на Baer.[5]

Сега ще покажем, че $\mathcal{K}$ няма равнини с кратност 13. Несъществуването на 12-равнини се доказва със същите аргументи и е по-просто.

Да допуснем, че съществува 13-равнина $\pi_0$. Да фиксираме 4-права $L$ в $\pi_0$ и да означим останалите четири равнини през $L$ с $\pi_i$, $i = 1, \ldots, 4$. Без ограничение на общността $\pi_1, \pi_2, \pi_3$ са 26-равнини, а $\pi_4$ е 25-равнина. Да

[5] Същият аргумент отхвърля и 16-равнини, при които петте 0-точки са колинеарни.

разгледаме проекция $\varphi$ от 0-точката $P$ от $L$. Означаваме образите на $\pi_i$ с $L_i$: $L_i = \varphi(\pi_i)$. Да отбележим, че $L_4$ не съдържа 7-точка. Такава точка е инцидентна с три 26-прави, а типовете на правите $L_1, L_2, L_3$ са $(7,7,4,4,4)$ или $(6,6,6,4,4)$. Оттук следва, че $L_0$ трябва да е от тип $(4,4,4,4,*)$, противоречие. Следователно $L_4$ няма 7-точки и е от един от следните три типа: $(4,6,6,6,3)$, $(4,6,6,5,4)$ или $(4,6,5,5,5)$.

От друга страна е ясно, че 13-равнината е допълнение на $(8,1)$-блокиращо множество и е: (a) допълнение на права и три точки, или (b) допълнение на подравнина на Baer и точка.

В случая (a) в $\pi_0$ има точка $P$, проекцията от която дава за образа на $\pi_0$ права от тип $(4,3,3,3,0)$. Ако някоя от правите $L_1, L_2, L_3$ е от тип $(7,7,4,4,4)$, то получаваме, че $L_4$ има две точки с кратност най-много 3, което е невъзможно. Това следва от факта, че всяка 26-права през 7-точка има две точки с кратност, ненадхвърляща 3. Следователно правите $L_1, L_2, L_3$ са от тип $(6,6,6,4,4)$. Но сега всеки един от трите възможни типа за $L_4$, получени по-горе, води до противоречие. Например, ако $L_4$ е от тип $(4,6,6,6,3)$, множеството от точки

$$\mathcal{F} = \{X \in L_1 \cup L_2 \cup L_3 \cup L_4 \mid \mathcal{K}^{\varphi}(X) = 6\} \cup \{Y \in L_1 \cup L_2 \cup L_3 \cup L_4 \mid \mathcal{K}^{\varphi}(Y) = 3\}$$

е $(15,4)$-арка, откъдето в равнината на проектиране съществува права от тип $(4,4,4,3,0)$, което дава 15-равнина, чието съществуване отхвърлихме по-горе. Другите два възможни типа за $L_4$ се отхвърлят по подобен начин.

(b) Както при несъществуването на 15-равнини можем да докажем, че не съществуват 0-точки извън $\pi_0$. Да означим с $P$ 0-точката, която не е в изтритата подравнина на Baer. Правите в $\pi_0$ през $P$ са с кратности 3,3,3,3,1. Следователно 26-равнина през $P$ (а такава съществува поради неразширимостта на $\mathcal{K}$) има две 0-точки, противоречие. $\square$

**Лема 3.32.** *В* $\mathrm{PG}(3,4)$ *съществува единствена* $(100,26)$*-арка, съдържаща 7-права с 0-точка, по която минава 24-равнина.*

*Доказателство.* Нека $\mathcal{K}$ е $(100,26)$-арка в $\mathrm{PG}(3,4)$, удовлетворяваща условието на лемата и нека $\pi_0$ е 24-равнината, инцидентна със 7-права с 0-точка $P$. Останалите четири равнини през $L$, означени с $\pi_1,\dots,\pi_4$ са 26-равнини. Разглеждаме проекция $\varphi$ от $P$. Означаваме $Q = \varphi(L)$ и $L_i = \varphi(\pi_i)$, $i = 0,\dots,4$. Ясно е, че арките $\mathcal{K}|_{\pi_i}$ $i = 1,\dots,4$, са от тип $(A)$ или $(C)$ (вж. Лема 3.30). Следователно възможните типове за правите

$L_1, \dots, L_4$ са $(7, 7, 7-\varepsilon, 3, 2+\varepsilon)$, $\varepsilon = 0$ или 1, или $(7, 7, 4, 4, 4)$. Сега за типовете на 26-равнините през $L$ имаме следните възможности:

(i) AAAA, (ii) AAAC, (iii) AACC, (iv) ACCC, (v) CCCC.

(i) Четирите прави $L_1, \dots, L_4$ са от тип $(7, 7, 7-\varepsilon, 3, 2+\varepsilon)$. Да допуснем, че множеството $\mathcal{X} = \{X \mid \mathcal{K}^{\varphi}(X) \geq 6\}$ в равнината на проектиране има четири колинеарни точки и да означим с $M$ съдържащата ги права. Нека $Z$ е петата точка от $M$. Тя е с кратност най-много 2. Всяка права през $Z$, различна от $L_0$ или $M$ е инцидентна с поне една точка от $\mathcal{X}$. В противен случай през $Z$ има права с кратност най-много 14. Следователно през $Z$ има права, която пресича $\mathcal{X}$ в точно една точка. Това води до съществуването на 17- или 18-равнина с 6-права, което е невъзможно.

Нека $\mathcal{X}$ е $(9, 3)$-арка. Ясно е, че $\mathcal{K}$ няма външна права, тъй като тя би била с кратност ненадхвърляща 15. Сега за всяка точка $R \neq Q$ върху $L_0$ имаме $\mathcal{K}^{\varphi}(R) \leq 4$. Оттук следва $\mathcal{K}^{\varphi}(L_0) \leq 7 + 4 \cdot 4 = 23 < 24$, противоречие.

(ii) Нека $L_4$ е права от тип $(7, 7, 4, 4, 4)$. В този случай съществува 26-права през 7-точката върху $L_1$, различна от $Q$. Тя е от тип $(7, 4, *, *, *)$ и следователно този тип е $(7, 7, 4, 4, 4)$. Това е невъзможно, тъй като само $L_0$ и $L_4$ имат точки с кратност 4.

(iii) Доказателството е аналогично на това на (ii).

(iv) Нека $L_1$ е от тип $(7, 7, 7-\varepsilon, 3, 2+\varepsilon)$ и нека $L_2, L_3, L_4$ са от тип $(7, 7, 4, 4, 4)$. $L_0$ е от тип $(7, 5, 4, 4, 4)$. Две от седемте точки върху $L_1$ заедно със 7-точките върху $L_2, L_3$ и $L_4$ образуват овал, който се разширява до хиперовал с точка от $L_0$. През точката с кратност $7-\varepsilon$ от $L_1$ съществува секанта към хиперовала (различна от $L_1$), която е от тип $(7, 7, 7-\varepsilon, 4, 4)$ и дава 28- или 29-равнина, противоречие.

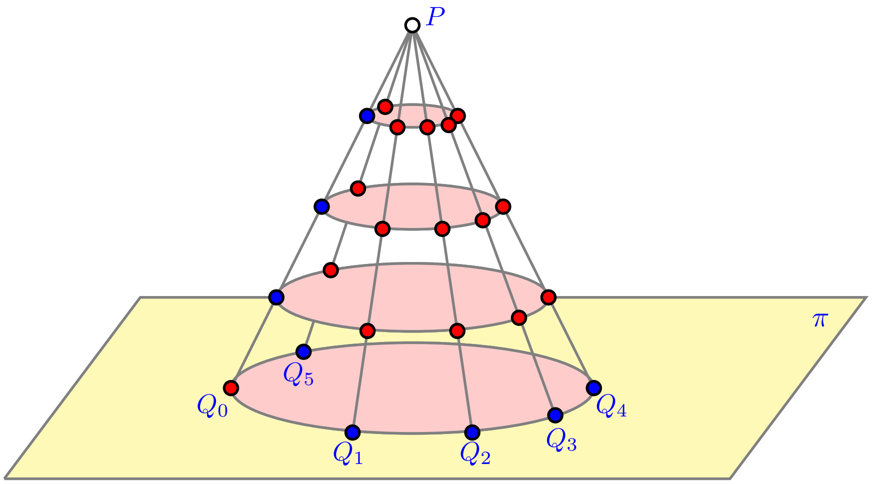
(v) Остава да разгледаме последния възможен случай – този, в който всички прави $L_i$, $i = 1, \dots, 4$, са от тип $(7, 7, 4, 4, 4)$. Множеството от точките $X$ с $\mathcal{K}^{\varphi}(X) = 7$ е овал $\mathcal{O}$ в проекционната равнина. В противен случай получаваме, че $\mathcal{K}$ има 28-равнина, или че $\mathcal{K}(L_0) \leq 19$. Означаваме с $N$ нуклеуса на този овал. Тъй като $N$ е от $L_0$, то съществува права от тип $(7, \mathcal{K}^{\varphi}(N), 4, 4, 4, )$, откъдето получаваме, че $\mathcal{K}^{\varphi}(N) \geq 5$. Правата $L_0$ е от тип $(7, \mathcal{K}^{\varphi}(N), x_1, x_2, x_3)$, където $2 \leq x_i \leq 4$. От разглежданията дотук следва, че $\mathcal{K}$ може да се представи като разлика

$$\mathcal{K} = \mathcal{F} - \mathcal{B},$$

където $\mathcal{F}$ е сума на цялото пространство плюс конус с управителна крива, която е хиперовал $\mathcal{X} = \mathcal{O} \cup \{N\}$, минус върха на конуса $P$, а

$\mathcal{B}$ е $(9,1)$-блокиращо множество в $\mathrm{PG}(3,4)$. Лесно се проверява, че единственото блокиращо множество, което удовлетворява условията за структурата на $\mathcal{K}$ е симетричната разлика на хиперовала $\mathcal{X}$ и правата $NP$. $\square$

Структурата на пълната $(100,26)$-арка, конструирана в Лема 3.32(v) е представена на фигурата по-долу.




**Лема 3.33.** *В* $\mathrm{PG}(3,4)$ *не съществува* $(100,26)$*-арка такава, че през всяка нейна 7-права с 0-точка минават две 25-равнини.*

*Доказателство.* Да допуснем противното. В $\mathrm{PG}(3,4)$ съществува $(100,26)$-арка $\mathcal{K}$ със 7-права $L$ с 0-точка $P$, по която има две 25-равнини. Нека $\pi_0,\pi_1,\pi_2$ са 26-равнини, а $\pi_3$ и $\pi_4$ – 25-равнините по $L$. Разглеждаме проекция $\varphi$ от $P$. Полагаме $L_i=\varphi(\pi_i)$, $i=0,\dots,4$ и $Q=\varphi(P)$. За типовете на 26-равнините през $L$ имаме следните възможности:

(i) AAA, (ii) AAC, (iii) ACC, (iv) CCC.

(i) Нека правите $L_0,L_1,L_2$ да са от тип $(7,7,7,3,2)$. Случаите, когато някои (или всики) от тези прави са от тип $(7,7,6,3,3)$ се отхвърлят по същия начин. Да допуснем, че три от 7-точките, различни от $Q$, са колинеарни. Тогава правата, определена от тях пресича $L_3$ или $L_4$ (за определеност нека това е $L_3$) в точка с кратност не по-голяма от 2. Съществува права през тази точка, която е от тип $(7,3,3,\leq 2,x)$ или $(3,3,3,\leq$

$2, x)$. В първия случай имаме права с кратност най-много 22, което е невъзможно за права със 7-точка. Във втория – получаваме $x \leq 4$, което дава права с кратност най-много 15, което отново е невъзможно.

Следователно шестте 7-точки от $L_0, L_1, L_2$, различни от $Q$, образуват хиперовал. През 2-точката на $L_0$ има две външни за хиперовала прави. Поне една от тях е от тип $(2, 2, 3, *, *)$ или $(2, 2, 2, *, *)$, което дава права с кратност по-малка от 16, противоречие.

(ii) Нека $L_0$ и $L_1$ са от тип $(7, 7, 7-\varepsilon, 3, 2+\varepsilon)$, $\varepsilon \in \{0, 1\}$, и нека $L_2$ е от тип $(7, 7, 4, 4, 4)$. Най-напред да отбележим, че нито $L_3$, нито $L_4$ има точка с кратност 7. В такъв случай бихме имали права от тип $(7, 4, 3/2, 3/2, *)$, което е невъзможно, тъй като 25- и 24-равнина не се пресичат в 7-права. Да допуснем, че някоя от $L_0$ и $L_1$, например $L_0$, е от тип $(7, 7, 7, 3, 2)$. През 2-точката на $L_0$ има две прави от тип $(2, 3, 4, 4, 4)$ или $(2, 2, 4, 4, 4)$ и, следователно, всяка от правите $L_3$, $L_4$ има две точки с кратност 4. Тъй като тези прави не могат да са от тип $(7, 5, 5, 4, 4)$ (което следва от несъществуването на 26-равнини с 5-права, инцидентна с 0-точка), то и двете прави са от тип $(7, 6, 4, 4, 4)$. Оттук следва, че $L_1$ е също от тип $(7, 7, 7, 3, 2)$. Множеството

$$\{X \mid \mathcal{K}^{\varphi}(X) = 7, X \neq P\} \cup \{Y \mid Y \in L_3, \mathcal{K}^{\varphi}(Y) = 6\}$$

не е хиперовал (тъй като има допирателни). Следователно съществува права от тип $(7, 7, 7, 4, 4)$ или $(7, 7, 6, 4, 2)$. Първият тип дава равнина с кратност по-голяма от 26, а втория се отхвърля от Лема 3.28.

Остава да разгледаме случая, когато и двете прави $L_0$ и $L_1$ са от тип $(7, 7, 6, 3, 3)$. Ясно е, че трите 7-точки, различни от $P$, върху $L_0, L_1, L_2$ са неколинеарни. Следователно съществува 26-права от тип $(7, 4, 6/3, *, *)$, което се отхвърля от Лема 3.28.

(iii) Доказателството е аналогично на това на (ii).

(iv) В този случай правите $L_0, L_1, L_2$ са от тип $(7, 7, 4, 4, 4)$ и трите 7-точки, различни от $Q$ са неколинеарни. Тогава $L_3$ и $L_4$ имат по три точки с кратност 4, откъдето следва, че са от тип $(7, 6, 4, 4, 4)$. Сега множеството $\{X \mid \mathcal{K}(X) \geq 6\}$ е хиперовал. Следователно арката $\mathcal{K}$ се представя като $\mathcal{K} = \mathcal{F} - \mathcal{B}$, където $\mathcal{F}$ е същата арка като в Лема 3.32(v). $\mathcal{B}$ трябва да е $(9, 1)$-блокиращо множество в PG$(3, 4)$, състоящо се от две пресичащи се 3-прави и четири компланарни точки в общо положение. Това е противоречие, тъй като не съществува блокиращо множество с такава структура. $\square$

Резултатите от Лема 3.32 и Лема 3.33 се обобщават от следната теорема.

**Теорема 3.34.** *Нека $\mathcal{K}$ е $(100, 26)$-арка в* $\mathrm{PG}(3, 4)$*. Тогава $\mathcal{K}$ е от един от следните два типа:*

*(1) сума на шапка и цялото пространство минус две точки;*

*(2) конус, без върха, с управителна крива хиперовал плюс цялото пространство минус симетричната разлика на хиперовала и образуваща на конуса.* □

### 3.4.3 Несъществуване на $(467, 118)$-арки в $\mathrm{PG}(4, 4)$

В този раздел представяме доказателство за несъществуването на арки с параметри $(467, 118)$ в $\mathrm{PG}(4, 4)$. Това е най-трудният случай в групата от параметри $(467 + i, 118)$, $i = 0, 1, 2, 3$. Общото за хипотетичните арки с тези параметри е, че ограничението им върху максимална хиперравнина е $(118, 30)$-арка. Характеризацията на последните бе направена в 3.4.1. От несъществуването на $(467, 118)$-арки в $\mathrm{PG}(4, 4)$ следва и несъществуването на $[467, 5, 349]_4$-кодове, което от своя страна определя точната стойност на $n_4(5, d)$ за $d = 349, 350, 351, 352$.

**Теорема 3.35.** *В* $\mathrm{PG}(4, 4)$ *не съществуват арки с параметри* $(467, 118)$.

*Доказателство.* Да допуснем, че съществува $(467, 118)$-арка $\mathcal{K}$ в $\mathrm{PG}(4, 4)$. От Теорема 2.29 и от факта, че възможните кратности на равнини в 118-хиперравнина са $14, 18, 22, 26$ и $30$ получаваме следните допустими кратности за хиперравнините в $\mathrm{PG}(4, 4)$: $67, \ldots, 70$, $83, \ldots, 86$, $99, \ldots, 102$, $115, \ldots, 118$. Да отбележим, че кратности $51, \ldots, 55$ са невъзможни поради несъществуването на $(51, 14)$-арки в $\mathrm{PG}(3, 4)$ (вж. [152]). Ако $(a_i)_{i \geq 0}$ е спектърът на $\mathcal{K}$, то (2.6) приема вида

$$\sum_i \binom{118 - i}{2} a_i = -5361 + 64\lambda_2. \tag{3.11}$$

Фиксираме 30-равнина $\pi$, съдържаща се в максимална хиперравнина $\Delta_0$ и означавам с $\Delta_i$, $i = 0, \ldots, 4$, хиперравнините през $\pi$. Съществуват три възможности за кратностите на хиперравнините $\Delta_i$:

(A) $\mathcal{K}(\Delta_0) = \ldots = \mathcal{K}(\Delta_3) = 118$, $\mathcal{K}(\Delta_4) = 115$;

(B) $\mathcal{K}(\Delta_0) = \ldots = \mathcal{K}(\Delta_2) = 118$, $\mathcal{K}(\Delta_3) = 117$, $\mathcal{K}(\Delta_4) = 116$;

(C) $\mathcal{K}(\Delta_0) = \mathcal{K}(\Delta_1) = 118$, $\mathcal{K}(\Delta_2) = \mathcal{K}(\Delta_3) = \mathcal{K}(\Delta_4) = 117$.

Да допуснем, че $\pi$ е 30-равнина, инцидентна с 0-права $L$. От характеризацията на $(118, 30)$-арките следва, че ограничението на $\mathcal{K}$ върху 118-хиперравнина през $\pi$ е от тип $(\alpha)$ или $(\gamma'')$. Нещо повече, съгласно Лема 3.26 получаваме, че ако $\Delta_i$ е 117-хиперравнина през $\pi$, то арката $\mathcal{K}|_{\Delta_i}$ е разширима до $(118, 30)$-арка от тип $(\alpha)$ или $(\gamma'')$. Ако $\varphi$ е проекция от $L$ върху произволна равнина без общи точки с $L$, то образът на 118-хиперравнина през $\pi$ е права от тип:

$$(30, 30, 30, 14, 14) \text{ или } (30, 22, 22, 22, 22).$$

Аналогично, образът на 117-хиперравнина през $\pi$ е права от тип:

$$(30, 30, 30 - \epsilon_1, 14, 14 - \epsilon_2), \epsilon_1 + \epsilon_2 = 1, \text{ или } (30, 22, 22, 22, 21).$$

Да разгледаме случая (A). Всяка 118-права, лежаща в проекционната равнина, е от тип $(30, 30, 30, 14, 14)$ или $(30, 22, 22, 22, 22)$. Освен това, през 30-точка минават поне две 118-прави. Ако и четирите прави $\varphi(\Delta_i)$, $i = 0, \ldots, 3$, са от тип $(30, 30, 30, 14, 14)$, то точките с кратност 30 са поне девет. Тъй като никои четири от тях не са колинеарни, броят им е точно девет и те образуват равнинна $(9, 3)$-арка. Сега кратността на точка от $\varphi(\Delta_4)$ (различна от $\varphi(\pi)$) е най-много 14. Това е невъзможно, тъй като преброяването на кратностите на равнините през $L$ в $\Delta_4$ дава $115 = \mathcal{K}(\Delta_4) \leq 4 \cdot 14 + 30$.

Нека правите $\varphi(\Delta_0)$ и $\varphi(\Delta_1)$ са от тип $(30, 30, 30, 14, 14)$, а $\varphi(\Delta_2)$ е от тип $(30, 22, 22, 22, 22)$. През 30-точка от $\varphi(\Delta_0)$, различна от $\varphi(\pi)$, съществува поне още една 118-права, която съдържа 22-точка и следователно е от тип $(30, 22, 22, 22, 22)$. Това е невъзможно, тъй като $\varphi(\Delta_1)$ не съдържа 22-точки.

Ако правата $\varphi(\Delta_0)$ е от тип $(30, 30, 30, 14, 14)$, а правите $\varphi(\Delta_i)$, $i = 1, 2, 3$, са от тип $(30, 22, 22, 22, 22)$, то (както по-горе) правата $\varphi(\Delta_4)$ има точка с кратност 22. Следователно в проекционната равнина има права от тип $(22, 22, 22, 22, 14)$, което е невъзможно тъй като 102-хиперравнина не съдържа 0-точки.

Накрая нека всички прави $\varphi(\Delta_i)$, $i = 0, \dots, 3$, са от тип $(30, 22, 22, 22, 22)$. Тогава възможните кратности на точка от $\varphi(\Delta_4)$ са $11, 12, 27, \dots, 30$. Но никои пет от тези числа не дават сума 115, което отхвъря и този случай.

С това доказахме, че ако съществува $(118, 30)$-арка, то никоя нейна 30-равнина не съдържа 0-права.

Сега да допуснем, че съществува 30-равнина $\pi$ с 2-права $L$. Отново от характеризацията на $(118, 30)$-арките получаваме, че ограничението на $\mathcal{K}$ върху 118-хиперравнина през $\pi$ е арка от тип $(\beta)$ или $(\gamma''')$. От Лема 3.26 получаваме, че ако $\Delta$ е 117-хиперравнина през $\pi$, то арката $\mathcal{K}|_\Delta$ е разширима до $(118, 30)$-арка от тип $(\beta)$ или $(\gamma''')$. Ако $\varphi$ е проекция от $L$, то образът на 118-хиперравнина през $\pi$ е права от тип:

$$(28, 28, 28, 16, 16) \text{ или } (28, 28, 20, 20, 20),$$

а образът на 117-хиперравнина през $\pi$ е права от тип:

$$(28, 28, 28-\epsilon_1, 14, 14-\epsilon_2), \epsilon_1+\epsilon_2 = 1, \text{ или } (28, 28-\epsilon_1, 22, 22, 22-\epsilon_2), \epsilon_1+\epsilon_2 = 1.$$

Случаите (A), (B) и (C) се отхвърлят с аргументи, аналогични на тези при проекцията от 0-права.

Дотук доказахме, че ограничението $\mathcal{K}$ върху максимална хиперравнина е $(118, 30)$-арка със спектър

$$a_{22} = 5, a_{26} = 8, a_{30} = 72, \lambda_0 = 2, \lambda_1 = 48, \lambda_2 = 35.$$

Правата, минаваща през двете 0-точки на такава арка е 6-права. Да означим тези точки с $P$ и $Q$. Казваме че една 30-равнина през тази права е от тип 1 по отношение на $P$, ако проекция от $P$ я изобразява в права от тип $(6, 8, 8, 4, 4)$; тази равнина е от тип 2 по отношение на $P$, ако образът е тип $(6, 6, 6, 6, 6)$. От структурата на тези арки следва, че или една, или три от четирите 30-равнини през специалната 6-права $PQ$ са от тип 1.

Нека $\pi$ е 30-равнина в 118-хиперравнината $\Delta_0$, съдържаща специалната 6-права, която означаваме с $L$. Пресмятайки кратностите на хиперравнините, пресичащи $\pi$ в права, получаваме, че съществуват 5 хиперравнини с кратност $83, \dots, 86$ и 8 хиперравнини с кратност 99 или 100. Тук използваме факта, че $(102, 26)$-арката няма 0-точки, както и че 26-равнина в $(101, 26)$-арка отново няма 0-точки. Сега от (3.11) получаваме,

че
$$64\lambda_2 = 5361 + \sum_i \binom{118-i}{2} a_i \geq 5\binom{32}{2} + 8\binom{18}{2}.$$
Оттук следва, че $\lambda_0 \geq 16$.

Да разгледаме проекция $\varphi$ от правата $L$ върху равнина, нямаща общи точки с $L$. Означаваме с $L_i = \varphi(\Delta_i)$, $i = 0, \ldots, 4$. Образът на 118-хиперравнина през $L$ е от тип $(24, 24, 24, 24, 16)$, докато образът на 117-хиперравнина е от тип $(24, 24, 24, 24 - \epsilon_1, 16 - \epsilon_2)$, $\epsilon_1 + \epsilon_2 = 1$.

*Случай* (A). За всяко $i = 0, 1, 2, 3$ означаваме с $X_i$ точката върху правата $L_i$, за която $\mathcal{K}^\varphi(X_i) = 16$. Тези четири точки са колинеарни. Нека $X_4 \in L_4$ е петата точка върху въпросната права. Сега имаме $13 \leq \mathcal{K}^\varphi(X_4) \leq 16$. Ако $\mathcal{K}^\varphi(X_4) = 15$ или 16, то правата $\langle X_i \rangle$ е образ на 85- или 86-хиперравнина $\Gamma$. Арката $\mathcal{K}|_\Gamma$ е с параметри $(85, 22)$ или $(86, 22)$ и съответните спектри $(b_i)$ са
$$b_{22} = 32, b_{21} = 21, b_{20} = 24, b_{19} = 8 \text{ или } b_{22} = 53, b_{20} = 32.$$
И двете възможности се отхвърлят чрез преброяване на приноса на хиперравнините през равнините на $\Gamma$ към лявата страна на (3.11). Така правата $L_4$ е от тип $(24, 24, 24, 24, 13)$ или $(24, 24, 24, 23, 14)$. В първия случай всички 0-точки се съдържат в равнината, която е прообраз на $X_4$. Но това е невъзможно, тъй като 19-равнина не може да съдържа 16 0-точки. Във втория случай 0-точките се съдържат в две равнини - прообразите на $X_4$ и на точката $Y$, за която $\mathcal{K}^\varphi(Y) = 23$. Втората равнина съдържа най-много шест 0-точки и, следователно, прообразът на $X_4$ има поне дванадесет 0-точки. Отново стигаме до противоречие, тъй като 20-равнина не може да има такъв брой 0-точки.

*Случай* (B). Отхвърля се по същия начин като случай (A).

*Случай* (C). Тук всяка от равнините $\Delta_0$ и $\Delta_1$ съдържа две 0-точки; това са 0-точките от $\pi$. Всяка от хиперравнините $\Delta_2, \Delta_3, \Delta_4$ съдържа поне шест 0-точки (две от тях са в $\pi$). Това дава всичко четиринадесет 0-точки, противоречие с $\lambda_0 \geq 16$. $\square$

От Теорема 3.35 непосредствено следва и несъществуването на кодове, асоциирани с отхвърлените арки.

**Следствие 3.36.** *Не съществуват линейни кодове с параметри* $[467, 5, 349]_4$. *Това определя точните стойности* $n_4(5, 349 + i) = 468 + i$ *за* $i = 0, 1, 2, 3$. $\square$

### 3.4.4 Несъществуване на $(465,117)$- и $(464,117)$-арки в $\mathrm{PG}(4,4)$

В този раздел ще дадем доказателство за несъществуването на $(465,117)$- и $(464,117)$-арки в $\mathrm{PG}(4,4)$. Ограничението на такава хипотетична арка върху максимална хиперравнина е $(117,30)$-арка в $\mathrm{PG}(3,4)$. Тъй като всяка $(117,30)$-арка е разширима до $(118,30)$-арка в същата геометрия (Лема 3.26), похватите, които използвахме в предния раздел могат да бъдат приложени и тук.

**Теорема 3.37.** *В* $\mathrm{PG}(4,4)$ *не съществуват арки с параметри* $(465,117)$.

*Доказателство.* Да допуснем противното и нека $\mathcal{K}$ е $(465,117)$-арка в $\mathrm{PG}(4,4)$. Тъй като ограничението на $\mathcal{K}$ върху максимална хиперравнина $H$ е $(117,30)$-арка, то съгласно Леми 3.20, 3.21, 3.23 и 3.26 възможните кратности на равнина са следните: 13, 14, 17, 18, 21, 22, 25, 26, 29, 30. Оттук следва, че за възможните кратности на хиперравнина $\Delta$ в $\mathrm{PG}(4,4)$ по отношение на $\mathcal{K}$ имаме

$$\mathcal{K}(\Delta) \in W := \{49, 65, 69, 81, 85, 97, 101, 113, 117\}.$$

Нека $\Delta$ е хиперравнина с кратност 117, съдържаща 30 равнина $\pi$ с 0-права. От характеризацията на $(118,30)$-арките и Лема 3.26 следва, че арката $\mathcal{K}|_\Delta$ е разширима до $(118,30)$-арка от тип $(\alpha)$ или $(\gamma'')$. Ако $\varphi$ е проекция от 0-правата в равнина, която няма общи точки с нея, то образът на 117-хиперравнина през $\pi$ е права от един от следните два типа:

$$\text{(a)}\ \ (30,30,30-\epsilon_1,14,14-\epsilon_2), \epsilon_1+\epsilon_2=1, \text{ или } \quad \text{(b)}\ \ (30,22,22,22,21).$$

Проекциите на хиперравнините през $\pi$ образуват сноп прави от горните типове. Лесно се проверява, че за всяка петорка от типове получаваме права с кратност, която не се среща в $W$. Ако поне две от правите са от тип (a), то имаме права с кратност по-голяма от 117. Ако всички прави в снопа са от тип (b), то имаме права с кратност между 105 и 110, което е невъзможно. Остава случая на една права от тип (a) и четири прави от тип (b). Тогава в проекционната равнина съществува 101-права от тип $(22,22,22,22,13)$ или $(22,22,22,21,14)$, което е невъзможно, тъй като никоя $(101,30)$-арка няма нито 13-, нито 14-права.

Нека $\Delta$ е 117-хиперравнина, съдържаща 30-равнина $\pi$ с 2-права. Тогава арката $\mathcal{K}|_\Delta$ е разширима до $(118,30)$-арка от тип $(\beta)$ или $(\gamma''')$. Както по-горе, да разгледаме проекция $\varphi$ от 2-правата в $\pi$ върху равнина нямаща общи точки с тази 2-права. При $\varphi$ образът на 117-хиперравнина през $\pi$ е от един от следните два типа:

$$\text{(c)}\quad (28, 28, 28-\epsilon_1, 16, 16-\epsilon_2),\ \text{или}\ \ \text{(d)}\ \ (28, 28-\epsilon_1, 20, 20, 20-\epsilon_2), \epsilon_1+\epsilon_2 = 1.$$

Този случай отхвърляме с аргументите, използвани по-горе. Образите на хиперравнините през $\pi$ образуват сноп прави от типове (c) и (d). При това, тъй като всички прави в проекционната равнина са с кратност сравнима с $-1 \mod 4$, то и точките с кратност сравнима с $-1 \mod 4$ са колинеарни. Отново образите на хиперравнините през $\pi$ образуват сноп прави и за всяка петорка от типове, които са (c) или (d) получаваме противоречие с възможната структура на $\mathcal{K}$.

Остава да разгледаме случая, когато ограничението на $\mathcal{K}$ върху всяка хиперравнина е 117-арка, разширима до $(118, 30)$-арка от тип $(\gamma')$. Известно е, че такава арка има точно две 0-точки, които са инцидентни с 6-права. Проекция от тази 6-права изобразява 117-хиперравнина в права от тип $(24, 24, 24, 24-\epsilon_1, 16-\epsilon_2)$ с $\epsilon_1+\epsilon_2 = 1$. Нека $\pi$ е фиксирана 30-равнина в 117-хиперравнина $H$, съдържаща специалната 6-права $L$. Отново проектираме от $L$ и нека означим тази проекция с $\varphi$. Всички прави в снопа през точката $\varphi(\pi)$ имат горния тип. Лесно се проверява, че петте точки с кратност 15 или 16 са колинеарни. Да означим правата, която ги съдържа с $\varphi(H)$ в проекционната равнина (тук $H$ е хиперравнина през $L$). В противен случай съществува права съдържаща пет точки с кратност 23 или 24, която е прообраз на равнина с кратност най-малко $6 + 5 \cdot 23 = 121$, противоречие. Кратността на правата $\varphi(H)$ по отношение на $\mathcal{K}^\varphi$ е $u-6$, където $u \in W$. Следователно $\mathcal{K}(H) = 85$. Ясно е, че $H$ има три 2-точки (в $L$), три 0-точки (две в $L$ и една извън $L$) и 79 1-точки. В $H$ съществува 20-равнина, да речем $\delta$, през коя да е от 0-точките на $L$. За да получим противиречие остава да преброим кратностите на хиперравнините $H_i$, $i = 0, \ldots, 4$, през $\delta$. Съгласно Теорема 2.31 и Лема 3.26 $\mathcal{K}(H_i) \neq 113$ и 117, тъй като една грийсмърова арка с параметри $(113, 29)$ или $(117, 30)$ няма 20-равнина. Следователно,

$$465 = \sum_{i=0}^{4} \mathcal{K}(H_i) - 4 \cdot \mathcal{K}(\delta) \leq 85 + 4 \cdot 101 - 4 \cdot 20 = 409,$$

противоречие. $\square$

**Теорема 3.38.** *В* $\mathrm{PG}(4,4)$ *не съществуват арки с параметри* $(464,117)$.

*Доказателство.* Несъществуването на $(464,117)$-арки в $\mathrm{PG}(4,4)$ доказваме с помощта на теоремата за разширимост на Hill-Lizak [100, 103] като се покаже, че такава арка винаги е разширима до несъществуваща $(465,117)$-арка. За това е достатъчно да се отхвърли съществуването на хиперравнини с кратности 102, 86, 83 и 82. Нека допусмнем, че $\mathcal{K}$ е $(464,117)$-арка в $\mathrm{PG}(4,4)$. Хиперравнини с кратност 102 са недопустими, тъй като ограничението на $\mathcal{K}$ върху такава хиперравнина е $(102,26)$-арка без 0-точки. Съгласно Забележка 3.25 26-равнина в $(118,30)$-арка, а следователно и в $(117,30)$-арка, има 0-точка, което води до противоречие.

Сега ще се възползваме от Следствие 2.34. Съгласно него, ако една $(464,117)$-арка е неразширима, то тя има поне 11 хиперравнини с кратност 82, 83 и 86. Да допуснем, че съществува 82- или 83-хиперравнина $H$. Такива хиперравнини трябва да са проективни, откъдето следва, че всяка равнина в тях е с кратност поне 18. Сега с просто броене се установява, че не съществува хиперравнина, различна от $H$ с кратност 82, 83 или 86. Преброявайки кратностите на хиперравнините през общата им равнина получаваме: $|\mathcal{K}| = 464 \leq 83+86+3\cdot117-4\cdot18 = 448$, противоречие.

Остана да разгледаме случая, когато всички хиперравнини с кратност $\not\equiv n, n+1 \pmod 4$ са 86-хиперравнини. Ограничението на $\mathcal{K}$ върху 86-хиперравнина е $(86,22)$-арка. Арките с тези параметри в $\mathrm{PG}(3,4)$ са добре известни [148]. Те биват два типа:

- сума на равнинна $(22,6)$-арка в равнина $\pi$ на $\mathrm{PG}(3,4)$ и

  $\mathrm{AG}(3,4) = \mathrm{PG}(3,4) - \pi$;

- сума на симетричната разлика на равнина $\pi$ в $\mathrm{PG}(3,4)$ и $\mathrm{PG}(3,2)$ с $\mathrm{AG}(3,4) = \mathrm{PG}(3,4) - \pi$.

В първия случай минималната кратност на равнина е 16 и отново стигаме до противречие чрез броене, допускайки наличието на втора 86-хиперравнина: $464 \leq 86+86+3\cdot117-4\cdot16 = 459$. Във втория случай минималната кратност на равнина е 14 и преброяването не може да бъде приложено директно. Да отбележим, че 117-хиперравнина и 86-хиперравнина не могат да се пресичат в 14-равнина, тъй като в $(117,30)$-арка в $\mathrm{PG}(3,4)$ всяка 14-равнина е допълнение на права и две други точки, докато в $(86,22)$-арка тя е допълнение на подравнина на Baer. $\square$

**Следствие 3.39.** *Не съществуват линейни кодове с параметри* $[464, 5, 347]_4$. *Това определя точните стойности* $n_4(5, 347 + i) = 465 + i$ *за* $i = 0, 1$.

### 3.4.5 Несъществуване на $(398, 101)$, $(396, 100)$ и $(395, 100)$-арки

В този раздел доказваме несъществуването на $(398, 101)$-, $(396, 100)$- и $(395, 100)$-арки в $\mathrm{PG}(4, 4)$. Доказателството ни се опира на характеризацията на арките с параметри $(100, 26)$, $(101, 26)$ и $(102, 26)$ в $\mathrm{PG}(3, 4)$, представена в раздел 3.4.2.

**Теорема 3.40.** *Не съществуват* $(398, 101)$-*арки в* $\mathrm{PG}(4, 4)$.

*Доказателство.* Да допуснем противното и нека $\mathcal{K}$ е $(398, 101)$-арка в $\mathrm{PG}(4, 4)$. От факта, че 2-точките в $(102, 26)$-арка образуват шапка в $\mathrm{PG}(3, 4)$ и от това, че $(101, 26)$-арките са разширими имаме, че никои три 2-точки в хиперравнина на $\mathcal{K}$ не са колинеарни. Всяка 26-равнина на $\mathcal{K}$ се съдържа в поне една 101-хиперравнина. В противен случай за мощността на $\mathcal{K}$ бихме имали $|\mathcal{K}| = 398 =\leq 5 \cdot 100 - 4 \cdot 26 = 396$, противоречие. От разширимостта на $(101, 26)$-арките следва, че никоя 26-равнина на $\mathcal{K}$ не е инцидентна с 0-точка.

Сега ще покажем, че никои три точки в 100-хиперравнина на $\mathrm{PG}(4, 4)$ не са колинеарни. Да допуснем противното и нека $\Delta$ е такава хиперравнина. Ако $\Delta$ няма 0-точка, то тогава $\Delta$ има 8-права, което противоречи на това, че максималната кратност на права е 7 (Лема 3.7).

Нека $\Delta$ има 0-точка $P$. Тогава максималната кратност на равнините през $P$ е 25. Следователно арката $\mathcal{K}|_\Delta$ е разширима до $(101, 26)$-арка, съдържаща три колинеарни 2-точки, което е невъзможно.

Да допуснем, че арката $\mathcal{K}$ има три колинеарни 2-точки и нека $L$ е правата инцидентна с тях. Тъй като $\mathcal{K}$ няма 8 прави, то $L$ съдържа поне една 0-точка. Правата $L$ не е 7-права, защото всяка 7-права е инцидентна с 26-равнина, а в последната няма 0-точки. Следователно, $L$ е 6-права. Нека $\varphi$ е проекция от $L$ в равнина, неинцидентна с $L$. Тогава арката $\mathcal{K}^\varphi$ е с мощност 392 като кратността на всяка нейна точка е най-много 19. Тъй като правата $L$ не се съдържа нито в 101-, нито в 100-хиперравнина, то $\mathcal{K}^\varphi$ няма както 95-, така и 94-прави. Следователно, $\mathcal{K}^\varphi = 19 - \mathcal{B}$, където $\mathcal{B}$ е равнинно $(7, 2)$-блокиращо множество. Такова блокиращо множество не съществува. Така от една страна имаме, че ако съществува $(398, 101)$-арка в $\mathrm{PG}(4, 4)$, то 2-точките ѝ образуват шапка, която има поне $398-341 =$

57 точки. От друга страна максималната мощност на шапка в $\mathrm{PG}(4,4)$ е 41 [57, 183]. Следователно в $\mathrm{PG}(4,4)$ не съществуват арки с параметри $(398,101)$. □

**Следствие 3.41.** *Не съществуват линейни кодове с параметри* $[398,5,297]_4$ *и* $[399,5,298]_4$. *Следователно,* $n_4(5,297) = 399$ *и* $n_4(5,298) = 400$.

Сега ще докажем несъществуването на арки в $\mathrm{PG}(4,4)$ с параметри $(395,100)$ и $(396,100)$. Оттук ще следва и несъщетвуването на $[395,5,295]_4$- и $[396,5,296]_4$-кодове.

**Теорема 3.42.** *Не съществуват* $(396,100)$*-арки в* $\mathrm{PG}(4,4)$.

*Доказателство.* Нека $\mathcal{K}$ е $(396,100)$-арка в $\mathrm{PG}(4,4)$. От геометричния вариант на теоремата на Ward, както и от броене, получаваме, че допустимите кратности на хиперравнини по отношение на $\mathcal{K}$ са следните: 100, 96, 92, 86, 84, 82, 80, 78 и 76. Хиперравнини с по-малка кратност са недопустими, тъй като $(100,26)$-арките в $\mathrm{PG}(3,4)$ нямат равнини с кратност по-малка от 20.

Тъй като броят на 2-точките в $\mathcal{K}$ е поне 55, а максималната кратност на шапка в $\mathrm{PG}(4,4)$ е 41, то съществуват три колинеарни 2-точки. Права инцидентна с три 2-точки е 6- или 7-права.

Най-напред да допуснем, че съществува 7-права $L$, инцидентна с три 2-точки и да разгледаме проекция $\varphi$ от $L$. Тази права се съдържа в поне една 26-равнина $\pi$, а следователно, и в 100-хиперравнина. Означаваме петте хиперравнини през $\pi$ с $\Delta_i$, $i = 0,\ldots,4$. Ясно е, че всичките са от типа, описан в Теорема 3.34(2). Следователно, $\mathcal{K}^\varphi$ има пет 17- и шестнадесет 19-точки. Освен това петте 17-точки трябва да образуват блокиращо множество и, следователно, са колинеарни.

Да разгледаме друга проекция $\psi$ от 0-точката $P$, лежаща на правата $L$, в хиперравнина, неинцидентна с $P$. Образът на 100-хиперравнина има пет 7-точки, една 5-точка и петнадесет 4-точки, като 5- и 7-точките образуват хиперовал. Освен това е ясно, че $\mathcal{K}^\psi$ има седемнадесет 7-точки, които образуват шапка. Всяка 7-точка е инцидентна с единствена допирателна равнина към тази шапка. Тази равнина трябва да съдържа всички 5-точки (тъй като е образ на 92-хиперравнината от аргумента в предния абзац). Това наблюдение е в сила за всяка 7-точка, т.е. 5-точките се съдържат във всички допирателни равнини, което е невъзможно.

Накрая да разгледаме 6-права $L$, съдържаща три 2-точки и проекция $\varphi$ от $L$. Тъй като 100-хиперравнините не съдържат такива 6-прави, получаваме, че максималната кратност на хиперравнина през $L$ е 96. Оттук получаваме

$$390 = |\mathcal{K}^{\varphi}| = \sum_{M} \mathcal{K}^{\varphi}(M) \leq \frac{21 \cdot 90}{5} = 378,$$

където сумата е по всички прави $M$ в проекционната равнина. Това противоречие завършва доказателството. □

В следващата теорема ще покажем, че ако съществува $(395, 100)$-арка в $\mathrm{PG}(4, 4)$, то тя е разширима до $(396, 100)$-арка. Оттук и от Теорема 3.42 ще следва и несъществуването на $(395, 100)$-арки.

**Теорема 3.43.** *Не съществуват* $(395, 100)$*-арки в* $\mathrm{PG}(4, 4)$.

*Доказателство.* Нека $\mathcal{K}$ е $(395, 100)$-арка в $\mathrm{PG}(4, 4)$. Както в доказателството на Теорема 3.42, съществуват три колинеарни 2-точки. За тях имаме два случая: (a) съществува 7-права $L$, инцидентна с три 2-точки; (b) всяка права инцидентна с три 2-точки е 6-права.

(a) Правата $L$ трябва да се съдържа в някоя 100-хиперравнина $\Delta_0$, която е неразширима (Теорема 3.34). Тъй като такава $(100, 26)$-арка в $\mathrm{PG}(3, 4)$ съдържа само равнини с кратност 26, 24, 22 и 20, възможните кратности на хиперравнините по отношение на $\mathcal{K}$ са: $100, 99, 92, 91, 86, \ldots, 83$ и $78, \ldots, 75$.

Най-напред ще отхвърлим съществуването на 78- и 77-хиперравнини. Ограничението на $\mathcal{K}$ върху такива хиперравнини е проективна арка, чиито максимални равнини са с кратност 20. Следователно те са или допълнение на права и две (съотв. три) точки или допълнение на подравнина на Baer (съотв. подравнина на Baer и точка). Да допуснем, че съществува такава хиперравнина и да я означим с $\Delta_1$. Ясно е, че $\Delta_1$ пресича $\Delta_0$ в 20-равнина, тъй като последната няма равнини с по-малка кратност. Да разгледаме проекция $\varphi$ от 4-права $K$ в равнината $\Delta_0 \cap \Delta_1$. Образът $\varphi(\Delta_0)$ е от тип $(22, 22, 20, 16, 16)$ и възможните типове за правата $\varphi(\Delta_1)$ са:

- ако $\Delta_1$ е 77-хиперравнина: $(16, 16, 15, 15, 11)$, $(16, 16, 16, 14, 11)$, $(16, 16, 16, 15, 10)$, $(16, 16, 16, 16, 9)$;

- ако $\Delta_1$ е 78-хиперравнина: $(16, 16, 16, 15, 11)$, $(16, 16, 16, 16, 10)$.

Ще разгледаме случая, когато $\Delta_1$ е 78-хиперравнина (случаят $\mathcal{K}(\Delta_1) = 77$ се решава по подобен начин). Останалите три хиперравнини през $\Delta_0 \cap \Delta_1$ означаваме с $\Delta_2, \Delta_3, \Delta_4$. Те трябва да са с кратност 99 (тъй като не съществуват хиперравнини с кратност 97 и 98). Всяка 26-равнина в 99-хиперравнина се съдържа в четири други хиперравнини с кратност 100. Следователно правите $\varphi(\Delta_i)$, $i = 2, 3, 4$, не съдържат 22-точки и са от тип $(20, 20, 20, 19, 16)$. Всяка 22-точка в проекционната равнина е инцидентна с четири 96-прави (образи на 100-хиперравнини) и една 95-права (образ на 99-равнина). Следователно 95-правите през всяка 22-точка съдържат 19-точките от $\varphi(\Delta_i)$, $i = 2, 3, 4$, което е невъзможно.

Сега ще отхвърлим съществуването на 86-хиперравнини. Всяка 22-равнина в 100-хиперравнина има една 2-точка и двадесет 1-точки. Следователно единствената възможност за 86-хиперравнина е тази с една 2-точка и осемдесет и четири 1-точки. Такава хиперравнина има само 21- и 22-равнини и следователно $\mathcal{K}$ няма други хиперравнини с кратност 85 или 86. Съгласно Следствие 2.34 $\mathcal{K}$ е разширима, противоречие с Теорема 3.42.

Най-накрая 85-хиперравнина $\Delta_1$ трябва да съдържа 2-точка; в противен случай всички точки са 1-точки, а всички равнини 21-равнини, което е невъзможно (100-хиперравнина не съдържа 21-равнина). Ако $\Delta_1$ е 85-хиперравнина, то всяка 6-права в нея е инцидентна с една 21-равнина и четири 22-равнини. Оттук всяка 6-права в $\Delta_1$ има една 2-точка и четири 1-точки (срв. структурата на $(100, 26)$-арките в $\mathrm{PG}(3, 4)$). Следователно $\Delta_1$ съдъжа или точно една 2-точка и една 0-точка, или две 2-точки и две 0-точки (всички колинеарни) като всчки останали точки са 1-точки. С броене получаваме, че две 85-хиперравнини се пресичат най-много в 18-равнина, откъдето е ясно, че $\mathcal{K}$ съдържа най-много една 85-хиперравнина. Отново получаваме, че $\mathcal{K}$ е разширима съгласно Следствие 2.34, което е невъзможно.

(b) В този случай кои да е три колинеарни 2-точки определят 6-права. От характеризацията на $(100, 26)$-арките в $\mathrm{PG}(3, 4)$ (Теорема 3.34) следва, че всяка 100-хиперавнина съдържа разширима $(100, 26)$-арка и, следователно, никоя 26-равнина не съдържа три колинеарни 2-точки. Да разгледаме 6-права $L$ с три колинеарни 2-точки и да допуснем, че $L$ се съдържа в 99-хиперравнина $\Delta$. В $\Delta$ съществува 25-равнина $\pi$ през $L$. Никоя от двете 0-точки на $L$ не лежи на 7-права. Следователно $\mathcal{K}|_\pi$ е разширима до $(26,7)$-арка чрез увеличаване на кратността на едната от тях. Но тогава $L$ става 7-права с 0-точка, противоречие.

Дотук доказахме, че кратностите на хиперравнините през $L$ не надхвърлят 97. Да разгледаме проекция $\varphi$ от $L$. Тогава $|\mathcal{K}^\varphi| = 389$ и $\mathcal{K}^\varphi(M) \leq 91$ за всяка права $M$ в проекционната равнина. Преброяваме по два начина кратностите на правите в проекционната равнина. Получаваме

$$389 = |\mathcal{K}^\varphi| = \sum_M |\mathcal{K}^\varphi(M)| \leq \frac{21 \cdot 91}{5} = \frac{1911}{5} < 383,$$

противоречие. □

Ще формулираме Теореми 3.42 и 3.43 в термините на теория на кодирането.

**Следствие 3.44.** *Не съществуват линейни кодове с параметри* $[395,5,295]_4$ *и* $[396,5,296]_4$. *Следователно,* $n_4(5,295) = 396$ *и* $n_4(5,296) = 397$.

### 3.4.6 Точни стойности и граници за $n_4(5,d)$

Резултатите от предния раздел, заедно с някои нови резултати на H. Kanda [118], който доказа несъществуването на $[383,5,286]_4$ и $[447,5,334]_4$ кодове, намалиха значително броя на минималните разстояния, за които основната задача на теория на кодирането е нерешена. В настоящия момент броят на тези $d$, е 98. За 63 от тях $n_4(5,d) = g_4(5,d)$ или $g_4(5,d)+1$, докато за останалите 35 е изпълнено $n_4(5,d) = g_4(5,d)+1$ или $g_4(5,d)+2$. Стойностите на тези минимални разстояния $d$ са представени в таблицата по-долу. Третата колона съдържа долната и горната граница за стойноста на $n_4(5,d)$. Четвъртата колона на таблицата съдържа параметрите на ограничението върху максимална хиперравнина на арка, за която се реализира долната граница в третата колона. Характеризирането на арките в максималните хиперравнини е обикновено първа стъпка към решаване на отделните случаи.

| $d$ | $g_4(5,d)$ | $n_4(5,d)$ | Максимална хиперравнина |
|---|---|---|---|
| 41 | 57 | 58–59 | |
| 42 | 58 | 59–60 | |
| 43 | 59 | 60–61 | |
| 44 | 60 | 61–62 | $(17,6)$-арка в PG$(3,4)$ |
| 45 | 62 | 63–64 | |
| 46 | 63 | 64–65 | $(18,6)$-арка в PG$(3,4)$ |
| 65 | 90 | 90–91 | |
| 66 | 91 | 91–92 | |
| 67 | 92 | 92–93 | |
| 68 | 93 | 93–94 | $(25,8)$-арка в PG$(3,4)$ |
| 69 | 95 | 95–96 | |
| 70 | 96 | 96–97 | $(26,8)$-арка в PG$(3,4)$ |
| 75 | 102 | 103–104 | |
| 76 | 103 | 104–105 | $(28,9)$-арка в PG$(3,4)$ |
| 81 | 111 | 111–112 | |
| 82 | 112 | 112–113 | |
| 83 | 113 | 113–114 | |
| 84 | 114 | 114–115 | $(30,9)$-арка в PG$(3,4)$ |
| 89 | 121 | 122–123 | |
| 90 | 122 | 123–124 | |
| 91 | 123 | 124–125 | |
| 92 | 124 | 125–126 | $(33,10)$-арка в PG$(3,4)$ |
| 93 | 126 | 127–128 | |
| 94 | 127 | 128–129 | |
| 95 | 128 | 129–130 | |
| 96 | 129 | 130–131 | $(34,10)$-арка в PG$(3,4)$ |
| 97 | 132 | 133–134 | |
| 98 | 133 | 134–135 | |
| 99 | 134 | 135–136 | |
| 100 | 135 | 136–137 | $(36,11)$-арка в PG$(3,4)$ |
| 102 | 138 | 139–140 | |
| 103 | 139 | 140–141 | |
| 104 | 140 | 141–142 | $(37,11)$-арка в PG$(3,4)$ |
| 105 | 142 | 143–144 | |
| 106 | 143 | 144–145 | |
| 107 | 144 | 145–146 | |
| 108 | 145 | 146–147 | $(38,11)$-арка в PG$(3,4)$ |

| $d$ | $g_4(5,d)$ | $n_4(5,d)$ | Максимална хиперравнина |
|---|---|---|---|
| 109 | 147 | 148–149 | |
| 110 | 148 | 149–150 | |
| 111 | 149 | 150–151 | |
| 112 | 150 | 151–152 | $(39,11)$-арка в $\mathrm{PG}(3,4)$ |
| 115 | 155 | 156–157 | |
| 116 | 156 | 157–158 | $(41,12)$-арка в $\mathrm{PG}(3,4)$ |
| 123 | 165 | 166–167 | |
| 124 | 166 | 167–168 | $(39,11)$-арка в $\mathrm{PG}(3,4)$ |
| 129 | 175 | 175–176 | |
| 130 | 176 | 176–177 | |
| 131 | 177 | 177–178 | |
| 132 | 178 | 178–179 | $(46,13)$-арка в $\mathrm{PG}(3,4)$ |
| 133 | 180 | 180–181 | |
| 134 | 181 | 181–182 | |
| 135 | 182 | 182–183 | |
| 136 | 183 | 183–184 | $(47,13)$-арка в $\mathrm{PG}(3,4)$ |
| 137 | 185 | 185–186 | $(48,13)$-арка в $\mathrm{PG}(3,4)$ |
| 273 | 367 | 367–368 | |
| 274 | 368 | 368–369 | |
| 275 | 369 | 369–370 | |
| 276 | 370 | 370–371 | $(94,25)$-арка в $\mathrm{PG}(3,4)$ |
| 277 | 372 | 372–373 | |
| 278 | 373 | 373–374 | |
| 279 | 374 | 374–375 | |
| 280 | 375 | 375–376 | $(95,25)$-арка в $\mathrm{PG}(3,4)$ |
| 281 | 377 | 377–378 | |
| 282 | 378 | 378–379 | |
| 283 | 379 | 379–380 | |
| 284 | 380 | 380–381 | $(96,25)$-арка в $\mathrm{PG}(3,4)$ |
| 285 | 382 | 382–383 | $(97,25)$-арка в $\mathrm{PG}(3,4)$ |
| 289 | 388 | 388–389 | |
| 290 | 389 | 389–390 | |
| 291 | 390 | 390–391 | |
| 292 | 391 | 391–392 | $(99,26)$-арка в $\mathrm{PG}(3,4)$ |
| 293 | 393 | 393–394 | |
| 294 | 394 | 394–395 | $(100,26)$-арка в $\mathrm{PG}(3,4)$ |

| $d$ | $g_4(5,d)$ | $n_4(5,d)$ | Максимална хиперравнина |
|---|---|---|---|
| 321 | 431 | 431–432 | |
| 322 | 432 | 432–433 | |
| 323 | 433 | 433–434 | |
| 324 | 434 | 434–435 | $(110,29)$-арка в $\mathrm{PG}(3,4)$ |
| 325 | 436 | 436–437 | |
| 326 | 437 | 437–438 | |
| 327 | 438 | 438–439 | |
| 328 | 439 | 439–440 | $(111,29)$-арка в $\mathrm{PG}(3,4)$ |
| 329 | 441 | 441–442 | |
| 330 | 442 | 442–443 | |
| 331 | 443 | 443–444 | |
| 332 | 444 | 444–445 | $(112,29)$-арка в $\mathrm{PG}(3,4)$ |
| 333 | 446 | 446–447 | $(113,29)$-арка в $\mathrm{PG}(3,4)$ |
| 337 | 452 | 452–453 | |
| 338 | 453 | 453–454 | |
| 339 | 454 | 454–455 | |
| 340 | 455 | 455–456 | $(115,30)$-арка в $\mathrm{PG}(3,4)$ |
| 341 | 457 | 457–458 | |
| 342 | 458 | 458–459 | |
| 343 | 459 | 459–460 | |
| 344 | 460 | 460–461 | $(116,30)$-арка в $\mathrm{PG}(3,4)$ |
| 345 | 462 | 462–463 | |
| 346 | 463 | 463–464 | $(117,30)$-арка в $\mathrm{PG}(3,4)$ |
| 353 | 473 | 473–474 | |
| 354 | 474 | 474–475 | $(120,31)$-арка в $\mathrm{PG}(3,4)$ |

# Глава 4

# Разширимост на арки и кодове

Тази глава е посветена на задачата за разширимост на арки и линейни кодове. Известно е, че добавянето на бит, който е проверка за четност, към кодовите думи на двоичен $[n,k,d]$-код с нечетно $d$ дава код с параметри $[n+1,k,d+1]$. Това наблюдение е обобщено от R. Hill и P. Lizak, които показаха, че ако кодовите думи на един $[n,k,d]_q$ с $(d,q)=1$ са с тегла 0 или $d \mod q$, то кодът е разширим до $[n+1,k,d+1]_q$-код. В серия от статии Maruta доказа редица нови теореми за разширимост [147, 149, 150, 151, 199]. Най-интересната от тях е обобщение на теоремата на Hill и Lizak (вж. Теорема 2.32) и гласи, че всеки $[n,k,d]_q$ код, с нечетно $q$, $d \equiv -2 \pmod q$ и тегла на кодовите думи $\equiv -2, -1$ и $0 \pmod q$ е разширим, а при някои допълнителни условия дори 2-разширим.

В тази глава излагаме един общ подход към задачата за разширимост на арки в крайни проективни геометрии. Разширимостта на една арка се свързва със строежа на дефинирана по специален начин арка в дуалното пространство. При това възникват обекти, които ние наричаме $(t \mod q)$-арки или арки със свръхделимост. Характеризацията на тези арки е интерсна сама по себе си и води до важни геометрични задачи. Подходът, изложен в тази глава позволява да се даде ново геометрично доказателство на теоремите на Hill–Lizak и Maruta. Развитите техники могат да бъдат приложени към основната задача на теория на кодирането. С тях успяваме да докажем несъществуването на някои кодове на Griesmer.

Материалът в тази глава е организиран както следва. В раздел 4.1 са въведени $(t \mod q)$-арките. Описана е връзката между разширимостта на арки, имащи свойството $t$-квазиделимост, и структурата на свързаните с тях $(t \mod q)$-арки. В раздел 4.2 са представени конструкции на $(t \mod q)$-арки. Най-важната от тях е конструкцията лифтинг на арка в пространство с по-голяма размерност. Доказано е, че всяка $(t \mod q)$-арка е сума на афинни пространства, а оттам и сума на арки, получени с лифтинг. Раздел 4.3 съдържа резултати за $(t \mod q)$-арки с ограничена кратност на точките. Това са точно тези арки със свръхделимост, които се получават във връзка със задачата за разширимост на арки и кодове. В този раздел е представена конструкция на равнинни $(t \mod q)$-арки, използваща блокиращи множества с ограничена кратност на точките. Изложени са и някои структурни резултати за арки в $\mathrm{PG}(2,5)$ и $\mathrm{PG}(3,5)$. Раздел 4.4 съдържа общ резултат за разширимост на грийсмърови арки и кодове. В раздел 4.5 е доказано несъществуването на $(104,22)$-арки в $\mathrm{PG}(3,5)$, което решава един от четирите открити случая за оптимални кодове с $k=4$, $q=5$.

## 4.1 Дефиниция на $(t \mod q)$-арки

В този раздел разглеждаме геометрията $\Sigma = \mathrm{PG}(r,q)$ и нейната дуална $\widetilde{\Sigma}$, която е дефинирана по обичайния начин: в нея точки са хиперравнините на $\Sigma$, прави са подпространствата с коразмерност 2, а инцидентността е наследената от $\Sigma$. Нека $S$ е подпространство на $\Sigma$ с проективна размерност $s$. Ще означаваме с $\widetilde{S}$ подпространството в $\widetilde{\Sigma}$, асоциирано с $S$. Така например, ако $P$ е точка в $\Sigma$, то $\widetilde{P}$ е съответната хиперравнина в $\widetilde{\Sigma}$. Ясно е, че размерността на $\widetilde{S}$ в $\widetilde{\Sigma}$ е $r-1-s$.

Нека $\mathcal{K}$ е $(n,w)$-арка в $\mathrm{PG}(r,q)$, имаща свойството $t$-квазиделимост с делител $q$ с $t<q$. Такива арки се появяват при разглеждане на кодове на Griesmer с $d \equiv -t \pmod{q}$, или еквивалентно, $(n,w)$-арки на Griesmer с $w \equiv n+t \pmod{q}$. За арката $\mathcal{K}$ дефинираме нова арка $\widetilde{\mathcal{K}}$ в дуалната геометрия $\widetilde{\Sigma}$, с множество от точки $\widetilde{\mathcal{H}} = \{\widetilde{H} | H -$ хиперравнина в $\Sigma\}$, по следното правило:

$$\widetilde{\mathcal{K}} : \begin{cases} \widetilde{\mathcal{H}} & \rightarrow \quad \{0,1,\ldots,t\} \\ \widetilde{H} & \rightarrow \quad \widetilde{\mathcal{K}}(H) \equiv n+t-\mathcal{K}(H) \pmod{q} \end{cases}, \tag{4.1}$$

В тази глава ще наричаме $\widetilde{\mathcal{K}}$ *дуална арка за* $\mathcal{K}$. Съгласно тази дефиниция хиперравнините с кратност $n+a \pmod{q}$ се превръщат в $(t-a)$-точки в дуалната геометрия. По-специално, максималните хиперравнини се превръщат в 0-точки по отношение на $\widetilde{\mathcal{K}}$. Ще отбележим, че мощността на $\widetilde{\mathcal{K}}$ не се определя еднозначно от параметрите на $\mathcal{K}$, а зависи съществено от спектъра ѝ. Със следващия резултат установяваме, че за всяка арка $\mathcal{K}$, която е $t$-квазиделима по модул $q$, дуалната $\widetilde{\mathcal{K}}$ притежава свойството делимост и то не само по отношение на хиперравините, но и по отношение на всички подпространства с положителна размерност.

**Теорема 4.1.** *Нека $\mathcal{K}$ е $(n,w)$-арка в $\Sigma = \mathrm{PG}(r,q)$, която притежава свойството $t$-квазиделимост по модул $q$ като $t < q$. Тогава за всяко подпространство $\widetilde{S}$ на $\widetilde{\Sigma}$, с размерност $\dim \widetilde{S} \geq 1$, е изпълнено*

$$\widetilde{\mathcal{K}}(\widetilde{S}) \equiv t \pmod q.$$

*Доказателство.* Нека $\widetilde{S}$ е права в дуалната геометрия $\widetilde{\Sigma}$. Тя се асоциира с подпространство $S$ с коразмерност 2 в $\Sigma$. Нека $H_i$, $i = 0,\dots,q$, са хиперравнините през $S$ в $\Sigma$. Пресмятайки по два начина мощността на $\mathcal{K}$ получаваме

$$n = \sum_{i=0}^{q} \mathcal{K}(H_i) - q\mathcal{K}(S),$$

откъдето

$$\sum_{i=0}^{q} \mathcal{K}(H_i) \equiv n \pmod q.$$

От (4.1) имаме $\mathcal{K}(H_i) \equiv n + t - \widetilde{\mathcal{K}}(\widetilde{H_i}) \pmod q$, откъдето, замествайки в последното сравнение, получаваме

$$(q+1)(n+t) - \sum_{i=0}^{q} \widetilde{\mathcal{K}}(\widetilde{H}_i) \equiv n \pmod q,$$

откъдето

$$\widetilde{\mathcal{K}}(\widetilde{S}) = \sum_{i=0}^{q} \widetilde{\mathcal{K}}(\widetilde{H}_i) \equiv (q+1)(n+t) - n \equiv t \pmod q.$$

За подпространствата в $\widetilde{\Sigma}$ с размерност по-голяма от 1 можем да използваме вече доказания факт, че всички прави в тях са с кратност $t \pmod q$. Достатъчно е да фиксираме точка в съответното подпространство и да сумираме кратностите на всички прави през тази точка. $\square$

Направеното наблюдение оправдава следната дефиниция.

**Дефиниция 4.2.** Нека $t$ е цяло неотрицателно число. Една арка $\mathcal{K}$ в $\Sigma$ наричаме $(t \mod q)$-арка, ако за кратността на всяко подпространство $S$ с (проективна) размерност $\dim S \geq 1$ е изпълнено $\mathcal{K}(S) \equiv t \pmod q$.

Ясно е, че е достатъчно горното сравнение да бъде изпълнено само за правите в $\Sigma$. Съгласно Теорема 4.1, ако $\mathcal{K}$ арка, която е $t$-квазиделима по модул $q$, то дуалната ѝ $\widetilde{\mathcal{K}}$, зададена с (4.1), е $(t \mod q)$-арка, изпълняваща допълнителното условие, че максималната кратност на точка не надхвърля $t$.

Нека $\mathcal{K}$ е $(n, w)$-арка в $\Sigma$, която е $t$-квазиделима по модул $q$. Следващата теорема свързва разширимостта на $\mathcal{K}$ със структурата на $(t \mod q)$-арката $\widetilde{\mathcal{K}}$.

**Теорема 4.3.** *Нека $\mathcal{K}$ е $(n, w)$-арка в $\Sigma = \mathrm{PG}(r, q)$, която е $t$-квазиделима по модул $q$ като $t < q$. Нека $\widetilde{\mathcal{K}}$ е дуалната на $\mathcal{K}$, дефинирана чрез (4.1). Ако $\widetilde{\mathcal{K}}$ се представя във вида*

$$\widetilde{\mathcal{K}} = \sum_{i=1}^{c} \chi_{\widetilde{P}_i} + \mathcal{K}'$$

*където $\mathcal{K}'$ е някаква арка в $\widetilde{\Sigma}$, а $\widetilde{P}_1, \ldots, \widetilde{P}_c$ са с не непременно различни хиперравнини в $\widetilde{\Sigma}$, то $\mathcal{K}$ е $c$-кратно разширима. По-специално, ако $\widetilde{\mathcal{K}}$ съдържа в носителя си хиперравнина, то $\mathcal{K}$ е разширима.*

*Доказателство.* Ще използваме индукция по $c$. Тъй като максималните хиперравнини се асоциират с 0-точки в дуалната геометрия, то условието на теоремата означава, че съществува точка $P$ в $\Sigma$, която не е инцидентна с максимална хиперравнина. Да увеличим кратността на $P$ с 1. С това увеличваме кратността на всички хиперравнини през $P$. Следователно кратността на всички точки в хиперравнината $\widetilde{P}_1 := \widetilde{P}$ в дуалната геометрия се намалява с 1. Това означава, че

$$\mathcal{L}(Q) = \begin{cases} \mathcal{K}(Q) & \text{за } Q \neq P_1, \\ \mathcal{K}(Q) + 1 & \text{за } Q = P_1, \end{cases}$$

е $(n+1, w)$-арка в $\Sigma$, както и че

$$\widetilde{\mathcal{L}} = \widetilde{\mathcal{K}} - \chi_{\widetilde{P}_1} = \sum_{i=2}^{c} \chi_{\widetilde{P}_i} + \mathcal{K}'$$

за някоя арка $\mathcal{K}'$. Тъй като $\widetilde{\mathcal{L}}$ е $(c-1)$-разширима съгласно индукционното допускане, теоремата е доказана. $\square$

## 4.2 Структурни резултати за $(t \mod q)$-арки

В този раздел изследваме $(t \mod q)$-арките като чисто геометричен обект без връзка със задачата за разширимост. Започваме със следната тривиална конструкция.

**Теорема 4.4.** *Нека $\mathcal{F}_1$ е $(t_1 \mod q)$-арка, а $\mathcal{F}_2$ е $(t_2 \mod q)$-арка в $\mathrm{PG}(r,q)$. Тогава $\mathcal{F}_1 + \mathcal{F}_2$ е $(t \mod q)$-арка с $t = t_1 + t_2 \pmod q$, а $\alpha\mathcal{F}_1$, $\alpha \in \{0,\dots,q-1\}$ е $(t \mod q)$ арка с $t \equiv \alpha t_1 \pmod q$.*

За случая $t = 0$ получаваме следния важен резултат.

**Следствие 4.5.** *Нека $\mathcal{F}$ и $\mathcal{G}$ са $(0 \mod p)$-арки в $\mathrm{PG}(r,p)$, където $p$ е просто число. Тогава $\mathcal{F} + \mathcal{G}$ и $\alpha\mathcal{F}$, $\alpha \in \{0,\dots,p-1\}$, са също $(0 \mod p)$-арки. По-специално, множеството на всички $(0 \mod p)$-арки в $\mathrm{PG}(r,p)$ е векторно пространство над $\mathbb{F}_p$.*

Следващата конструкция не е толкова тривиална.

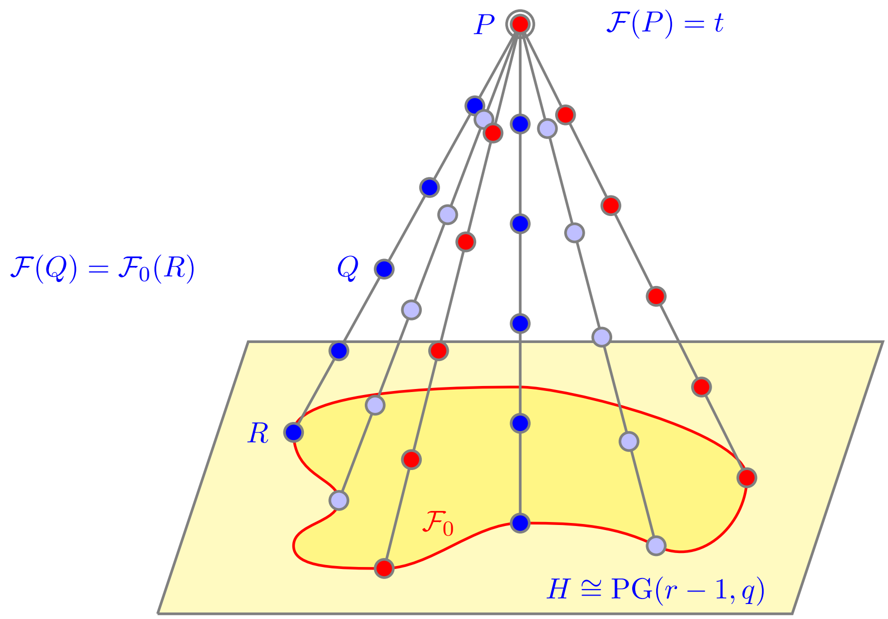
**Теорема 4.6.** *Нека $\mathcal{F}_0$ е $(t \mod q)$-арка в хиперравнината $H \cong \mathrm{PG}(r-1,q)$ на $\Sigma = PG(r,q)$. Нека точката $P \in \Sigma \setminus H$ е фиксирана. Арката $\mathcal{F}$ в $\Sigma$, дефинирана по следния начин:*

*– $\mathcal{F}(P) = t$;*

*– за всяка точка $Q \neq P$: $\mathcal{F}(Q) = \mathcal{F}_0(R)$, където $R = \langle P,Q\rangle \cap H$.*

*е $(t \mod q)$-арка с мощност $q|\mathcal{F}_0| + t$.*

*Доказателство.* Нека $\mathcal{F}$ е арка в $\mathrm{PG}(r,q)$, получена по описания в условието на теоремата начин. За да докажем, че $\mathcal{F}$ е $(t \mod q)$-арка е достатъчно да проверим, че кратността на всяка права в $\Sigma$ е сравнима с $t$ по модул $q$. Това е ясно за правите през $P$. Нека $L$ е права в $\Sigma$, неинцидентна с $P$ и нека $\pi$ е равнината, определена от $P$ и $L$, т.е. $\pi = \langle L,P\rangle$. Тогава, ако $L'$ е пресечната права на $\pi$ и $H$, то $L$ и $L'$ са с една и съща кратност по отношение на $\mathcal{F}$, тъй като точките на $L$ са със същите кратности като тези на $L'$. Следователно $\mathcal{F}(L) = \mathcal{F}(L') = \mathcal{F}_0(L) \equiv t \pmod q$. Конструкцията на $\mathcal{F}$ е илюстрирана на фигурата по-долу. $\square$




Една $(t \mod q)$-арка, получена по начина, описан в Теорема 4.6 наричаме *арка, получена от* $\mathcal{F}_0$ *чрез лифтинг*, а точката $P$ наричаме *точка, от която се извършва лифтинг* или *точка на лифтинг*. Горната конструкция може да се обобщи като заместим точката $P$ с подпространство $U$. Нека $\mathcal{F}_0$ е $(t \mod q)$-арка в подпространството $V$ на $\Sigma = \mathrm{PG}(r,q)$ и нека $U$ е допълнително подпространство на $U$: $\dim U + \dim V = r-1$, $U \cap V = \varnothing$. Тогава арката $\mathcal{F}$ в $\Sigma$ дефинирана чрез

- $\mathcal{F}(P) = t$ за всяка точка $P \in U$;
- всяка точка $Q \neq P$: $\mathcal{F}(Q) = \mathcal{F}_0(R)$, където $R = \langle U, Q\rangle \cap H$

наричаме *арка, получена чрез лифтинг от подпространството* $U$. Ясно е, че $\mathcal{F}$ също е $(t \mod q)$-арка. Да обележим, че ако арка е получена чрез лифтинг от подпространство, то тя е получена чрез лифтинг от всяка точка на това подпространство. В сила е и частично обръщане на това твърдение.

**Лема 4.7.** *Нека* $\mathcal{F}$ *е* $(t \mod q)$*-арка в* $\Sigma = \mathrm{PG}(r,q)$*, получена чрез лифтинг от две различни точки* $P$ *и* $Q$*. Тогава* $\mathcal{F}$ *се получава чрез лифтинг и от правата* $PQ$*. По-специално, точките, от които една* $(t \mod q)$*-арка се получава чрез лифтинг, образуват подпространство* $S$ *на* $\mathrm{PG}(r,q)$*.*

*Доказателство.* Нека $\mathcal{F}$ е $(t \mod q)$-арка в $\Sigma$, получена чрез лифтинг от различните точки $P$ и $Q$. Всички точки от правата $PQ$ са $t$-точки. Нека $R$ е произволна точка в $\Sigma$. Тогава всички точки от $PR$ (и съответно от $QR$), различни от $P$ (съответно различни от $Q$) имат една и съща кратност, да кажем $a$. Така всички точки в равнината $\langle P, Q, R\rangle$ извън $PQ$ имат също кратност $a$, което доказва лемата. $\square$

Оттук нататък ще разглеждаме само геометрии над прости полета, т.е ще фиксираме $\Sigma = \mathrm{PG}(r,p)$, където $p$ е просто число. Да означим с $V$ векторното пространство на всички $(0 \mod p)$-арки в $\mathrm{PG}(r,p)$. Следващото твъдение е продължение на Теорема 4.4 и Следствие 4.5.

**Лема 4.8.** *Нека $\mathcal{F}$ и $\mathcal{G}$ са $(0 \mod p)$-арки в $\mathrm{PG}(r,p)$, които са получени чрез лифтинг от едно и също подпространство $U$ с $\dim U \geq 0$. Тогава $\mathcal{F}+\mathcal{G}$ и $\alpha\mathcal{F}$, $\alpha \in \{0,1,\dots,p-1\}$, са също $(0 \mod p)$-арки, получени чрез лифтинг от $U$. По специално, $(0 \mod p)$-арките, получени чрез лифтинг от $U$ образуват подпространство на $V$.*

Означаваме с $A$ матрицата на инцидентност на $\mathrm{PG}(r,p)$, чиито редове са индексирани с точките (в някакъв фиксиран ред), а стълбовете – с правите на тази геометрия. Нека $\mathcal{F}$ е арка в $\mathrm{PG}(r,p)$, за която кратностите на точките не надхвърлят $p-1$. Ясно е, че $\mathcal{F}$ може да се представи чрез вектор $\boldsymbol{x}$ над $\mathbb{F}_p$:

$$\boldsymbol{x} = (\mathcal{F}(P_1),\dots,\mathcal{F}(P_{\frac{p^{r+1}-1}{p-1}})),$$

където кратностите на точките се разглеждат като елементи на $\mathbb{F}_p$, а редът на точките е същия, който сме фиксирали за матрицата $A$. Ако $\boldsymbol{a}_i^T$ е $i$-тия стълб на $A$, асоцииран с $i$-тата права $L_i$, то $\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{a}_i^T \equiv \mathcal{K}(L_i) \pmod p$. Оттук следва, че $\mathcal{F}$ е $(0 \mod p)$-арка точно тогава, когато

$$\boldsymbol{x}A = \mathbf{0}, \tag{4.2}$$

където $\mathbf{0}$ е нулевият вектор. Следователно,

$$\dim V = \frac{p^{r+1}-1}{p-1} - \mathrm{rk}_p\, A.$$

Рангът на матрицата $A$ може да се получи от класическата теорема на Hamada [73], която е формулирана по-долу в общ вид.

**Теорема 4.9.** *Рангът на матрицата на инцидентност на* $\mathrm{PG}(r, p^h)$, *редовете на която са индексирани с точките, а стълбовете – с* $d$*-мерните подпространства, над* $\mathbb{F}_{p^h}$ *е равен на*

$$R_d(r,p^h) = \sum_{s_0} \cdots \sum_{s_{h-1}} \prod_{j=0}^{h-1} \sum_{i=0}^{L(s_{j+1},s_j)} (-1)^i \binom{r+1}{i} \binom{r+s_{j+1}p-s_j-ip}{i},$$

*където* $s_h = s_0$, *и сумирането се извършва по всички цели числа* $s_j$, $j = 0, \ldots, h-1$, *за които* $d+1 \leq s_j \leq r+1$, $0 \leq s_{j+1}p - s_j \leq (r+1)(p+1)$, *и* $L(s_{j+1}, s_j)$ *е най-голямото цяло число, ненадхвърлящо* $(s_{j+1}p - s_j)/p$, *т.е.*

$$L(s_{j+1}, s_j) = \lfloor \frac{s_{j+1}p - s_j}{r} \rfloor.$$

Да отбележим, че в означенията на Hamada матрицата $A$ е означена с $R_1(r,p)$. Горната формула не е много удобна за използване. За нас е важен специалният случай, когато $d = 1$ и $h = 1$, т.е. матрицата $A$ е с редове, индексирани с точките и стълбове, индексирани с правите, а полето, над което се разглежда $A$ е просто. Тогава съществува затворена формула за ранга, която е получена от J. van Lint. По-долу тя е представена като следствие от теоремата на Hamada, макар да не се получава непосредствено. То може да бъде намерено в работата на Ceccherini и Hirschfeld [39].

**Следствие 4.10.** *За матрицата на инцидентност точки на прави на геометрията* $\mathrm{PG}(r,q)$ *е в сила*

$$\mathrm{rk}_p\, R_1(r,p) = \frac{p^{r+1}-1}{p-1} - \binom{p+r-1}{r}.$$

**Следствие 4.11.** *Размерността на векторното пространство на всички* $(0 \mod p)$*-арки е* $\dim V = \binom{p+r-1}{r}$.

Със следващата теорема характеризираме векторното пространство $V$ на всички $(0 \mod p)$-арки в $\mathrm{PG}(r,p)$.

**Теорема 4.12.** *Векторното пространство на* $(0 \mod p)$*-арките в* $\mathrm{PG}(r,p)$ *се поражда от допълненията на хиперравнините.*

*Доказателство.* Нека $B$ е матрицата на инцидентност точки на хиперравнини на геометрията $\mathrm{PG}(r,p)$. Рангът на тази матрица лесно се получава от Теорема 4.9, но е известен и от много други източници (вж. напр. [62, 141, 176]):

$$\mathrm{rk}_p\, B = \binom{p+r-1}{r} + 1.$$

Нека $T_1,\dots,T_{s+1}$, $s = \binom{p+r-1}{r}$, са хиперравнини, чиито характеристични вектори $\chi_{T_i}$, $i = 1,\dots,s+1$, образуват база на пространството на стълбовете на $B$. Ясно е, че векторът от единици $\boldsymbol{j}$ принадлежи на това пространство, тъй като сумата на всички стълбове на $B$ над $\mathbb{F}_p$ е $\boldsymbol{j}$. Следователно съществуват такива елементи $\lambda_i \in \mathbb{F}_p$, че

$$\lambda_1\chi_{T_1} + \cdots + \lambda_s\chi_{T_s} + \lambda_{s+1}\chi_{T_{s+1}} = \boldsymbol{j}, \tag{4.3}$$

като поне един от елементите $\lambda_i$ е различен от 0. Без ограничение на общността, нека $\lambda_{s+1} \neq 0$. Да допуснем, че векторите $\boldsymbol{j} - \chi_{T_1},\dots,\boldsymbol{j} - \chi_{T_s}$ са линейно зависими над $\mathbb{F}_p$. Тогава съществуват елементи $\mu_i \in \mathbb{F}_p$, не всички нула, за които

$$\mu_1(\boldsymbol{j} - \chi_{T_1}) + \cdots + \mu_s(\boldsymbol{j} - \chi_{T_s}) = \mathbf{0}. \tag{4.4}$$

Ясно е, че $\mu_1 + \cdots + \mu_s \neq 0$, тъй като в противен случай векторите $\chi_{T_1},\dots,\chi_{T_s}$ биха били линейно зависими. Сега от (4.3) и (4.4) получаваме

$$(\mu_1 - \lambda_1\sum_i \mu_i)\chi_{T_1} + \cdots + (\mu_s - \lambda_s\sum_i \mu_i)\chi_{T_s} - \lambda_{s+1}\sum_i \mu_i\chi_{T_i} = \mathbf{0}.$$

Тъй като $\lambda_{s+1}\sum_i \mu_i \neq 0$, това е противоречие с линейната независимост на $\chi_{T_1},\dots,\chi_{T_s}$. Следователно векторите $\boldsymbol{j} - \chi_{T_1},\dots,\boldsymbol{j} - \chi_{T_s}$ са линейно независими и

$$s \leq \mathrm{rk}_p\langle \boldsymbol{j} - \chi_T \mid T \text{ хиперравнина } \rangle \leq s+1.$$

От друга страна, $\boldsymbol{j} - \chi_T$ е решение на (4.2) за всяка хиперравнина $T$. Следователно съгласно Следствие 4.11

$$\mathrm{rk}_p\langle \boldsymbol{j} - \chi_T \mid T \text{ хиперравнина } \rangle = \binom{p+r-1}{r}.$$

$\square$

Сега, тъй като арките, зададени с $\boldsymbol{j} - \chi_T$, могат да се получат чрез лифтинг от всяка точка на хиперравнината $T$, то получаваме като следствие следния резултат.

**Следствие 4.13.** *Всяка* $(0 \mod p)$*-арка в* $\mathrm{PG}(r,p)$ *е сума на арки, получени чрез лифтинг.*

**Следствие 4.14.** *Всяка* $(t \mod p)$*-арка в* $\mathrm{PG}(r,p)$ *е сума на арки, получени чрез лифтинг.*

*Доказателство.* Всяка $(t \mod p)$-арка $\mathcal{F}$ може да се представи като $\mathcal{F} = t\chi_H + \mathcal{F}_0$, където $H$ е фиксирана хиперравнина и $\mathcal{F}_0$ е $(0 \mod p)$-арка. Сега резултатът се получава от Следствие 4.11 и факта, че $t\chi_T$ се получава чрез лифтинг. □

В равнинния случай можем да докажем нещо повече. Всяка $(t \mod p)$-арка може да се представи като сума на не повече от $p$ арки, получени чрез лифтинг.

**Теорема 4.15.** *Нека* $P_1, \ldots, P_{p+1}$ *са точките на коника в* $\mathrm{PG}(2,p)$. *Да означим с* $V_i$ *векторното пространство на всички* $(0 \mod p)$*-арки, получени чрез лифтинг от* $P_i$, $i = 1, \ldots, p+1$, *а с* $V$ *– векторното пространство на всички* $(0 \mod p)$*-арки. Тогава*

$$V = V_1 + V_2 + \cdots + V_p.$$

*Доказателство.* Най-напред ще докажем, че

$$(V_{i_1} + \cdots + V_{i_k}) \cap V_{i_{k+1}} = V_{i_1} \cap V_{i_{k+1}} + \cdots + V_{i_k} \cap V_{i_{k+1}} \tag{4.5}$$

за всяко множество от индекси $\{i_1, \ldots, i_{k+1}\} \subseteq \{1, \ldots, p+1\}$.

Да разгледаме следната верига от включвания

$$\begin{array}{ccccc}
(V_1 + V_2) \cap V_{p+1} & \subseteq & \ldots & \subseteq & (V_1 + \cdots + V_p) \cap V_{p+1} \\
\cup & & & & \cup \\
V_1 \cap V_{p+1} + V_2 \cap V_{p+1} & \subseteq & \ldots & \subseteq & V_1 \cap V_{p+1} + \cdots + V_p \cap V_{p+1}
\end{array}$$

Имаме $\dim(V_1 + V_2) \cap V_{p+1} = \dim(V_1 \cap V_{p+1} + V_2 \cap V_{p+1}) = 2$. Освен това

$$\dim(V_1 + \cdots + V_p) \cap V_{p+1} \leq \dim V_{p+1} = p.$$

Да предположим, че за някое $k$ имаме

$$V_1 \cap V_{p+1} + \cdots + V_k \cap V_{p+1} = V_1 \cap V_{p+1} + \cdots + V_k \cap V_{p+1} + V_{k+1} \cap V_{p+1}. \quad (4.6)$$

Ясно е, че $\dim V_i \cap V_j = 1$, $i \neq j$, и че арките в $V_i \cap V_j$ са скаларни кратни на $\boldsymbol{j} - \chi_{P_iP_j}$. Сега от (4.6) получаваме, че

$$\boldsymbol{j} - \chi_{P_{k+1}P_{p+1}} \in \langle \boldsymbol{j} - \chi_{P_1P_{p+1}}, \ldots, \boldsymbol{j} - \chi_{P_kP_{p+1}} \rangle.$$

Това е противоречие с Теорема 1.10 от [21], съгласно която векторите $\boldsymbol{j} - \chi_{P_iP_j}$, $1 \leq i < j \leq p+1$, са линейно независими. Следователно,

$$\dim(V_1 \cap V_{p+1} + \cdots + V_k \cap V_{p+1}) = k$$

за всички $k \in \{2, \ldots, p\}$. Тъй като $\dim(V_1 + \cdots + V_p) \cap V_{p+1} \leq p$ получаваме, че

$$(V_1 + \cdots + V_p) \cap V_{p+1} = V_1 \cap V_{p+1} + \cdots + V_p \cap V_{p+1},$$

което от своя страна дава, че $\dim(V_1 + \cdots + V_k) \cap V_{p+1} = k$ за всички $k$. Сега получаваме

$$(V_1 + \cdots + V_k) \cap V_{p+1} = V_1 \cap V_{p+1} + \cdots + V_k \cap V_{p+1}$$

за всяко $k \leq p$, и (4.5) е в сила и за всяко подмножество от индекси $\{i_1, \ldots, i_{k+1}\}$.

Сега вече можем да използваме формулата за размерностите

$$\dim(V_1 + \cdots + V_p) = \sum_i \dim V_i - \sum_{i,j} \dim V_i \cap V_j + \sum_{i,j,k} V_i \cap V_j \cap V_k - \ldots,$$

която в общия случай не е вярна. Тъй като $V_i \cap V_j \cap V_k = (0)$, получаваме

$$\dim V_1 + V_2 + \cdots + V_p = \sum_i \dim V_i - \sum_{i,j} \dim V_i \cap V_j = p \cdot p - \binom{p}{2} \cdot 1 = \binom{p+1}{2},$$

което съвпада с размерността на пространството на всички равнинни $(0 \mod p)$-арки. Следователно всяка $(0 \mod p)$-арка в $\mathrm{PG}(2,p)$ е сума на най-много $p$ арки, получени чрез лифтинг. □

**Следствие 4.16.** *Всяка $(t \mod p)$-арка в $\mathrm{PG}(2,p)$ може да се представи като сума на най-много $p$ арки, получени чрез лифтинг.*

*Забележка* 4.17. Изглежда правдоподобно, че Теорема 4.15 и Следствие 4.16 са в сила не само в равнинния случай, но и при геометрии от произволна размерност. Ако сме в състояние да докажем (4.5), то остава да се провери просто биномно тъждество. Проблемът се състои в това, че за размерности $r \geq 3$ не разполагаме с аналог на Теорема 1.10 от [21].

## 4.3 $(t \mod q)$-арки с ограничение за кратността на точките

### 4.3.1 Общи структурни резултати

Ще започнем с това, че $(t \mod q)$-арките, появяващи се във връзка със задачата за разширимост, имат допълнителното свойство, че кратностите на точките са ограничени отгоре от $t$. Оказва се, че ако една $(t \mod q)$-арка има допълнителното свойство, че ограничението ѝ върху всяка хиперравнина е получено чрез лифтинг, то и самата арка е получена чрез лифтинг.

**Теорема 4.18.** *Нека $\mathcal{K}$ е $(t \mod q)$-арка в $\mathrm{PG}(r,q)$ и нека ограничението ѝ върху всяка хиперравнина $H$, $\mathcal{K}|_H$, е получено чрез лифтинг от точка. Тогава и арката $\mathcal{K}$ е получена чрез лифтинг от точка.*

*Доказателство.* Нека $\mathcal{K}$ е $(t \mod q)$-арка в $\mathrm{PG}(r,q)$ и нека $S$ е произволно подпространство в $\mathrm{PG}(r,q)$ с коразмерност 2. Да означим с $H_i$, $i = 0,\ldots,q$, хиперравнините през $S$. По условие всички арки $\mathcal{K}|_{H_i}$ са $(t \mod q)$-арки, получени чрез лифтинг. Да означим с $P_i$, $i = 0,\ldots,q$, съответните точки на лифтинг на тези арки.

Да допуснем, че за някои индекси $i$ и $j$ е изпълнено $P_i \in S$ и $P_j \in H_j \setminus S$. Ясно е, че правата $P_iP_j$ се състои изцяло от $t$-точки. Нека $L$ е произволна права в $H_j$, инцидентна с $P_j$ и да означим $L \cap S = Q_j$. Всички точки от правата $P_jQ_j$, различни от $P_j$ имат една и съща кратност $a$, където $0 \le a \le t$. Така всички точки в равнината $\langle P_i, P_j, Q_j\rangle$ извън $P_iP_j$ са точки с кратност $a$. Оттук следва, че $\mathcal{K}|_{H_j}$ може да бъде разглеждана като арка, получена чрез лифтинг от правата $P_iP_j$, следователно и от всяка точка на $P_iP_j$.

Да допуснем, че $P_i \in H_i \setminus S$ за всички $i = 0,\ldots,q$. Ако точките $P_0,\ldots,P_q$ са колинеарни, то $\mathcal{K}$ е получена чрез лифтинг от правата $P_0P_1$.

Нека сега допуснем, че точките $P_i$ не са колинеарни. Тогава съществува хиперравнина $H$ в $\mathrm{PG}(r,q)$, която не съдържа никоя от точките $P_i$. Да означим $T = H \cap S$. Ако означим $G_i = H \cap H_i$, то всички арки $\mathcal{K}|_{G_i}$ са проективно еквивалентни на $\mathcal{K}_S$.

Най-напред ще разгледаме случая, когато точката на лифтинг $Q$ за $\mathcal{K}|_H$ се съдържа в $G_i \setminus T$. Ясно е, че $Q_i = S \cap QP_i$, като и че $P_iQ_i$ е права, състояща се от $t$-точки. Да разгледаме произволна права $L$ в $H_i$ през $P_i$.

Ако точките върху $L$, различни от $P_i$, са $a$-точки, то всички точки върху правата през $Q$ и $L \cap G_i$, различни от $Q$, са също $a$-точки. Следователно всички точки в равнината $\langle L, Q_i \rangle$ извън $P_iQ_i$ са $a$-точки и $\mathcal{K}|_{H_i}$ е получена чрез лифтинг с права на лифтинг $P_iQ_i$. Следователно всяка точка от $P_iQ_i$ е точка на лифтинг, т.е. $Q_i$ също е точка на лифтинг.

Дотук доказахме, че без ограничение на общността може да се приеме, че всички точки $P_i$ се съдържат в $S$. Да разгледаме подпространството $T$ на $S$, породено от точките $P_i$, $T = \langle P_i \mid i = 0, \ldots, q\}$. Всички точки в $T$ са с максимална кратност. Нека $Q \in S \setminus T$ е точка с кратност $a$. Всички точки от $\langle T, Q \rangle \setminus T$ също имат кратност $a$. Следователно ограничението $\mathcal{K}|_S$ е получено чрез лифтинг с подпространство на лифтинг $T$. Тъй като $S$ е избрано произволно, то ограничението на $\mathcal{K}$ върху всяко подпространство с коразмерност 2 е арка, получена чрез лифтинг.

Можем да използваме същия аргумент и за подпространства с по-малка размерност. За пространства с размерност 2 това означава, че всички равнини съдържат права от $t$-точки като всички останали точки са с кратност $a$. Лесно се проверява, че във всички случаи съществува хиперравнина от $t$-точки и всички останали точки извън тази хиперравнина са с кратност $a$. Но за такава арка е ясно, че е получена чрез лифтинг. □

Нетривиални равнинни $(t \mod q)$-арки могат да бъдат конструирани като $\sigma$-дуални на блокиращи множества с ограничена кратност за точките.

**Теорема 4.19.** *Необходимо и достатъчно условие за съществуването на $(t \mod q)$-арка в $\mathrm{PG}(2,q)$ с мощност $mq+t$ и максимална кратност на точка $t$ е съществуването на блокиращо множество в същата равнина с параметри $((m-t)q+m, m-t)$ и с кратности на правите, принадлежащи на множеството $\{m-t, m-t+1, \ldots, m\}$.*

*Доказателство.* Нека $\mathcal{F}$ е $(t \mod q)$-арка в $\mathrm{PG}(2,q)$ с мощност $mq+t$. Да разгледаме арката $\mathcal{F}^\sigma$, където $\sigma(x) = (x-t)/q$, е $((m-t)q+m, m-t)$-блокиращо множество в дуалната равнина. Не е трудно да се пресметне, че кратностите на правите по отношение на блокиращото множество принадлежат на множеството $\{m-t, m-t+1, \ldots, m\}$. Наистина, да означим спектъра на $\mathcal{F}$ с $(a_i)_{i\geq 0}$. Стандартно броене дава

$$\begin{aligned}\sum_i a_{t+iq} &= q^2+q+1\\ \sum_i (t+iq)a_{t+iq} &= (mq+t)(q+1).\end{aligned}$$

Оттук следва, че

$$|\mathcal{F}^\sigma| = \sum_i i a_{t+iq} = (m-t)q+m.$$

По нататък да означим с $b_i$ броя на $i$-правите през фиксирана $c$-точка $P$ (по отношение на $\mathcal{F}$), $0\leq c\leq t$. Отново имаме

$$\begin{aligned}\sum_i b_{t+iq} &= q+1\\ \sum_i (t+iq)b_{t+iq} &= mq+t+cq,\end{aligned}$$

откъдето $\sum_i ib_{t+iq} = m-t+c$. Следователно $\mathcal{F}^\sigma$ е блокиращо множество с параметри $((m-t)q+m, m-t)$ и кратностите на правите са между $m-t$ (за $c=0$) и $m$ (за $c=t$).

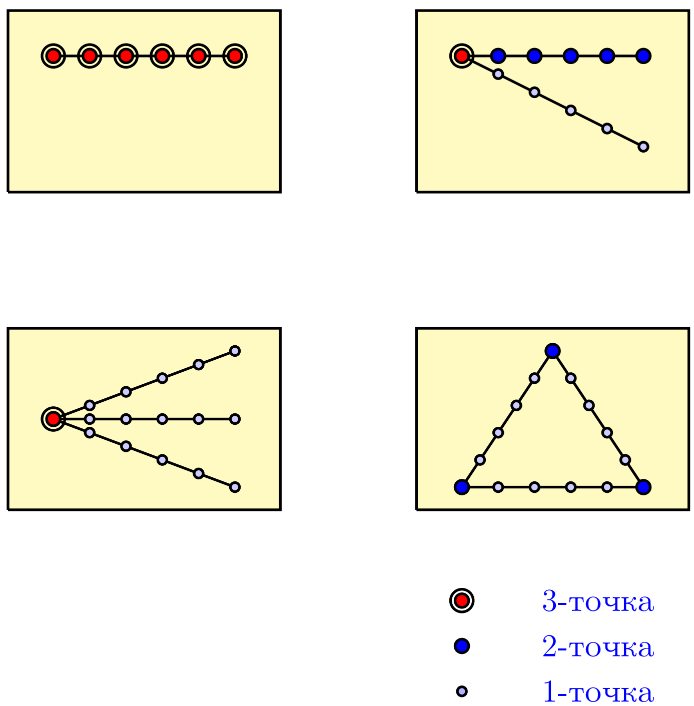
Обратната посока се доказва аналогично. Тръгвайки от блокиращо множество, имащо дадените параметри и кратности на прави, дефинираме арка в дуалната равнина, за която $(m-t+j)$-правите са точки с кратност $j$, $j=0,\dots,t$. Лесно се проверява, че получената арка е $(t \mod q)$-арка с желаните параметри. □

### 4.3.2 Характеризация на $(3 \mod 5)$-арки

За стойности на $t$, които са по-големи от 2, пълна класификация на $(t \mod q)$-арките с кратност на точките, ненадхвърляща $t$ изглежда невъзможна. Въпреки това в някои случаи можем да получим частични резултати за структурата на такива арки. В този раздел ще направим класификация на някои малки $(3 \mod 5)$-арки в $\mathrm{PG}(2,5)$, която ще използваме по-късно в доказателството за несъществуване на $(104,22)$-арки в $\mathrm{PG}(3,5)$ (и, еквивалентно, на $[104,4,82]_5$-кодове). Съгласно Теорема 4.19, класификацията на такива арки е еквивалентна на класификацията на специални блокиращи множества с допълнително ограничение за кратността на правите.

**Арки с мощност 18 в** $\mathrm{PG}(2,5)$

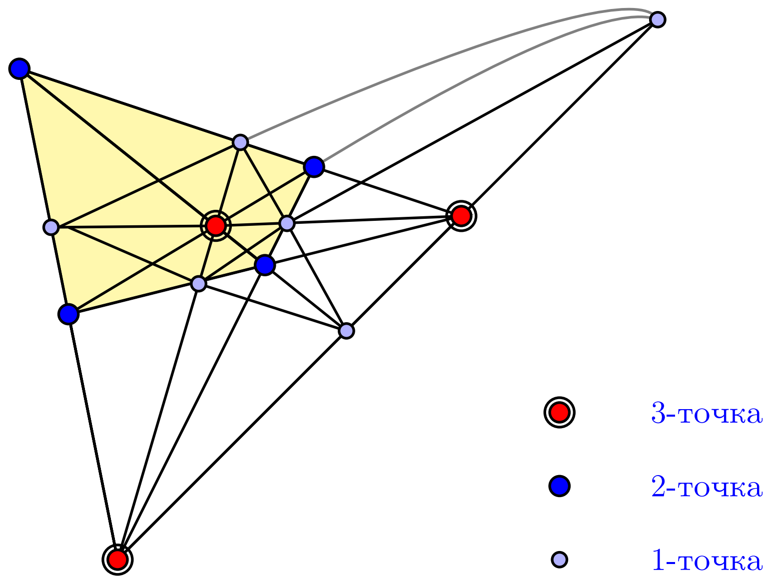
Арки с тази мощност се получават от $(3,0)$-блокиращи множества с прави, имащи кратност 0, 1, 2, или 3. Тези блокиращи множества са тривиални и се състоят от три (не непременно различни) точки. Съответните ($3 \mod 5$)-арки са сума на три прави в различни взаимни положения. Лесно се проверява, че съществуват четири ($3 \mod 5$)-арки с мощност 18. Те са представени на фигурата по-долу.




**Арки с мощност 23 в** $\mathrm{PG}(2,5)$

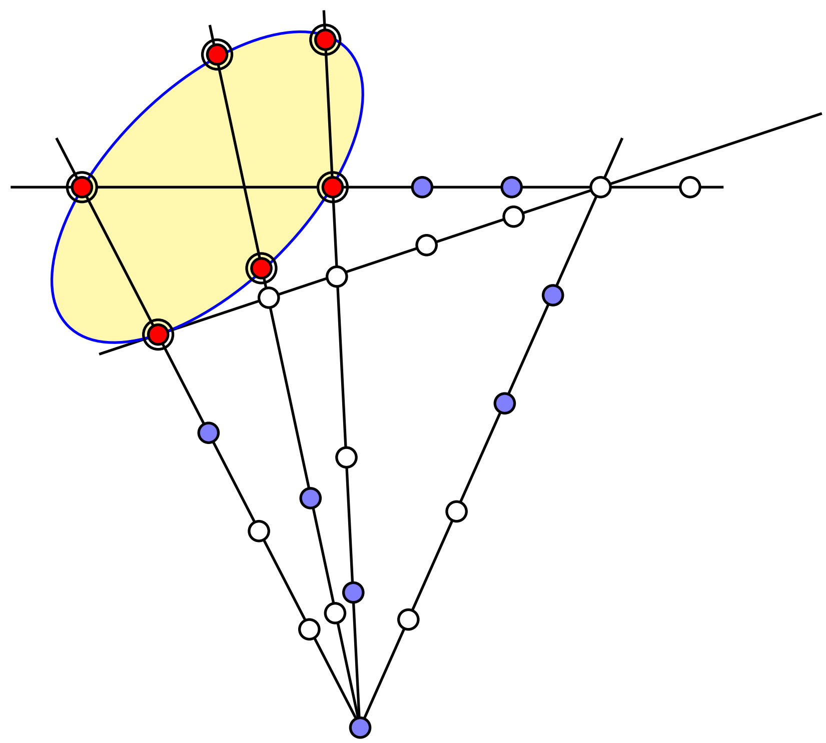
Такива арки се получават като $\sigma$-дуални на $(9,1)$-блокиращи множества, за които правите в $\mathrm{PG}(2,5)$ имат кратност 1, 2, 3, или 4. Следователно блокиращи множества, съдъжащи точките на права не водят до ($3 \mod 5$)-арки. Така единственото блокиращо множество, което отговаря на условията е проективният триъгълник [106]. Дуализирайки, получаваме ($3 \mod 5$)-арка, за която 2-точките са върховете на пълен четириъгълник, диагоналните му точки са 3-точки, а пресечните точки на диагоналните му прави със страните на четириъгълника са 1-точки.

Получената арка е представена на фигурата по-долу. Да отбележим, че 8-правите на тази арка са от тип $(3,3,1,1,0,0)$ или $(3,2,2,1,0,0)$.




**Арки с мощност 28 в** $\mathrm{PG}(2,5)$

Тези арки се получават от (15,2)-блокиращи множества, за които правите в равнината са с кратности 2, 3, 4, или 5. Ако такова блокиращо множество е проективно (т.е. точките са с кратност 0 или 1), то то се получава като допълнение на (16,4)-арка. При това, такава арка не трябва да има външни прави, тъй като максималната мощност на права по отношение на блокиращото множество е 5 (Теорема 4.19). Класификацията на (16,4)-арките е добре известна: съществуват шест проективно нееквивалентни арки с тези параметри като само една от тях няма външни прави. Тя се получава чрез изтриване на пресечните точки на шест прави в общо положение от точките на проективната равнина $\mathrm{PG}(2,5)$.



Сега ще докажем, че всяко (15,2)-блокиращо множество, което има поне една точка с кратност по-голяма от 1, има и права с кратност поне 6 и, следователно не води до $(3 \mod 5)$-арка.

Най-напред ще отбележим, че такова блокиращо множество не може да има точки с кратност 3. В този случай останалите 12 точки образуват $(12,2)$-блокиращо множество, което е сума на две прави и две точки и следователно има права с кратност по-голяма от 5.

Да означим с $\Lambda_i$, $i = 0,1,2$, броя на $i$-точките на $(15,2)$-блокиращо множество. Ясно е, че никои три 2-точки не са колинеарни, тъй като това води до съществуване на 6-права. В случаите $\Lambda_2 = 5,6$ не е трудно да се провери, че останалите 1-точки не могат да блокират двукратно външните прави към арката, образувана от 2-точките.

Ще скицираме доказателството за несъществуване на $(15,2)$-блокиращо множество с прави с кратност 2, 3, 4, и 5 и $\Lambda_2 = 4$, $\Lambda_1 = 7$. Нека 2-точките са $A, B, C, D$. Нека $\{X_1, X_2\}$ е двойка от точки, които допълват горната четворка до овал $\mathcal{O}$. Допирателните към този овал в $X_1$ и $X_2$

трябва да бъдат блокирани по два пъти, откъдето следва, че блокиращото множество съдържа поне три точки измежду $X_1$, $X_2$ и външните точки към $\mathcal{O}$. Следователно десетте външни прави трябва да бъдат блокирани поне по два пъти от горните (поне) три точки и най-много четири вътрешни точки. Така получаваме неравенството $3 \cdot 2 + 4 \cdot 3 \geq 10 \cdot 2$, което е противоречие.

Останалите случаи $1 \leq \Lambda_2 \leq 3$ се отхвърлят по подобен начин, но с използването на допълнителни аргументи.

Следователно съществува единствена равнинна $(3 \mod 5)$-арка с мощност 28. Такава арка има шест 3-точки, които образуват овал и десет 1-точки, които са вътрешните точки към овала.

**Арки с мощност 33 в** $\mathrm{PG}(2,5)$

Нека $\mathcal{F}$ е $(3 \mod 5)$арка с мощност 33. Тогава $\mathcal{F}^\sigma$ е $(21,3)$-блокиращо множество с допустими кратности на правите $3, 4, 5$, или 6. Както погоре, такова блокиращо множество не може да има 3-точки, тъй като бихме получили прави с кратност по-голяма от 6.

Да означим отново с $\Lambda_i$ броя на точките с кратност $i$. Ясно е, че никои пет 0-точки не са колинеарни, откъдето $\Lambda_0 \leq 16$. Оттук следва, че $\Lambda_2 \leq 6$. Първо отхвърляме случая $\Lambda_2 = 6$. Да допуснем, че някои три 2-точки са колинеарни. Тогава има две тройки от колинеарни 2-точки и общата точка на правите, определени от тях е 2-точка; в противен случай получаваме противоречие с лесно броене. Тъй като 0-точка от 6-права лежи на пет 3-прави, то получаваме, че шестата 2-точка е инцидентна с поне три 3-прави. Да преброим кратностите на правите през тази специална 2-точка. Получаваме $21 \leq 3 \cdot 3 + 3 \cdot 6 - 5 \cdot 2 = 17$, противоречие. Оттук следва, че 2-точките образуват овал. Всяка от десетте външни прави към овала трябва да бъде блокирана поне три пъти от 1-точки. Всяка 1-точка блокира три външни прави. Следователно за трикратно блокиране на външните прави са необходими поне $3 \cdot 10/3$ точки с кратност 1, което е противоречие, тъй като $\Lambda_1 = 9$.

Случаите $3 \leq \Lambda_2 \leq 5$ се отхвърлят по подобен начин. В останалите три случая $\Lambda_2 = 0, 1, 2$ конструкции са възможни. В тези случаи $\mathcal{F}^\sigma$ е точно едно от следните блокиращи множества:

(1) допълнение на $(10,3)$-арка в $\mathrm{PG}(2,5)$, $\Lambda_2 = 0$; съществуват седем неизоморфни $(10,3)$-арки [121];

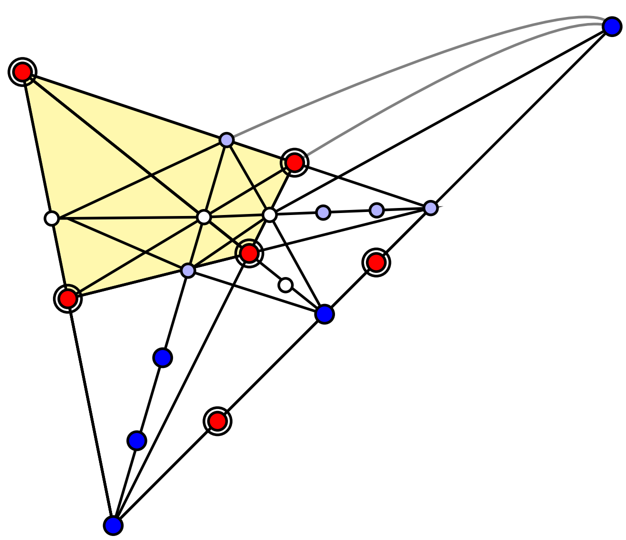
(2) допълнението на $(11, 3)$-арката с четири външни прави[1] и една двойна точка, която не е върху външна права, $\Lambda_2 = 1$;

(3) Една двойна точка, образуваща овал с пет от 0-точките; допирателната в 2-точката е 3-права, $\Lambda_2 = 1$;

(4) Дванадесетте 0-точки лежат на страните на триъгълник с върхове с кратност $2, 2, 1$; останалите точки са 1-точки; $\Lambda_2 = 2$.

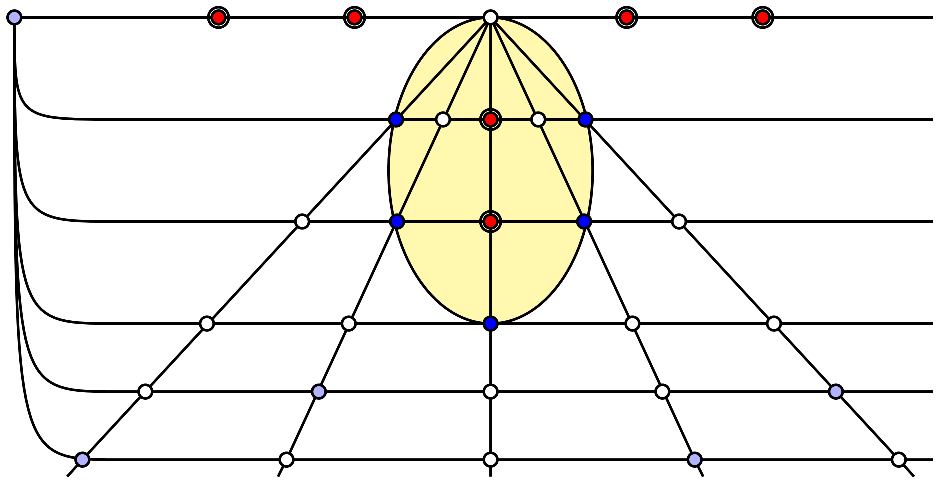
Ясно е, че арките, които се получават от блокиращите множества (1) нямат 13-права. Илюстрация на арките, които се получават от блокиращите множества (2), (3) и (4) е представена по-долу.

(2) $(3 \mod 5)$-арка с мощност 33, имаща една 13-права

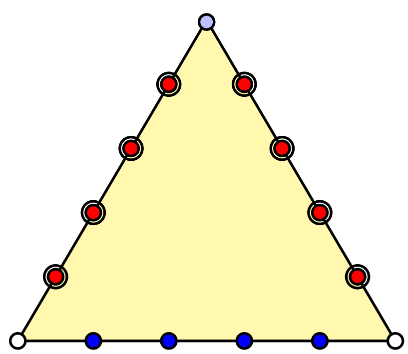


[1] Добре известно е, че съществуват две $(11, 3)$-арки в $\mathrm{PG}(2, 5)$: една с четири и една с пет външни прави [106]

(3) втората ($3 \mod 5$)-арка с мощност 33 с една 13-права



(4) $(33, \{3, 8, 13\})$-арка с две 13-прави



**Арки с мощност 38 в** PG$(2, 5)$

Както по-горе можем да характеризираме и ($3 \mod 5$)-арките с мощност 38. Класификацията им се получава от класификацията на $(27, 4)$-блокиращите множества в PG$(2, 5)$ с кратности на правите $4, 5, 6$ или $7$.

Такова блокиращо множество $\mathcal{K}$ няма 3-точки. Ако допуснем, че съществува 3-точка $P$, то $\mathcal{K} - 3\chi_P$ е $(24, 4)$-блокиращо множство, което е сума на 4 прави [134] и следователно има права с кратност по-голяма от 7.

Нека $\mathcal{K}$ е $(27, 4)$-блокиращо множество, което има три колинеарни 2-точки: $P_1, P_2, P_3$. Да допуснем, че съществува четвърта 2-точка $Q$. Тогава през $Q$ минават или две 4-прави (ако $P_1P_2$ е 7-права) или три 5-прави (ако $P_1P_2$ е 6-права). И в двата случая получаваме противоречие, преброявайки кратностите на точките инцидентни с правите през $Q$. Оттук получаваме, че ако $\mathcal{K}$ има три колинеарни точки, то $\Lambda_2 = 3$. Следователно, $0 \leq \lambda_2 \leq 6$. Освен това, ако има три колинеарни точки, то правата инцидентна с тях е 7-права.

Ако допуснем, че $\Lambda_2 = 6$, то 2-точките образуват овал. Останалите петнадест 1-точки трябва да блокират по два пъти всички допирателни и по четири пъти всички външни прави. Да означим с $x$ броя на външните 1-точки, а с $y$ – броя на вътрешните 1-точки. Имаме, че

$$\left|\begin{array}{l} x + y = 15 \\ 2y \geq 12 \\ 3x + 2y \geq 40 \end{array}\right. .$$

Първото неравенство получаваме от покриването на тангентите, а второто – от покриването на външните прави. Сега лесно получаваме $x \geq 10$, $y \geq 6$, противоречие с $\Lambda_1 = 15$.

В случаите $\Lambda_2 = 0, 1, 2$ блокиращите множества с параметри $(27, 4)$ се строят по естествен начин. Лесно се проверява, че дуалните $(3 \mod 5)$-арки с мощност 38 имат 8-права, която е от тип $(2, 2, 2, 2, 0, 0)$, $(2, 2, 2, 1, 1, 0)$ или $(3, 3, 2, 0, 0, 0)$. Ще отбележим, че 8-прави от този тип не се появяват в $(3 \mod 5)$-арки с кратност 18, 23 или 28. Оказва се, че за всички стойности на $\Lambda_2$, получените $(3 \mod 5)$-арки с мощност 38 имат 8-права от един от горните три типа.

**Лема 4.20.** *Във всяка* $(3 \mod 5)$*-арка в* $\mathrm{PG}(2, 5)$ *с мощност 38 съществува 8-права от тип* $(3, 3, 2, 0, 0, 0)$, $(2, 2, 2, 2, 0, 0)$ *или* $(2, 2, 2, 1, 1, 0)$.

*Доказателство.* Ще докажем твърдението за $(3 \mod 5)$-арки, получени от блокиращи множества с $\Lambda_2 = 5$. В този случай 2-точките $P_i$, $i = 1, \ldots, 5$, заедно с една допълнителна шеста точка, да кажем $P_0$, образуват овал $\mathcal{O}$.

1) Нека $P_0$ е 1-точка. Както по-горе, да означим с $x$ броя на 1-точките, които са вътрешни, а с $y$ – броя на 1-точките, които са външни. Сега имаме

$$\left|\begin{array}{l} x+y=16 \\ 2y \geq 13 \\ 3x+2y \geq 40 \end{array}\right. .$$

И в двата случая съществува 1-точка, която е вътрешна за овала и която лежи на три външни прави, блокирани точно четири пъти. Това следва от наблюдението, че най-много една външна права е блокирана повече от четири пъти. След дуализиране тази 1-точка става 8-права от тип $(3,3,2,0,0,0)$.

2) Ако $P_0$ е 0-точка, както по-горе получаваме

$$\left|\begin{array}{l} x+y=17 \\ 2y \geq 14 \\ 3x+2y \geq 40 \end{array}\right. .$$

Сега имаме следните пет решения:

| $x$ | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|
| $y$ | 11 | 10 | 9 | 8 | 7 |

В пъвите четири случая съществува 1-точка, вътрешна за $\mathcal{O}$, която лежи на три външни прави, покрити по четири пъти. Както и по-горе, в дуалната $(3 \mod 5)$-арка има 8-права, която е от тип $(3,3,2,0,0,0)$.

При последното решение ще отбележим, че всяка тангента е блокирана точно четири пъти. Да разгледаме външна права $L$, която също е блокирана четири пъти (такава съществува, защото $3x+2y<50$). Тъй като всяка външна права е инцидентна с три вътрешни и три външни точки, то върху нея съществува външна точка $Q$, която е 1-точка. Сега $Q$ е инцидентна с три 4-прави – това са $L$ и двете тангенти през $Q$. Следователно след дуализацията тази 1-точка става 8-права от тип $(3,3,2,0,0,0)$. □

Сега ще докажем основния резултат в този раздел, който ще използваме по-нататък при доказателството за несъществуване на $(104,22)$-арки в $\mathrm{PG}(3,5)$.

**Теорема 4.21.** *Всяка* $(3 \mod 5)$*-арка* $\mathcal{F}$ *в* $\mathrm{PG}(3,5)$ *с мощност* $|\mathcal{F}| \leq 158$ *е получена чрез лифтинг от 3-точка. По-специално,* $|\mathcal{F}| = 93, 118,$ *или* $143$.

*Доказателство.* Нека $\mathcal{F}$ е $(3 \mod 5)$-арка в $\mathrm{PG}(3,5)$ с мощност $|\mathcal{F}| \le 158$ и да допуснем, че $\mathcal{F}$ има 13-права $L$ с 0-точка. Ясно е, че през $L$ минава равнина с кратност 33. В противен случай $|\mathcal{F}| \ge 163$.

Да разгледаме проекция $\varphi$ от 0-точката $P$ от $L$ и да разгледаме арката

$$\mathcal{G} = \frac{1}{5}(\mathcal{F}^{\varphi} - 3).$$

Ясно е, че 0-точките по отношение на $\mathcal{G}$ са образи на 3-прави през $P$ (по отношение на $\mathcal{F}$), 1-точките са образи на 8-прави и 2-точките са образи на 13-прави. Освен това $|\mathcal{G}| \le 13$. По нататък в доказателството ще считаме, че $|\mathcal{F}| = 158$ и $|\mathcal{G}| = 13$, което е и най-труднят случай.

Да означим с $\lambda_i$, $i = 0, 1, 2$, броя на $i$-точките в $\mathcal{G}$. Имаме

$$\left| \begin{array}{rcl} \lambda_0 + \lambda_1 + \lambda_2 & = & 31 \\ \lambda_1 + 2\lambda_2 & = & 13 \end{array} \right. ,$$

откъдето поулчаваме следните решения:

| $\lambda_0$ | $\lambda_1$ | $\lambda_2$ |
|---|---|---|
| 18 | 13 | 0 |
| 19 | 11 | 1 |
| 20 | 9 | 2 |
| 21 | 7 | 3 |
| 22 | 5 | 4 |
| 23 | 3 | 5 |
| 24 | 1 | 6 |

За структурата на $\mathcal{G}$ имаме следните наблюдения.

Арката $\mathcal{G}$ няма 4-прави. Ако $\mathcal{G}$ има 4-права, то по отношение на $\mathcal{F}$ такава права е образ на 38-равнина $\pi_0$. Съгласно Лема 4.20 в $\pi_0$ има 8-права $M$ от тип, който не се среща в равнини с 18, 23 или 28 точки. Ако $\pi_1, \ldots, \pi_5$ са равнините през $M$, получаваме

$$158 \ge |\mathcal{F}| = \sum_{i=0}^{5} \mathcal{F}(\pi_i) - 5\mathcal{F}(M) \ge 38 + 5 \cdot 33 - 5 \cdot 8 = 163,$$

противоречие. Ясно е, че $\mathcal{G}$ няма 2-права, която съдържа 2-точка, тъй като 28-равнина няма 13-права.

В случая $\lambda_2 = 6$ последното наблюдение показва, че 2-точките образуват овал. Сега шестте тангенти към овала трябва да бъдат блокирани от единствената 1-точка. Това е невъзможно, тъй като през точка вън от овала, минават нула или две тангенти.

Случаят $\lambda_2 = 5$ се отхвърля по подобен начин. Точките с кратност 2 заедно с една допълнителна точка $Q$ отново образуват овал. Ако $Q$ е 0-точка, то всяка от секантите през $Q$ трябва да съдържа и 1-точка, което е невъзможно, поради $\lambda_1 = 3$. Ако $Q$ е 1-точка, то петте допирателни към 2-точките не могат да бъдат блокирани с оставащите две 1-точки.

С подобни аргументи се отхвърлят и случаите $\lambda_2 = 1, 2, 3, 4$.

От доказаното дотук следва, че през всяка 0-точка на $\mathcal{F}$ минават само 3- и 8-прави. Оттук следва, че арката $\mathcal{G}$ е проективна и всяка права е с кратност най-много 6. Прави с 6-точки са образи на 48-равнини, в които 8-правите са от тип $(3, 3, 1, 1, 0, 0)$ или $(3, 2, 2, 1, 0, 0)$. Точките с кратност 0 в такава равнина образуват овал, което е невъзможно, тъй като броят им е 7. Следователно $\mathcal{G}$ няма 6-прави.

Права $M$ с кратност 5 по отношение на $\mathcal{G}$ е образ на 43-равнина (по отношение на $\mathcal{F}$). Правите с кратност 8 са отново $(3, 3, 1, 1, 0, 0)$ или $(3, 2, 2, 1, 0, 0)$. Такава равнина се получава единствено чрез лифтинг от 3-точка на права от тип $(3, 3, 1, 1, 0, 0)$ или $(3, 2, 2, 1, 0, 0)$.

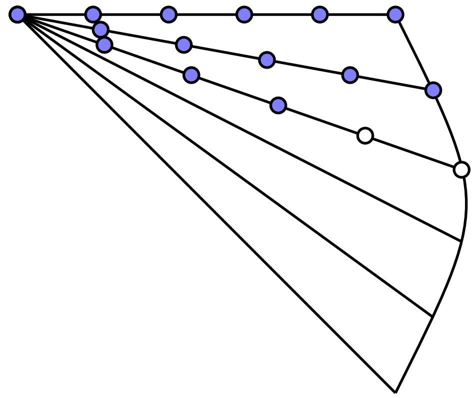
Ако $(a_i)_{i\geq 0}$ е спектърът на $\mathcal{G}$, то

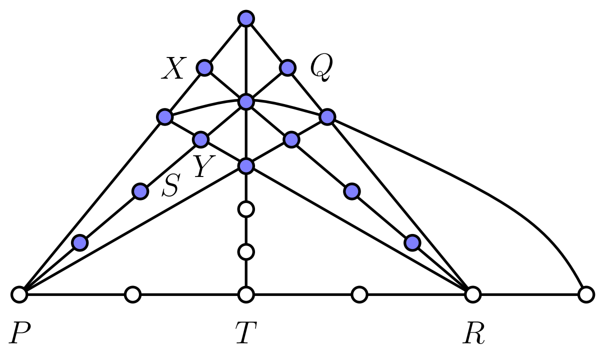
$$\sum a_i = 31, \ \sum i a_i = 78, \ \sum i(i-1)a_i = 156.$$

Оттук получаваме $a_1 + a_2 = 5a_5$. Тъй като максималната мощност на $(n, 3)$-арка в $\mathrm{PG}(2, 5)$ е 11, то имаме $a_5 \geq 1$. От друга страна лесно се получава, че $a_5 \leq 3$. Ако допуснем, че $a_5 \geq 4$, то броят на точките на $\mathcal{G}$ е поне $4 \cdot 5 - \binom{4}{2} = 14 > |\mathcal{G}|$. Следователно $1 \leq a_5 \leq 3$

Случаят $a_5 = 1$ е невъзможен. Точките извън 5-правата $L$ образуват $(8, 3)$-арка. Такава арка има поне четири 3-прави (вж.[121]). Поне една от тези прави пресича $L$ в 1-точка, с което получаваме 4-права в $\mathcal{G}$, противоречие.

За останалите два случая, $a_5 = 2$ и $a_5 = 3$, можем да конструираме възможните арки $\mathcal{G}$, като използваме условието $a_4 = 0$. В случая $a_5 = 2$ съществуват две такива арки (с точност до еквивалентност).



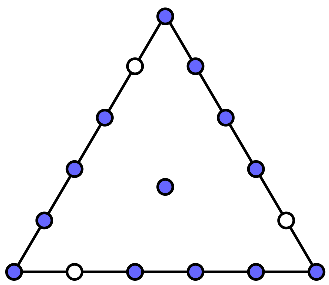



Да разгледаме случая (2). Двете прави с кратност 5 са образи на 43-равнини, за които по-горе отбелязахме, че са получени с лифинг от 3-точка. Следователно 1-точките върху 5-правите са образи на 8-прави (по отношение на $\mathcal{F}$) от един и същи тип. От факта, че 28-равнини (спрямо $\mathcal{F}$), чийто образ е 2-права (спрямо $\mathcal{G}$), нямат 2-точки следва, че този тип е $(3,3,1,1,0,0)$. Освен това всички точки върху правата $PR$ са образи на прави от тип $(3,0,0,0,0,0)$. Правата $SR$ е 1-права (образ на 23-равнина). При това $S$ и $R$ са образи на прави, които съдържат и трите 3-точки на тази равнина. Следователно останалите четири 0-точки от $SR$ са образи на 3-прави от тип $(2,1,0,0,0,0)$. Тъй като правата $XY$ пресича $SR$ в такава точка, то $XY$ е образ на 28-равнина, съдържаща 2-точка, противоречие, тъй като ($3 \mod 5$)-арки с кратност 28 имат само 1- и 3-точки.

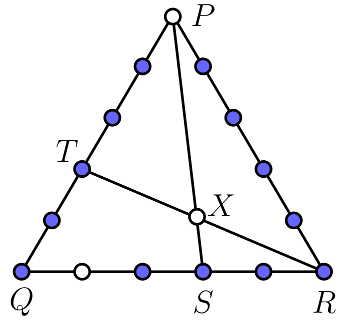
Случаят (1) се отхвърля по подобен начин.

За $a_5 = 3$ получаваме четири възможности за арката $\mathcal{G}$, които са представени по-долу.

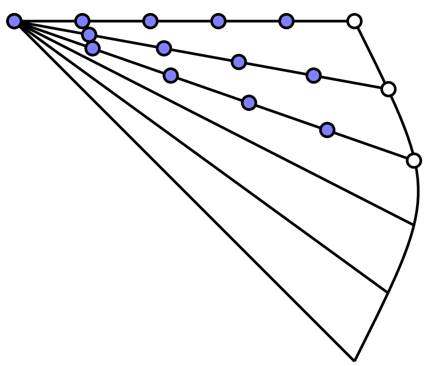
(3)



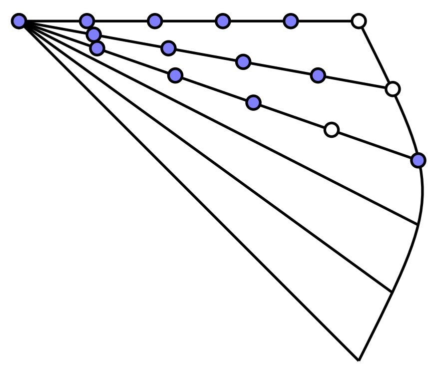
(4)




(5)



(6)



Да разгледаме случая (4). Отново всички 1-точки, съдържащи се в 5-прави (спрямо $\mathcal{G}$) са образи на 8-прави спрямо $\mathcal{F}$ от тип $(3,3,1,1,0,0)$. Ясно е, че това са всички 1-точки. Както и преди, 0-точките, лежащи върху страни на триъгълника са образи на 3-прави от тип $(3,0,0,0,0,0)$.

Върху правата $PS$, която е образ на 23-равнина спрямо $\mathcal{F}$ съществува 0-точка $X$, която е образ на 3-права от тип $(2,1,0,0,0,0)$. Това следва от структурата на $(3 \mod 5)$-арката с мощност 23, която установихме по-горе. Но оттук получаваме, че правата $RX$ е образ на 28-равнина с 2-точки, противоречие.

Останалите случаи (3), (5) и (6) се отхвърлят по подобен начин. $\square$

## 4.4 Разширимост на квазиделими арки и кодове

### 4.4.1 Разширимост на грийсмърови арки

В този раздел ще докажем нашия основен резултат за разширимост на арки на Griesmer. Нека $\mathcal{K}$ е грийсмърова $(n, w)$-арка в $\mathrm{PG}(k-1, q)$, която е $t$-квазиделима за някое $t < q$. Нека $C_{\mathcal{K}}$ е линейният код, асоцииран с арката $\mathcal{K}$. Тогава $C_{\mathcal{K}}$ има параметри $[n, k, d]_q$, където $d = n - w$. Да запишем $d$ във вида:

$$d = sq^{k-1} - \sum_{i=0}^{k-2} \varepsilon_i q^i, \tag{4.7}$$

където $0 \leq \varepsilon_i < q$ за всички $i = 0, \ldots, k-2$. Оттук имаме

$$\lceil d/q^j \rceil = sq^{k-j-1} - \sum_{i=j}^{k-2} \varepsilon_i q^{i-j}.$$

Сумираме тези равенства за $j = 0, 1, \ldots, k-1$ и получаваме

$$n = sv_k - \sum_{i=0}^{k-2} \varepsilon_i v_{i+1} \tag{4.8}$$

като в този израз използваме стандартното означение $v_j = q^{j-1} + \ldots + 1$ за броя на точките в $(j-1)$-мерно подпространсво. Да отбележим, че при тези означения имаме $t = \varepsilon_0$ тъй като е изпълнено $n + \varepsilon_0 \equiv w \pmod{q}$. Да припомним, че с $w_j = w_j(\mathcal{K})$ означаваме максималната кратност на подпространство $S$ с размерност $j$ в $\mathrm{PG}(k-1, q)$, т.е $w_j = \max_{\dim S = j} \mathcal{K}(S)$, за $j = 1, \ldots, k-1$. От Лема 3.7 имаме

$$w_j = \sum_{i=k-1-j}^{k-1} \left\lceil \frac{d}{q^i} \right\rceil = sv_{j+1} - \sum_{i=0}^{j-1} \varepsilon_{k-2-i} v_{j-i}. \tag{4.9}$$

като по дефиниция $w_{k-1} = n$.

В следващите няколко леми установяваме важни свойства на арката, дефинирана в (4.1). Първата от тях дава връзка между кратността на хиперправите (подпространства с коразмерност 2), съдържащи се в дадена хиперравнина и съответната им кратност по отношение на дуалната арка $\widetilde{\mathcal{K}}$.

**Лема 4.22.** *Нека $\mathcal{K}$ е грийсмърова арка в $\Sigma = \mathrm{PG}(k-1, q)$ с параметри $(n, n-d)$, която има свойството $t$-квазиделимост. Нека $d$ е представено във вида (4.7) и нека $S$ е подпространство с коразмерност 2, съдържащо се в хиперравнина $H_0$ с кратност $\mathcal{K}(H_0) = w_{k-2} - aq$ за някое цяло число $a \geq 0$.*

*(i) Ако $\mathcal{K}(S) = w_{k-3} - a - b$, $0 \leq b \leq t-2$, то $\widetilde{\mathcal{K}}(\widetilde{S}) \leq t + bq$;*

*(ii) Ако $\mathcal{K}(S) = w_{k-3} - a - b$, $b \geq t-1$, то $\widetilde{\mathcal{K}}(\widetilde{S}) \leq t + (t-1)q$.*

*Доказателство.* (i) Нека $\mathcal{K}$, $H_0$ и $S$ удовлетворяват условието на лемата. Означаваме с $H_i$, $i = 1, \ldots, q$, останалите $q$ хиперравнини в $\Sigma$, съдържащи подпространството $S$. Нека кратността на всяка от тях е $\mathcal{K}(H_i) = w_{k-2} - \alpha_i$, $i = 1, \ldots, q$. Да отбележим, че

$$\widetilde{\mathcal{K}}(H_i) \equiv n + t - w_{k-2} + \alpha_i \equiv \alpha_i \pmod{q},$$

тъй като $n + t \equiv w_{k-2} \pmod{q}$. Оттук получаваме $\widetilde{\mathcal{K}}(\widetilde{H}_i) \leq \alpha_i$. По-нататък имаме

$$\begin{aligned} n &= \sum_{i=0}^{q} \mathcal{K}(H_i) - q\mathcal{K}(S) \\ &= (q+1)w_{k-2} - \sum_{i=1}^{q} \alpha_i - aq - q(w_{k-3} - a - b) \\ &= n + t - \sum_{i=1}^{q} \alpha_i + bq. \end{aligned}$$

Оттук следва, че $\sum \alpha_i = t + bq$. От друга страна

$$\begin{aligned} \widetilde{\mathcal{K}}(\widetilde{S}) &= \sum_{i=0}^{q} \widetilde{\mathcal{K}}(\widetilde{H}_i) \\ &\leq \sum_{i=1}^{q} \alpha_i \pmod{q} \\ &= t + bq. \end{aligned}$$

(ii) За всяка права $\widetilde{S}$ в дуалното пространство е изпълнено $\widetilde{\mathcal{K}}(\widetilde{S}) \equiv t \pmod{q}$. Тъй като всяка точка е с кратност най-много $t$, то максималната кратност на права в дуалното пространство по отношение на дуалната арка е $\widetilde{\mathcal{K}}(\widetilde{S}) \leq tq+t$. От друга страна $S \subset H_0$, което означава, че дуалната права $\widetilde{S}$ е инцидентна с дуалната точка $\widetilde{H}_0$, която е 0-точка по отношение на $\widetilde{\mathcal{K}}$. Оттук следва, че $\widetilde{\mathcal{K}}(\widetilde{S}) < t + tq$, което води до неравенството $\widetilde{\mathcal{K}}(\widetilde{S}) \leq t + (t-1)q$. □

Следващата лема дава оценка за кратността на равнините в дуалното пространство, съответстващи на максимални (по отношение на $\mathcal{K}$) подпространства в $\Sigma$ с коразмерност 3.

**Лема 4.23.** *Нека $\mathcal{K}$ е грийсмърова $(n, n-d)$-арка в $\mathrm{PG}(k-1, q)$, притежаваща свойството $t$-квазиделимост. Нека $d$ е представено във вида (4.7) и нека $\widetilde{\mathcal{K}}$ е дуална на $\mathcal{K}$, получена по начина, описан в (4.1). Нека $T$ е подпространство на $\mathrm{PG}(k-1, q)$ с коразмерност 3 и максимална кратност $\mathcal{K}(T) = w_{k-4}$. Тогава*

$$\widetilde{\mathcal{K}}(\widetilde{T}) \leq t(q+1) + \varepsilon_1 q.$$

*Доказателство.* Нека $\mathcal{K}$ и $T$ удовлетворяват условието на лемата. Да означим с $S_i$, $i = 0, \ldots, q$, подпространствата с коразмерност 2 през $T$, съдържащи се в някоя максимална хиперравнина $H$. Такава хиперравнина винаги съществува. Ако допуснем противното, то получаваме противоречие чрез преброяване на кратностите на точките в хиперравнините през $T$. Да положим $\mathcal{K}(S_i) = w_{k-3} - \alpha_i$. Сега имаме

$$\begin{aligned}
\mathcal{K}(H) = w_{k-2} &= \sum_{i=0}^{q} \mathcal{K}(S_i) - q\mathcal{K}(T) \\
&= (q+1)w_{k-3} - \sum_{i=0}^{q} \alpha_i - qw_{k-4} \\
&= (q+1)(sv_{k-2} - \varepsilon_{k-2}v_{k-3} - \ldots - \varepsilon_3 v_2 - \varepsilon_2 v_1) - \\
&\qquad q(sv_{k-3} - \varepsilon_{k-2}v_{k-4} - \ldots - \varepsilon_3 v_1) - \sum_{i=0}^{q} \alpha_i.
\end{aligned}$$

Тъй като $(q+1)v_{j-1} - qv_{j-2} = v_j$, горният израз се упростява до

$$\begin{aligned} w_{k-2} &= sv_{k-1} - \varepsilon_{k-2}v_{k-2} - \ldots - \varepsilon_3 v_3 - (q+1)\varepsilon_2 v_1 - \sum_{i=0}^{q} \alpha_i \\ &= sv_{k-1} - \varepsilon_{k-2}v_{k-2} - \ldots - \varepsilon_3 v_3 - \varepsilon_2 v_2 - \sum_{i=0}^{q} \alpha_i \\ &= w_{k-2} + \varepsilon_1 v_1 - \sum_{i=0}^{q} \alpha_i. \end{aligned}$$

Оттук следва, че $\sum_{i=0}^{q} \alpha_i = \varepsilon_1 v_1 = \varepsilon_1 < q$. Съгласно Лема 4.22, $\widetilde{\mathcal{K}}(\widetilde{S}_i) \leq t + \alpha_i q$, откъдето

$$\begin{aligned} \widetilde{\mathcal{K}}(\widetilde{T}) &= \sum_{i=0}^{q} \widetilde{\mathcal{K}}(\widetilde{S}_i) - q\widetilde{K}(\widetilde{H}) \\ &= \sum_{i=0}^{q} \widetilde{\mathcal{K}}(\widetilde{S}_i) \\ &\leq \sum_{i=0}^{q} (t + \alpha_i q) \\ &= t(q+1) + q\sum_{i=0}^{q} \alpha_i \\ &\leq t(q+1) + \varepsilon_1 q. \end{aligned}$$

□

**Лема 4.24.** *Нека $\mathcal{K}$ е грийсмърова $(n, n-d)$-арка в $\mathrm{PG}(k-1,q)$, $q \geq 3$, притежаваща свойството $t$-квазиделимост, като $d$ е представено във вида (4.7). Нека $\widetilde{\mathcal{K}}$ е дуалната на $\mathcal{K}$, зададена с (4.1). Накрая нека $\varepsilon_0, \varepsilon_1 < \sqrt{q}$. Тогава за всяко подпространство $T$ в $\mathrm{PG}(k-1,q)$ с коразмерност 3, за което $\mathcal{K}(T) = w_{k-4}$, е в сила*

$$\widetilde{\mathcal{K}}(\widetilde{T}) = t(q+1).$$

*Доказателство.* Подпространството $T$ е с коразмерност 3 и следователно в дуалното пространство $\widetilde{\mathrm{PG}(k-1,q)}$ то е равнина, която приехме да означаваме с $\widetilde{T}$. Съгласно Лема 4.23, $\widetilde{\mathcal{K}}(\widetilde{T}) \leq \varepsilon_0(q+1) + \varepsilon_1 q$. Да приемем, че кратността му е $\widetilde{\mathcal{K}}(\widetilde{T}) = \varepsilon_0(q+1) + \varepsilon_1' q$, където $0 \leq \varepsilon_1' \leq \varepsilon_1$.

Да допуснем, че $\varepsilon_1' > 0$ и да означим ограничението на $\widetilde{\mathcal{K}}$ върху $\widetilde{T}$ в дуалната геометрия с $\widetilde{\mathcal{F}}$: $\widetilde{\mathcal{F}} = \widetilde{\mathcal{K}}|_{\widetilde{T}}$. Да дефинираме нова арка $\mathcal{F}$ в $\mathrm{PG}(2,q)$, която е дуална на $\widetilde{\mathcal{F}}$ и се задава чрез

$$\mathcal{F}(P) = i, \quad \text{ако } \widetilde{\mathcal{F}}(\widetilde{P}) = t + iq.$$

Ако означим с $(a_i)_{i\geq 0}$ спектъра на $\widetilde{\mathcal{F}}$, то е изпълнено

$$\begin{aligned} \sum a_{t+iq} &= q^2+q+1, \\ \sum (t+iq)a_{t+iq} &= (\varepsilon_0(q+1)+\varepsilon_1'q)(q+1). \end{aligned}$$

Оттук следва, че $\sum_i ia_{t+iq} = \varepsilon_1'(q+1)+\varepsilon_0$. Това равенство означава, че мощността на $\mathcal{F}$ е $\sum_i ia_{t+iq} = \varepsilon_1'(q+1)+\varepsilon_0$.

Сега да означим с $b_i$ броя на правите $\widetilde{P}$ в дуалната равнина, за които $\widetilde{\mathcal{F}}(\widetilde{P}) = t+iq$ през фиксирана точка $\widetilde{L}$ с кратност $c \geq 0$. Както по-горе, имаме

$$\begin{aligned} \sum b_{t+iq} &= q+1, \\ \sum (t+iq)b_{t+iq} &= (q+1)\varepsilon_0 + \varepsilon_1'q + cq, \end{aligned}$$

откъдето получаваме $\sum ib_{t+iq} = \varepsilon_1' + c$. Следователно всяка права $L$ е с кратност поне $\varepsilon_1'$ и $\mathcal{F}$ е $(\varepsilon_1'(q+1)+\varepsilon_0, \varepsilon_1')$-блокиращо множество.

По условие имаме $\varepsilon_0, \varepsilon_1 < \sqrt{q}$. Сега от $q \geq 3$ получаваме, че $\varepsilon_0 + \varepsilon_1' < \sqrt{\varepsilon_1'q}+1$ и, следователно, $\varepsilon_1'(q+1)+\varepsilon_0 < \varepsilon_1'q + \sqrt{\varepsilon_1'q}+1$. Добре известно е, че блокиращо множество $\mathcal{F}$ с такава мощност съдържа права съгласно резултат на S. Ball [1] (за проективни) и на J. De Beule, K. Metsch и L. Storme [43] (за произволни блокиращи множества). Връщайки се обратно към $\widetilde{\mathcal{F}}$ получаваме, че всички прави $\widetilde{P}_i$ в $\widetilde{T}$, минаващи през някоя точка $\widetilde{L}$ имат кратност поне $t+q = \varepsilon_0 + q$. Следователно,

$$\begin{aligned} \varepsilon_0(q+1)+\varepsilon_1 q \geq \widetilde{\mathcal{K}}(\widetilde{T}) &= \sum_{i=0}^{q} \widetilde{\mathcal{K}}(\widetilde{P}_i) - q\widetilde{\mathcal{K}}(\widetilde{L}) \\ &\geq (q+1)(\varepsilon_0+q) - q\widetilde{\mathcal{K}}(\widetilde{L}) \\ &\geq \varepsilon_0(q+1) + q(q+1) - \varepsilon_0 q. \end{aligned}$$

Оттук получаваме $q+1 \leq \varepsilon_0+\varepsilon_1 < 2\sqrt{q}$, т.е. $(\sqrt{q}-1)^2 < 0$, което е противоречие. Следователно $\varepsilon_1' = 0$, с което лемата е доказана. $\square$

Следващата лема е обобщение на Лема 4.24 за подпространства с по-висока коразмерност.

**Лема 4.25.** *Нека $\mathcal{K}$ е грийсмърова $(n, w)$-арка в $\mathrm{PG}(k-1, q)$, $q \geq 3$, имаща свойството квазиделимост, за която $d = n - w$ е представено във вида (4.7). Нека $\widetilde{\mathcal{K}}$ е дуална на $\mathcal{K}$, дефинирана чрез (4.1). Нека $U$ е подпространство в $\mathrm{PG}(k-1, q)$ с коразмерност – $\operatorname{codim} U = r$, $1 \leq r \leq k$, имащо максимална мощност $w_{k-1-r}$ (ако $U = \varnothing$, приемаме, че $\operatorname{codim} U = k$). Тогава, ако $\varepsilon_0, \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_{r-2} < \sqrt{q}$, то е изпълнено*

$$\widetilde{\mathcal{K}}(\widetilde{U}) = \varepsilon_0 v_{r-1}.$$

*Доказателство.* Нека $\mathcal{K}$ удовлетворява условието на лемата. В Лема 4.24 резултатът бе доказан за подпространства с коразмерност 3. Да допуснем, че той е верен за всички подпространства, имащи коразмерност ненадхвърляща $r-1$.

Нека $U$ и $S$, $U \subset S$, са подпространства, имащи коразмерности съответно $r$ и $r-2$. Да припомним, че $\widetilde{U}$ е $(r-1)$-мерно подпространство на $\widetilde{\mathrm{PG}}(k-1, q)$. Да означим с $T_i$, $i = 0, \ldots, q$, всички подпространства през $U$, имащи коразмерност $r-1$ и съдържащи се в $S$. Най-много $\varepsilon_{r-2}$ от подпространствата $T_i$ не са с максимална кратност, т.е. поне $q+1-\varepsilon_{r-2}$ от тях са с максимална кратност $w_{k-r}$. Наистина, ако означим броя на немаксималните подпространства измежду подпространствата $T_i$ с $\gamma$, то ще имаме $w_{r-2} \leq (q+1)w_{r-1} - qw_r - \gamma$, т.е.

$$\begin{aligned} \gamma &\leq -w_{r-2} + (q+1)w_{r-1} - qw_r \\ &= \varepsilon_{r-1}v_2 + \varepsilon_{r-2}v_1 - (q+1)\varepsilon_{r-1}v_1 \\ &= \varepsilon_{r-2}. \end{aligned}$$

Тъй като $U$ е подпространство с максимална кратност, то съществува хиперравнина $H$ с максимална кратност, съдържаща $U$. Оттук следва, че пространството $\widetilde{U}$ съдържа 0-точка по отношение на $\widetilde{\mathcal{K}}$; това е точката $\widetilde{H}$. В случая, когато $U$ е с коразмерност $k$, тази точка може да бъде избрана като произволна 0-точка в пространството $\widetilde{\mathrm{PG}}(k-1, q)$.

Да разгледаме проекция $\varphi$ от $\widetilde{H}$ в някоя хиперравнина $\widetilde{V}$ в $\widetilde{U}$, несъдържаща точката $\widetilde{H}$. Ясно е, че $\dim \widetilde{V} = r-2$. Дефинираме нова арка

$$\mathcal{F} = \frac{1}{q}(\widetilde{\mathcal{K}}^{\varphi} - \varepsilon_0).$$

За всяка точка $\widetilde{X} \in \widetilde{V}$ имаме $0 \leq \mathcal{F}(\widetilde{X}) \leq \varepsilon_0 - 1$. По нататък проекцията на $\widetilde{U}$ съвпада с $\widetilde{V}$ и е с размерност $r-2$, $\dim \varphi(\widetilde{U}) = r-2$, а $\varphi(\widetilde{T}_i)$ са хиперравнини в $\varphi(\widetilde{U})$ с размерност $r-3$; $\varphi(\widetilde{S})$ е подпространство с размерност $r-4$, съдържащо се във всички подпространства $\varphi(\widetilde{T}_i)$. Съгласно индукционното допускане $\mathcal{F}(\varphi(\widetilde{T}_i)) = 0$ за тези $T_i$, които са с максимална кратност, т.е. $\mathcal{K}(T_i) = w_{k-r}$. Без ограничение на общността да допуснем, че подпространствата $T_i$ с максимална кратност са $T_{\varepsilon_{r-2}}, T_{\varepsilon_{r-2}+1}, \ldots, T_q$. Така точките $\widetilde{X} \in \widetilde{V}$, за които $\mathcal{F}(\widetilde{X}) > 0$ се съдържат в подпространствата $\varphi(\widetilde{T}_j)$, където $j \in \{0, \ldots, \varepsilon_{r-2} - 1\}$.

Можем да повторим аргумента от последните два параграфа за друго максимално подпространство $S'$ с коразмерност $r-2$, съдържащо пространството $U$. Ще получим, че точките $\widetilde{X} \in \widetilde{V}$, за които $\mathcal{F}(\widetilde{X}) > 0$, се съдържат в други $\leq \varepsilon_{r-2}$ на брой подпространства на $\varphi(\widetilde{U})$, да кажем $\varphi(\widetilde{T}'_j)$, където $j \in \{0, \ldots, \varepsilon_{r-2} - 1\}$. Така точките с положителна кратност по отношение на $\mathcal{F}$ се съдържат в сеченията $\varphi(\widetilde{T}_i) \cap \varphi(\widetilde{T}'_j)$, където $i, j \in \{0, \ldots, \varepsilon_{r-2} - 1\}$. Следователно броят на точките $\widetilde{X}$, за които $\mathcal{F}(\widetilde{X}) > 0$ не надхвърля

$$\varepsilon_{r-2}^2 v_{r-3} \leq q v_{r-3} = v_{r-2} - 1.$$

Нека $\widetilde{X} \in \widetilde{V}$ е с $\mathcal{F}(\widetilde{X}) = c \geq 0$. Всяка точка в $\varphi(\widetilde{U})$ е инцидентна с $v_{r-2}$ прави. Следователно съществува права $\widetilde{L} \in \widetilde{V}$ през $\widetilde{X}$, която освен $\widetilde{X}$ съдържа само 0-точки. Тази права е образ на равнина $\pi$, която има $q$ прави с кратност $\varepsilon_0$ и една права с кратност $\varepsilon_0 + cq$, където $c \leq \varepsilon_0 - 1$ (по отношение на $\widetilde{\mathcal{K}}$). Така $\widetilde{\mathcal{K}}(\pi) = \varepsilon_0(q+1) + cq$ и съгласно Лема 4.24 имаме $c = 0$.

Следователно $\mathcal{F}(\widetilde{X}) = 0$ за всички точки $\widetilde{X} \in \widetilde{V}$ и всички прави през $\widetilde{H}$ в $\widetilde{U}$ са $t$-прави. С това лемата е доказана. □

Сега доказателството на основната теорема следва лесно от горните леми.

**Теорема 4.26.** *Нека $\mathcal{K}$ е грийсмърова $(n, n-d)$-арка в* $\mathrm{PG}(k-1, q)$*, която притежава свойството $t$-квазиделимост. Нека $d$ е представено във вида*

$$d = sq^{k-1} - \sum_{i=0}^{k-2} \varepsilon_i q^i,$$

*където* $0 \leq \varepsilon_i < q$ *за всички* $i = 0, \ldots, k-2$. *Ако за числата* $\varepsilon_i$ *са изпълнени неравенствата*

$$t = \varepsilon_0 < \sqrt{q}, \varepsilon_1 < \sqrt{q}, \ldots, \varepsilon_{k-2} < \sqrt{q},$$

*то* $\mathcal{K}$ *е* $t$*-разширима.*

*Доказателство.* Съгласно Лема 4.25, $\widetilde{\mathcal{K}}$ е $(tv_{k-1}, tv_{k-2})$-блокиращо множество по отношение на хиперравнините. Съгласно Следствие 3.5 от [133, 134], всяко блокиращо множество в $\mathrm{PG}(k-1,q)$, $q = p^h$, с параметри $(xv_{k-1}, xv_{k-2})$, за което $x \leq q - \frac{q}{p}$, е сума на $x$ хиперравнини. Тъй като по условие имаме $t < \sqrt{q} < q - \frac{q}{p}$, то твърдението следва от Теорема 4.3. $\square$

Ще формулираме този резултат като теорема за разширимост на линейни кодове.

**Теорема 4.27.** *Нека $C$ е код на* Griesmer *с параметри* $[n,k,d]_q$, *притежаващ свойството* $t$*-квазиделимост. Нека* $d$ *е представено във вида*

$$d = sq^{k-1} - \sum_{i=0}^{k-2} \varepsilon_i q^i,$$

*където* $0 \leq \varepsilon_i < q$ *за всички* $i = 0, \ldots, k-2$. *Ако за числата* $\varepsilon_i$ *са изпълнени неравенствата*

$$t = \varepsilon_0 < \sqrt{q}, \varepsilon_1 < \sqrt{q}, \ldots, \varepsilon_{k-2} < \sqrt{q},$$

*то* $C$ *е* $t$*-разширим, т.е. съществува линеен код с параметри* $[n+t, k, d+t]_q$.

В Теорема 4.26 се твърди, че ако за параметрите на $t$-квазиделима грийсмърова арка $\mathcal{K}$ се изпълнява известно условие, то блокиращото множество $\widetilde{\mathcal{K}}$ е сума на $t$ хиперравнини. Оказва се, че ако знаем спектъра на максимална хиперравнина за грийсмърова арка, имаща свойството $t$-квазиделимост, то можем да ограничим мощността на $\widetilde{\mathcal{K}}$. В някои случаи това води до доказателство за разширимост за $\mathcal{K}$.

**Теорема 4.28.** *Нека* $\mathcal{K}$ *е грийсмърова арка в* $\mathrm{PG}(k-1,q)$ *с параметри* $(n,w)$, $w = n-d$, *която е* $t$*-квазиделима по модул* $q$. *За фиксирана хиперравнина* $H_0$ *с кратност* $w$ *нека* $(a_i)_{i \geq 0}$ *е спектърът на арката* $\mathcal{K}|_{H_0}$. *Да означим с* $A$ *най-голямото цяло число, за което всяко блокиращо множество с параметри*

$(tv_{k-1}+A, tv_{k-2})$ *съдържа хиперравнина в носителя си. Тогава, ако*

$$qa_{w-\lceil d/q\rceil-1}+2qa_{w-\lceil d/q\rceil-2}+\ldots+(t-2)qa_{w-\lceil d/q\rceil-t+2}+ \\ (t-1)q\sum_{u\le w-\lceil d/q\rceil-t+1}a_u\le A, \quad (4.10)$$

*то $\mathcal{K}$ е разширима.*

*Доказателство.* По условие $\mathcal{K}$ е грийсмърова арка, откъдето следва, че стойностите за $w_j$, $j=0,1,\ldots,k-1$, се получават от (4.9). Нека $\widetilde{\mathcal{K}}$ е арка в $\widetilde{\Sigma}$, дефинирана чрез (4.1). Точката $\widetilde{H}_0$ е с кратност 0 в $\widetilde{\Sigma}$. Да означим с $\widetilde{\delta}_i$ правите през $\widetilde{H}_0$ в $\widetilde{\Sigma}$. Те съответстват на хиперравнините $\delta_i$ в $H_0$, т.е. подпространствата на $\mathrm{PG}(k-1,q)$ от коразмерност 2, които се съдържат в $H_0$.

Съгласно Лема 4.22, $\widetilde{\mathcal{K}}(\widetilde{\delta}_i)\le t+\lambda q$, ако $\mathcal{K}(\delta_i)=w_1-\lambda$, $\lambda\in\{0,\ldots,t-1\}$, и $\widetilde{\mathcal{K}}(\widetilde{\delta}_i)\le t+(t-1)q$, ако $\mathcal{K}(\delta_i)\le w_1-t$. Сега сумирайки кратностите на всички прави $\widetilde{\delta}_i$ през $\widetilde{H}_0$ получаваме следната оценка за мощността на $\widetilde{\mathcal{K}}$:

$$\begin{aligned}
|\widetilde{\mathcal{K}}| &= \sum_i \widetilde{\mathcal{K}}(\widetilde{\delta}_i)\\
&\le a_{w_1}t+a_{w_1-1}(t+q)+\ldots+a_{w_1-(t-2)}(t+(t-2)q)+\\
&\qquad\qquad \sum_{u\le w_1-(t-1)}a_u(t+(t-1)q)\\
&= \left(\sum_{u\le w_1}a_u\right)t+a_{w_1-1}q+\ldots+a_{w_1-(t-2)}(t-2)q+\sum_{u\le w_1-(t-1)}a_u(t-1)q\\
&= v_{k-1}t+a_{w_1-1}q+\ldots+a_{w_1-(t-2)}(t-2)q+\sum_{u\le w_1-(t-1)}a_u(t-1)q.
\end{aligned}$$

Ако

$$a_{w_1-1}q+\ldots+a_{w_1-(t-2)}(t-2)q+\sum_{u\le w_1-(t-1)}a_u(t-1)q\le A$$

имаме $|\widetilde{\mathcal{K}}|\le tv_{k-1}+A$. Оттук следва, че $\widetilde{\mathcal{K}}$ съдържа в носителя си хиперравнина. Следователно $\mathcal{K}$ е разширима по Теорема 4.3. $\square$

Идеята на Теорема 4.26 може да се използва за ограничаване не само на спектъра на максималните хиперравнини, но и на хиперравнини с по-малка кратност. За съжаление точната стойност на $A$ не е известна в общия случай. Частични резултати за равнинния случай са получени в [1] и [43].

### 4.4.2 Примери

В този раздел ще представим примери, които илюстрират резултатите получени по-горе. Да отбележим, че Теорема 4.26 може да се приложи, ако $t < \sqrt{q}$. Следователно за да получим примери, които не се покриват от теоремите на Hill-Lizak и Maruta трябва да разгледаме полета с $q > t^2 \geq 9$.

*Пример* 4.29. Да разгледаме семейство от хипотетични линейни кодове с параметри $[q^3-3q-6, 4, q^3-q^2-3q-3]_q$, $q \geq 5$. Непосредствено се проверява, че кодове с такива параметри биха лежали на границата на Griesmer. Асоциираните с тях арки в геометриите $\mathrm{PG}(3, q)$ имат параметри $(q^3-3q-6, q^2-3)$. В този случай, разписвайки $d = q^3-q^2-3q-3$ по степените на $q$, както в (4.7), получаваме $\varepsilon_0 = t = 3$, $\varepsilon_1 = 3$, $\varepsilon_2 = 1$. Ако съществува арка с такива параметри, то тя би притежавала свойството 3-квазиделимост. Това следва от несъществуването на арки с параметри $(q^2-iq-2, q-i)$ в $\mathrm{PG}(2, q)$ за $i = 1, \ldots, q-1$. Така за всички $q \geq 11$ можем да приложим Теорема 4.26. От нея получаваме, че такава арка е 3-разширима до арка с параметри $(q^3-3q-3, q^2-3)$, която от своя страна има свойството делимост. Възможните кратности на равнини за $(q^3-3q-3, q^2-3)$-арка са $q^2-iq-3$, $i = 0, \ldots, q-1$, като максималната кратност на права в равнина с $(q^2-iq-3)$ точки е $q-i$. Лесно се вижда, че за $q \geq 11$ това е възможно единствено за $i = 0$. Това означава, че всички равнини биха имали една и съща кратност $q^2-3$. Съгласно добре известния резултат на A. Bonisoli [22], такава арка е кратно на цялата геометрия $\mathrm{PG}(3, q)$[2] и следователно кратността на всички точки в $\mathrm{PG}(3, q)$ е една и съща, което не е вярно, тъй като $(q^2-3)$-равнина има 1- и 0-точки.

За $q = 7, 8, 9$ не можем да приложим Теорема 4.26, тъй като условието за коефициентите $\varepsilon_i$ не е изпълнено. Въпреки това можем да докажем несъществуването на арки с параметри $(q^3-3q-6, q^2-3)$, използвайки допълнителни геометрични съображения.

Най-интересният случай е $q = 5$. Той съвпада с един от нерешените четири случая, в които оптималната дължина на четиримерен код

[2] В термините на теорията на кодирането това означава, че асоциираният код е конкатенация на симплекс-кодове.

над $\mathbb{F}_5$ не е определена [152]. Въпросът за съществуването на $(104, 22)$-арка в $\mathrm{PG}(3, 5)$ е еквивалентен на въпроса за съществуването на линеен код с параметри $[104, 4, 82]$. Отхвърлянето на възможността да се построи такава арка (съответно такъв код) би имало за следствие, че $n_5(4, 82) = 105$. Това наистина е така, но доказателството, макар да се базира на основната идея от Теорема 4.26, включва и много допълнителни геометрични аргументи. То е изложено по-долу в раздел 4.5.

*Пример* 4.30. В този пример ще покажем, че подходът от тази глава може да се използва дори тогава, когато някои от коефициентите $\varepsilon_i$ са по-големи или равни на $\sqrt{q}$. Нека $\mathcal{K}$ е $(q^2 + 1 - t)$-шапка в $\mathrm{PG}(3, q)$, като $t < \sqrt{q}$. Да допуснем, че максималната кратност на равнина е $q + 1$. Това, разбира се, винаги е изпълнено за нечетни $q$. Кодът $C_{\mathcal{K}}$, асоцииран с $\mathcal{K}$ има параметри $[q^2 + 1 - t, 4, q^2 - q - t]_q$ и минималното разстояние $d$ се представя във вида $d = q^2 - q - t = q^3 - (q - 1)q^2 - q - t$, т.е. $s = 1$, $\varepsilon_2 = q - 1$, $\varepsilon_1 = 1$, $\varepsilon_0 = t < \sqrt{q}$. Допустимите кратности на равнини са $q + 1, \dots, q + 1 - t, 1$ и $0$. Тъй като $\varepsilon_2 \geq \sqrt{q}$, то не можем да приложим директно Теорема 4.26. В този случай е вярно, че ако $L$ е 2-права, то в дуалната геометрия тя е $t$-права по отношение на $\widetilde{\mathcal{K}}$: $\widetilde{\mathcal{K}}(\widetilde{L}) = t$. Използвайки това можем да докажем $t$-разширимост за шапката $\mathcal{K}$.

Най-напред ще докажем, че всяка точка от $\mathcal{K}$ е инцидентна с 1-равнина. Да разгледаме проекция от 1-точка $P$ върху равнина $\pi$, която не е инцидентна с $P$. Получената индуцирана арка $\mathcal{K}^{\varphi}$ е проективна (тъй като $\mathcal{K}$ е шапка) и има параметри $(q^2 - t, q)$. Тя е допълнение на $(q + 1 + t, 1)$-блокиращо множество. Тъй като $t < \sqrt{q}$, такова блокиращо множество съдържа права $L$. Сега равнината $\langle L, P \rangle$ в $\mathrm{PG}(3, q)$ е с кратност 1 в $\mathrm{PG}(3, q)$. Съгласно Лема 4.22, $\widetilde{\mathcal{K}}(\widetilde{L}) = t$.

Да разгледаме 1-права $L_0$ и да допуснем, че тя е инцидентна само с равнини, имащи кратност поне $q + 1 - t$. Да разгледаме една такава равнина $\pi$, имаща кратност $\mathcal{K}(\pi) = q - b$, $b \leq t - 1$. Нека $P$ е 1-точка в $L_0$ и нека останалите 1-прави в $\pi$ са $L_1, \dots, L_b$. Една от тях лежи в 1-равнината през $P$. Да разгледаме равнината $\widetilde{P}$ в дуалната геометрия. Сега $\widetilde{\pi}$ е 0-точка по отношение на $\widetilde{\mathcal{K}}$ и $q + 1 - b$ от правите през нея са $t$-прави; останалите $b$ прави са $t$ или $(t + q)$-прави. Оттук получаваме, че $\widetilde{\mathcal{K}}(\widetilde{P}) \leq t(q + 1) + bq$ и съгласно Лема 4.24 имаме $b = 0$. С това доказахме, че за всяка 1-права $L$, $\widetilde{\mathcal{K}}(\widetilde{L}) = t$.

Сега да разгледаме 1-равнина $\pi$. Нека $L$ е 0-права в $\pi$, която се съдържа и в друга 1-равнина (1-равнина различна от $\pi$). Преброявайки кратностите на равнините през $L$, получаваме $\widetilde{\mathcal{K}}(\widetilde{L}) = t$. Тъй като съществуват $q^2 - t$ такива прави, то $q^2 + q + 1 - t$ от правите през $\widetilde{\pi}$ са $t$-прави, а останалите прави са с кратност $t$ или $(t + q)$. Сега $|\widetilde{\mathcal{K}}| \leq t(q^2 + q + 1) + tq$ и отново съгласно Лема 4.24, $|\widetilde{\mathcal{K}}| = t(q^2 + q + 1)$. Оттук следва, че $\widetilde{\mathcal{K}}$ е сума на равнини и $\mathcal{K}$ е $t$-разширима.

## 4.5 Несъществуване на $(104, 22)$-арки в $\mathrm{PG}(3, 5)$

В случая $q = 5$, $k = 4$ има четири минимални разстояния $d$, за които точната стойост на $n_5(4, d)$ не е намерена. Известните граници за тези $d$ са представени в таблицата по-долу. И в четирите случая имаме $n_5(4, d) = g_5(4, d)$ или $g_5(4, d) + 1$, т.е. въпосът се свежда до конструирането или отхвърляне на съществуването на някакъв код на Griesmer със съответните параметри.

| $d$ | $g_5(4, d)$ | $n_5(4, d)$ |
|---|---|---|
| 81 | 103 | 103–104 |
| 82 | 104 | 104–105 |
| 161 | 203 | 203–204 |
| 162 | 204 | 204–205 |

В този раздел ще докажем несъществуването на грийсмърови кодове с параметри $[104, 4, 82]_5$. Подходът ни е геометричен, т.е. ние доказваме несъществуването на $(104, 22)$-арки в $\mathrm{PG}(3, 5)$ като съществено използваме факта, че ако такава арка съществува, то тя не е разширима.

### 4.5.1 Спомагателни резултати

Нашето доказателство съществено използва структурата на равнинните арки в $\mathrm{PG}(2, 5)$ с параметри (9,3), (10,3), (11,3) и (22,5). Класификацията на арки с първите три множества от параметри е направена в [121]. Арките с параметри (22,5) са допълнения на (9,1)-блокиращи множества. Тези блокиращи множества са два вида сума на права и три точки ((D1) и (D2)) и проективен триъгълник (D3).

| параметри | тип | $a_0$ | $a_1$ | $a_2$ | $a_3$ | $a_4$ | $a_5$ | # арки |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $(11, 3)$ | A1 | 4 | 4 | 7 | 16 | | | 1 |
| | A2 | 5 | 1 | 10 | 15 | | | 1 |
| $(10, 3)$ | B1 | 3 | 9 | 6 | 13 | | | 1 |
| | B2 | 4 | 6 | 9 | 12 | | | 4 |
| | B3 | 5 | 3 | 12 | 11 | | | 1 |
| | B4 | 6 | 0 | 15 | 10 | | | 1 |
| $(9, 3)$ | C1 | 3 | 12 | 6 | 10 | | | 2 |
| | C2 | 4 | 9 | 9 | 9 | | | 7 |
| | C3 | 5 | 6 | 12 | 8 | | | 5 |
| | C4 | 6 | 3 | 15 | 7 | | | 2 |

| параметри | тип | $a_0$ | $a_1$ | $a_2$ | $a_3$ | $a_4$ | $a_5$ | # арки |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $(22, 5)$ | D1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 15 | 14 | 1 |
| | D2 | 1 | 0 | 0 | 3 | 12 | 15 | 1 |
| | D3 | 0 | 0 | 3 | 4 | 6 | 18 | 1 |

Да допуснем, че съществува $(104, 22)$-арка $\mathcal{K}$ в $\mathrm{PG}(3, 5)$. Отново с $w_i$, $i = 0, 1, 2$, означаваме максималната кратност на $i$-мерно подпространство (точка, права, равнина) в $\mathrm{PG}(3, 5)$. В следващата лема доказваме някои важни свойства на хипотетичните $(104, 22)$-арки.

**Лема 4.31.** *Нека $\mathcal{K}$ е $(104, 22)$-арка в $\mathrm{PG}(3, 5)$ със спектър $(a_i)_{i=0}^{22}$. Тогава*

*(a)* $w_0 = 1$, $w_1 = 5$, $w_2 = 22$;

*(b) за всяка права $L$ и всяка равнина $\pi$, съдържаща $L$ е изпълнено* $\mathcal{K}(L) \le \lfloor (6 + \mathcal{K}(\pi))/5 \rfloor$;

*(c) не съществуват равнини с* $2, 3, 7, 8, 12, 13, 17, 18$ *точки;*

*(d)* $a_0 = 0$;

*(e)* $a_1 = 0$;

*(f)* $a_4 = a_5 = 0$;

*(g) в сила е равенството*

$$\sum_{i=0}^{20} \binom{22 - i}{2} a_i = 468. \tag{4.11}$$

*Доказателство.* (a) Тези стойности се получават от Лема 3.7 за $t = 0, d = 22, k = 4, q = 5$.

(b) Оценявайки кратностите на равнините през $L$ имаме:

$$\mathcal{K}(\pi) + 5 \cdot 22 - 5\mathcal{K}(L) \geq 104,$$

откъдето следва неравенството.

(c) Тази точка следва от (b) и от несъществуването на арки с параметри (2,1), (7,2), (12,3) и (17,4) в $\mathrm{PG}(2,5)$.

(d) Точките извън 0-равнината и непринадлежащи на арката образуват $(21,3)$-блокиращо множество в $\mathrm{AG}(3,5)$. Такова афинно блокиращо множество не съществува съгласно Следствие 2.3 от [2].

(e) Това следва от преброяването на кратностите на равнините през 1-права, съдържаща се в 1-равнина. Съществено използваме факта, че никоя $(22,5)$-арка в $\mathrm{PG}(2,5)$ не съдържа 1-права (вж. спектрите на арките с параметри $(22,5)$).

(f) Нека $\pi_0$ е 4-равнина в $\mathrm{PG}(3,5)$. Съгласно (b), всяка права от $\pi_0$ е с кратност ненадхвърляща две, т.е. $\mathcal{K}|_{\pi_0}$ е равнинна $(4,2)$-арка. Всяка такава арка се разширява до овал. Следователно съществуват точки[3], които са инцидентни само с 1-прави от $\mathcal{K}|_{\pi_0}$. Нека $X$ е такава точка.

Нека точките с кратност 1 в $\pi_0$ са $Y_0, Y_1, Y_2, Y_3$. Правите $XY_0, \ldots, XY_3$ са 1-прави. Да означим с $\pi_i$, $i = 1, \ldots, 5$, останалите пет равнини през $XY_0$. Всички тези равнини са с кратност ненадхвърляща 21, тъй като 22-равнина не може да има 1-права. Всъщност всички те са с кратност точно 21.

Да разгледаме проекция $\varphi$ от точката $X$ в равнина $\delta$, несъдържаща $X$. Да означим $L_i = \varphi(\pi_i)$, $i = 0, \ldots, 5$, и $Z = \varphi(XY_0)$. Правата $L_0$ е от тип $(1,1,1,1,0,0)$ и кратностите на правите $L_i$ по отношение на индуцираната арка са $\mathcal{K}^\varphi(L_i) = 21$, $i = 1, \ldots, 5$.

Да допуснем, че с някоя от правите $L_1, \ldots, L_5$ е инцидентна точка $U$ с кратност $\mathcal{K}^\varphi(U) = 5$. Тъй като $U$ е образ на 5-права по отношение на $\mathcal{K}$ и тъй като тази права се съдържа в 21-равнина, трябва да съществуват поне три прави през $U$ в $\delta$, да кажем $M_0, M_1, M_2$, за които $\mathcal{K}^\varphi(M_i) = 22$. Поне една от тези прави пресича $L_0$ в 1-точка. Това означава, че съществува 22-равнина, съдържаща 1-права. Тъй като това е невъзможно, имаме $K^\varphi(U) = 4$ за всяка точка $U$ от $(\cup_{i=1}^5 L_i) \setminus \{Z\}$. С други думи правите $L_i$, $i = 1, \ldots, 5$, са от тип $(4,4,4,4,4,1)$.

[3] Лесно се проверява, че съществуват точно шест такива точки.

Сега е лесно да проверим, че за всяка права $L$ в $\delta$ е изпълнено $\mathcal{K}^{\varphi}(L) \leq 21$. Това означава, че точката $X$, от която проектираме не се съдържа в 22-равнина. Следователно $\mathcal{K}$ може да бъде разширена до $(105, 22)$-арка в $\mathrm{PG}(3,5)$ чрез добавяне към нея на точката $X$. Но арка с тези параметри не съществува (вж. например [152]). Това доказва несъщесвуването на 4-равнини.

Несъществуването на 5-равнини се доказва аналогично.

(g) Това следва от (2.6) за $n = 104, w = 22,\ k = 4, q = 5,\ \lambda_j = 0$ за $j \geq 2$. $\square$

Отхвърлянето на равнини с 6 точки се оказва доста по-трудно. По тази причина формулираме този резултат в отделна лема.

**Лема 4.32.** *Нека* $\mathcal{K}$ *е* $(104, 22)$*-арка в* $\mathrm{PG}(3,5)$*. Тогава* $a_6 = 0$*.*

*Доказателство.* Нека $\pi_0$ е 6-равнина. Тогава $\mathcal{K}|_{\pi_0}$ е $(6, 2)$-арка (хиперовал) и има спектър $a_2 = 15, a_1 = 6, a_0 = 10$. За произволно фиксирана права $L$ в $\pi_0$ означаваме с $\pi_1, \ldots, \pi_5$ останалите пет равнини през $L$.

Ако $L$ е 2-права, то максималният принос на равнините през $L$ към лявата страна на (4.11) е 1; ако $L$ е 1-права, то максималният принос е 3. Тези стойности се получават съответно при

$$\begin{aligned}
(\mathcal{K}(\pi_0), \ldots, \mathcal{K}(\pi_5)) &= (6, 22, 22, 22, 22, 20), \text{ и} \\
(\mathcal{K}(\pi_0), \ldots, \mathcal{K}(\pi_5)) &= (6, 21, 21, 21, 21, 19).
\end{aligned}$$

Сега ще докажем, че по 0-права в $\pi_0$ не може да минава 10- или 11-равнина. Да допуснем, че $\mathcal{K}(\pi_1) = 10$. Сега $\mathcal{K}_{\pi_0}$ е овал и три от точките на $L$ са външни за този овал. Означаваме ги с $P_1, P_2$ и $P_3$. Да допуснем, че такава точка $P_i$ е инцидентна с 3-права в $\pi_1$. Разглеждаме проекция $\varphi$ от $P_i$. Образът на $\pi_0$ е права от тип $(2, 2, 1, 1, 0, 0)$, докато образът на $\pi_1$ е $(0, 3, *, *, *, *)$. През точката с кратност 3 от правата $\varphi(\pi_1)$ минават четири 22-прави и поне една от тях пресича $\varphi(\pi_0)$ в 1-точка. Това е невъзможно, тъй като 22-равнина не съдържа 1-права. Следователно при проектиране от всяка от точките $P_i$ $\varphi(\pi_1)$ е права от тип $(0, 2, 2, 2, 2, 2)$. Сега добавяйки към $(10, 3)$-арката в $\pi_1$ получаваме $(13, 3)$-арка, противоречие, тъй като не съществува арка с такива параметри.

Използвайки този аргумент можем да отхвърлим и съществуването на равнини с 14 и 15 точки.

Нека допуснем, че $\mathcal{K}(\pi_1) = 11$. Нека $P_i$ са, както по-горе, външни точки към овала в $\pi_0$. Отново разглеждаме проекция от $\varphi$ от една от точките $P_i$. Да допуснем, че $\varphi(\pi_1)$ е от тип $(0,3,3,3,2,0)$. Правата през 0-точките на $\varphi(\pi_0)$ и $\varphi(\pi_1)$ е 11-права $\varphi(\pi')$ от тип $(3,3,3,2,0,0)$. Сега четири от шестнадесетте точки извън $\varphi(\pi_0)$, $\varphi(\pi_1)$ и $\varphi(\pi')$ са с кратност 4, а останалите са с кратност 5. Нека точките с кратност 4 са $X_i$, $i = 1,2,3,4$. Като използваме съществено наблюдението, че 22-права в проекционната равнина не съдържа 1-точка получаваме, че никои три от седемте точки

$$X_1, X_2, X_3, X_4, \varphi(\pi_0) \cap \varphi(\pi_1), \varphi(\pi_0) \cap \varphi(\pi'), \varphi(\pi_1) \cap \varphi(\pi'),$$

не са колинеарни, противоречие тъй като в $\mathrm{PG}(2,5)$ не съществува $(7,2)$-арка. Това наблюдение отхвърля възможността $\mathcal{K}_{H_1}$ да бъде $(11,3)$-арка от тип (A2).

Нека сега $\mathcal{K}_{\pi_1}$ е $(11,3)$-арка от тип (A1). Проекцията $\varphi$ от поне една (всъщност точно две) от външните точки е такава, че $\varphi(\pi_1)$ е от тип $(0,3,3,3,1,1)$. Използвайки отново факта, че 22-права не съдържа 0-точка получаваме, че двете прави през втората 0-точка на $\varphi(\pi_0)$ и 1-точките на $\varphi(\pi_1)$ са от тип $(0,4,4,4,3,1)$. Сега не е трудно да се забележи, че правите $\varphi(\pi_2)$, $\varphi(\pi_3)$, $\varphi(\pi_4)$ са от тип $(0,5,5,4,4,4)$, докато $\varphi(\pi_5)$ е от тип $(0,5,5,5,3,3)$. Нека $X$ е 5-точка от $\varphi(\pi_5)$. Съществуват две 22-прави през $X$, които са от тип $(5,3,2,*,*,*)$. Прообразът на такава права е проективният триъгълник и типът ѝ трябва да е $(5,5,4,3,3,2)$. Но това е невъзможно, тъй като правите $\varphi(\pi_1)$, $\varphi(\pi_2)$ и $\varphi(\pi_3)$ нямат 3-точки.

От казаното дотук следва, че максималният принос към лявата страна на (4.11) на равнините през 0-права $L$ е 30 и се получава при

$$(\mathcal{K}(H_0), \ldots, \mathcal{K}(H_5)) = (6,22,22,22,16,16);$$

Замествайки в (4.11) получаваме

$$468 = \sum_{i=0}^{22} \binom{22-i}{2} a_i \leq \binom{16}{2} + 15 \cdot 1 + 6 \cdot 3 + 10 \cdot 30 = 453,$$

противоречие. □

Така съгласно Лема 4.31, ако в $\mathrm{PG}(3,5)$ съществува $(104,22)$-арка $\mathcal{K}$, то тя е 3-квазиделима. Освен това, 0-точките по отношение на дуалната арка $\widetilde{\mathcal{K}}$ се получават единствено от максималните равнини. Това налага известни ограничения върху структурата на $\widetilde{\mathcal{K}}$, които са описани в следващата лема.

**Лема 4.33.** *Нека* $\mathcal{K}$ *е* $(104,22)$*-арка в* $\mathrm{PG}(3,5)$*. Тогава в дуалното пространство не съществува равнина* $\widetilde{P}$*, която е с кратност* $\widetilde{\mathcal{K}}(\widetilde{P}) = 18$ *и за която* $\widetilde{\mathcal{K}}|\widetilde{P} = 3\chi_{\widetilde{L}}$ *за някоя права* $\widetilde{L}$ *в дуалното пространство.*

*Доказателство.* Нека $\mathcal{K}$ е $(104,22)$-арка в $\mathrm{PG}(3,5)$ и нека $P$ е фиксирана точка в $\mathrm{PG}(3,5)$. Да сумираме кратностите на всички равнини през $P$. Ясно е, че при това всяка точка ще е преброена 6 пъти, а самата точка $P$ – 31 пъти:

$$\sum_{\pi:\pi\ni P} \mathcal{K}(\pi) = 6|\mathcal{K}| + 25\mathcal{K}(P).$$

От друга страна, нека $\widetilde{\mathcal{K}}|\widetilde{P} = 3\chi_{\widetilde{L}}$. Всяка точка $\widetilde{\pi} \in \widetilde{P}$, за която $\widetilde{K}(\widetilde{\pi}) = 0$ е задължително максимална равнина по отношение на $\mathcal{K}$, т.е. $\mathcal{K}(\pi) = 22$. За останалите шест точки $\widetilde{\pi}_i$, $i = 0,\ldots,5$, които са върху правата $\widetilde{L}$ имаме $\widetilde{K}(\widetilde{\pi}_i) = 3$. Сумата от кратностите на равнините $\pi_i$ тогава е:

$$\sum_{\pi_i:\pi_i\ni L} \mathcal{K}(\pi_i) = |\mathcal{K}| + 5\mathcal{K}(L).$$

Оттук получаваме

$$6|\mathcal{K}| + 25\mathcal{K}(X) = 25 \cdot 22 + |\mathcal{K}| + 5\mathcal{K}(L),$$

което дава

$$|\mathcal{K}| + 5\mathcal{K}(X) = 110 + \mathcal{K}(L).$$

Последното се упростява до $\mathcal{K}(X) = \dfrac{1}{5}(6+\mathcal{K}(L)) > 1$, което е противоречие, тъй като $\mathcal{K}$ е проективна арка. □

**Лема 4.34.** *Нека* $\mathcal{K}$ *е* $(104,22)$*-арка в* $\mathrm{PG}(3,5)$*. Тогава* $|\widetilde{\mathcal{K}}| \geq 163$*.*

*Доказателство.* Това следва от Лема 4.33, Теорема 4.21 и от това, че $(104,22)$-арка не е разширима (т.е. всяка равнина в дуалното пространство съдържа 0-точка по отношение на $\widetilde{\mathcal{K}}$. □

Сега можем да използваме Лема 4.34 заедно с необходимото условие (4.11) за да отхвърлим и възможността за равнини с определени кратности. Съществeното наблюдение е, че ако петорка от равнини през права $L$ във фиксирана равнина $\pi_0$ дава висок принос към лявата страна на (4.11), то кратността на дуалната права $\widetilde{L}$ по отношение на $\widetilde{\mathcal{K}}$ е малка. В някои случаи това води до противоречие с Лема 4.34.

**Лема 4.35.** *Нека* $\mathcal{K}$ *е* $(104, 22)$*-арка в* $\mathrm{PG}(3, 5)$*. Тогава* $a_9 = a_{10} = a_{11} = 0$*.*

*Доказателство.* Ще докажем само несъществуването на 9-равнини, ограничението върху които е $(9, 3)$-арка от тип C4. Това е и най-тежкият от всички случаи. Несъществуването на 9-равнини от останалите типове, както и несъществуването на 10- и 11-равнини се доказва аналогично.

Нека $\pi_0$ е 9-равнина и нека $\mathcal{K}|_{\pi_0}$ е $(9, 3)$-арка от тип C4. За произволно фиксирана права $L$ в $\pi_0$ означаваме с $\pi_1, \ldots, \pi_5$ останалите пет равнини през $L$. Имаме следните възможности:

| $\mathcal{K}(L)$ | $\widetilde{\mathcal{K}}(\widetilde{L})$ | $\eta_i$ | $(\mathcal{K}(\pi_0), \ldots, \mathcal{K}(\pi_5))$ |
|---|---|---|---|
| 3 | 3 | 0 | (22,22,22,22,22,9) |
| 2 | 8 | 4 | (22,22,22,2,19,9) |
| 1 | 8 | 15 | (21,21,21,21,16,9) |
| 1 | 13 | 7 | (21,21,20,19,19,9) |
| 0 | 8 | 79 | (22,22,22,19,10,9) |
| 0 | 13 | 34 | (22,21,19,19,14,9) |
| 0 | 18 | 15 | (19,19,19,19,19,9) |

Пресмятайки приноса на равнините през различните прави на $\pi_0$ към лявата страна на (4.11), получаваме

$$\binom{12}{3} + 7 \cdot 0 + 15 \cdot 4 + 15x + 7 \cdot (3 - x) + 79u + 34v + 15(6 - u - v) \geq 468,$$

откъдето $8x + 64u + 19v \geq 219$.

От друга страна пресмятайки мощността на $\widetilde{\mathcal{K}}$ и отчитайки, че $\widetilde{\mathcal{K}}(\widetilde{\pi}_0) = 3$, получаваме

$$3 + 7 \cdot 0 + 15 \cdot 5 + 5x + 10(3 - x) + 5u + 10v + 15(6 - u - v) \geq 163,$$

откъдето $x + 2u + v \leq 7$. Сега получаваме веригата от неравенства

$$224 \geq 32x + 64u + 32v \geq 8x + 64u + 19v \geq 219.$$

Оттук получаваме $x = v = 0$, откъдето $224 \geq 64u \geq 219$, противоречие, тъй като $u$ е цяло число. $\square$

### 4.5.2 Доказателство за несъществуване на (104, 22)-арки

В този раздел ще докажем несъществуването на (104, 22)-арки.

**Теорема 4.36.** *Не съществува* (104, 22)*-арка в* PG(3, 5).

*Доказателство.* Да допуснем, че съществува (104, 22)-арка в PG(3, 5), която означаваме с $\mathcal{K}$. Доказателството се състои в прилагане на методите от предния раздел към трите неизоморфни (22, 5)-арки в PG(2, 5). Нека $\pi_0$ е 22-равнина. Както по-горе, за произволно фиксирана права $L$ в $\pi_0$ ще означаваме с $\pi_i$ останалите пет равнини през $L$. Чрез директна проверка установяваме, че за кратностите на правата $L$ и равнините $\pi_i$ имаме следните възможности:

| $\mathcal{K}(L)$ | $\widetilde{\mathcal{K}}(\widetilde{L})$ | $\eta_i$ | $(\mathcal{K}(\pi_0), \ldots, \mathcal{K}(\pi_5))$ |
|---|---|---|---|
| 5 | 3 | 3 | (22,22,22,22,22,19) |
| 4 | 3 | 28 | (22,22,22,22,22,14) |
| 4 | 8 | 7 | (22,22,22,22,22,14) |
| 3 | 3 | 36 | (22,22,22,22,16,15) |
| 3 | 8 | 32 | (22,22,22,20,19,14) |
| 3 | 13 | 13 | (22,20,20,19,19,19) |
| 2 | 3 | 45 | (22,22,22,16,16,16) |
| 2 | 8 | 57 | (22,22,22,20,14,14) |
| 2 | 13 | 37 | (22,21,19,19,19,14) |
| 0 | 8 | 86 | (22,22,16,16,14,14) |
| 0 | 13 | 87 | (22,21,19,14,14,14) |

(D1) Да означим с $x$ броя на правите $L$ в $\pi_0$ с кратност 4, за които е изпълнено $\widetilde{\mathcal{K}}(\widetilde{L}) = 3$. Преброявайки кратностите на равнините през различните прави на $\pi_0$ към лявата страна на (4.11), получаваме

$$14 \cdot 3 + 28x + 7(15 - x) + 1 \cdot 57 + 1 \cdot 87 \geq 468,$$

откъдето $21x \geq 177$, т.е. $x \geq 9$. От друга страна,

$$|\widetilde{\mathcal{K}}| \leq 14 \cdot 3 + x \cdot 3 + (15 - x) \cdot 8 + 13 = 13,$$

откъдето $|\widetilde{\mathcal{K}}| \leq 188 - 5x$. Оттук следва, че $188 - 5x \geq 163$, т.е. $x \leq 5$, противоречие.

(D2) Да означим с $x$ броя на 4-правите $L$, за които $\widetilde{\mathcal{K}}(\widetilde{L}) = 3$; с $u$ – броя на 3-правите $L$, за които $\widetilde{\mathcal{K}}(\widetilde{L}) = 3$ и с $v$ – броя на 3-правите $L$, за които $\widetilde{\mathcal{K}}(\widetilde{L}) = 8$. Преброявайки отново приносите към лявата страна на (4.11), имаме

$$15 \cdot 3 + x \cdot 28 + (12 - x) \cdot 7 + u \cdot 36 + v \cdot 32 + (3 - u - v) \cdot 12 + 1 \cdot 87 \geq 468,$$

откъдето $21x + 24u + 20v \geq 216$. От друга страна,

$$|\widetilde{\mathcal{K}}| = 15 \cdot 3 + 3x + 8 \cdot (12 - x) + 3u + 8v + (3 - u - v) \cdot 13 + 13 \geq 163,$$

$x + 2u + v \leq 6$. Сега получаваме

$$126 \geq 21x + 42u + 21v \geq 21x + 24u + 20v \geq 216,$$

противоречие.

(D3) Нека $x$, $u$ и $v$ са дефинирани по същия начин както в случая (D2). Освен това да означим с $s$ броя на 2-правите $L$, за които $\widetilde{\mathcal{K}}(\widetilde{L}) = 3$, а с $t$ – броя на 2-правите $L$, за които $\widetilde{\mathcal{K}}(\widetilde{L}) = 8$. Отново имаме:

$$18 \cdot 3 + x \cdot 28 + (6 - x) \cdot 7 + u \cdot 36 + v \cdot 32 + (4 - u - v) \cdot 12 + s \cdot 45 + t \cdot 57 + (3 - s - t) \cdot 37 \geq 468,$$

откъдето $21x + 24u + 20v + 8s + 20t \geq 213$. От друга страна

$$|\widetilde{\mathcal{K}}| = 18 \cdot 3 + 3x + 8(6 - x) + 3u + 8v + 13(4 - u - v) + 3s + 8t + 13(3 - s - t) \geq 163,$$

и следователно $x + 2u + v + 2s + t \leq 4$. Оттук получаваме

$$84 \geq 21x + 42u + 21v + 42s + 21t \geq 21x + 24u + 21v + 42s + 21t \geq 213,$$

противоречие. $\square$

**Следствие 4.37.** *Не съществуват линейни кодове с параметри* $[104, 4, 82]_5$. *Следователно,* $n_5(4, 82) = 105$.

# Глава 5

# Афинни блокиращи множества

Настоящата глава е посветена на конструкции на блокиращи множества в афинните геометрии $\mathrm{AG}(n,q)$. Задачата за построяване на множества от точки с определени свойства може да бъде поставена както за проективните геометрии $\mathrm{PG}(n,q)$, така и за афинните геометрии $\mathrm{AG}(n,q)$. Въпросът за определяне множествата с минимален брой точки в $\mathrm{PG}(n,q)$, които блокират всички подпространства с размерност $r$ има прост отговор: това са всички подпространства с размерност $n-r$. Така за блокиране на правите в проективната равнина $\mathrm{PG}(2,q)$ са достатъчни $q+1$ точки, стига те да са колинеарни. Същият въпрос, поставен за афинната равнина, е значително по-труден. Ясно е, че множеството от точките на една права $L$ оставя $q-1$ неблокирани прави – тези в класа успоредни прави, съдържащ $L$. Те могат да бъдат блокирани с $q$ допълнителни точки – примерно точките на две пресичащи се прави е блокиращо множество в $\mathrm{AG}(2,q)$, с което минималната мощност на блокиращо множество в $\mathrm{AG}(2,q)$ не надхвърля $2q-1$. Доказателство, че това е наистина минималната мощност на афинно блокиращо множество е нетривиално [117, 31].

В тази глава ще изследваме задачата за намиране на минималната мощност на афинно блокиращо множество по отношение на хиперравнините. Тази задача има връзка с теория на кодирането: афинните блокиращи множества позволяват да съдим за наличието на думи с голямо тегло (близко да дължината на кода) в линейни кодове над крайни полета. Най-общо, в сила е следната теорема, която е директно следствие от Теорема 2.28.

**Теорема 5.1.** *Ако $n \geq 2$ е цяло число, а $q = p^h$ е степен на просто число, то съществуването на следните обекти е еквивалентно:*

(1) *афинно $(N, t)$-блокиращо множество в $\mathrm{AG}(n, q)$;*

(2) *$(q^n - N, q^{n-1} - t)$-арка в $\mathrm{PG}(n, q)$ с празна хиперравнина;*

(3) *линеен $[q^n - N, n + 1, q^n - q^{n-1} - N + t]_q$-код, имащ дума с максимално тегло $q^n - N$.*

Настоящата глава е структурирана по следния начин. В раздел 5.1 е направен кратък обзор на съществуващите долни граници за мощността на афинни блокиращи множества. Представени са границите на Bruen, Ball–Blokhuis и Ball. В раздел 5.2 са описани няколко общи конструкции на афинни блокиращи множества. В тях е налице известна свобода при избора на необходимите конфигурации от точки. В раздел 5.3 представяме някои конкретни следствия от общите конструкции от раздел 5.2, получени за специално подбрани арки и блокиращи множества. Построен е нов безкраен клас от блокиращи множества в $\mathrm{PG}(n, q)$, включващ като първи член хиперболичната квадрика в $\mathrm{PG}(3, q)$. Построени са първите примери на блокиращи множества, достигащи границата на Ball. В раздел 5.4 са представени таблици, съдържащи долни и горни граници за мощността на блокиращи множества в афинни геометрии с малка размерност над полета от малък ред.

## 5.1 Долни граници

Нека $\Sigma = \mathrm{AG}(n, q)$, където $n \geq 2$, а $q = p^h$ е степен на просто число. Да припомним, че множеството от точки $\mathcal{B}$ в $\mathrm{AG}(n, q)$ е $t$-кратно блокиращо множество (или просто $t$-блокиращо множество) по отношение на хиперравнините, ако всяка хиперравнина в $\mathrm{AG}(n, q)$ съдържа поне $t$ точки от $\mathcal{B}$. Едно $t$-кратно блокиращо множество в $\mathrm{AG}(n, q)$ с мощност $N$ наричаме афинно $(N, t)$-*блокиращо множество*. Афинни $t$-блокиращи множества с минимална мощност наричаме *оптимални*[1].

[1]Понятието минимално блокиращо множество запазваме за блокиращи множества, които са минимални по включване.

Първите резултати за афинни блокиращи множества са получени независимо от Jamison [117] и Brouwer и Schrijver [31]. Те доказват, че за 1-блокиращо множество $\mathcal{B}$ в $\mathrm{AG}(n,q)$ е в сила долната граница

$$|\mathcal{B}| \geq n(q-1)+1. \tag{5.1}$$

Тази граница е точна за всички размерности $n$. Класически пример за оптимално 1-блокиращо множество е обединението на точките на $n$ конкурентни независими прави в $\mathrm{AG}(n,q)$. [2] Първото значително обобщение на тази граница е направено от Bruen в [32]. Той доказва, че ако $\mathcal{B}$ е $t$-кратно блокиращо множество в $\mathrm{AG}(n,q)$, то

$$|\mathcal{B}| \geq (n+t-1)(q-1)+1. \tag{5.2}$$

По-нататък границата (5.2) ще наричаме *граница на* Bruen. Тази граница е нетривиална за стойности на $t$, удовлетворяващи $1 \leq t \leq (n-1)(q-1)$. За $t > (n-1)(q-1)$ границата на Bruen е по-лоша от тривиалната граница

$$|\mathcal{B}| \geq tq.$$

Последната се получава като преброим точките върху $q$ успоредни хиперравнини.

За стойности на $t$, удовлетворяващи

$$t > \frac{(n-1)(q-1)+1}{2}$$

не съществуват $t$-блокиращи множества, лежащи на границата на Bruen. Това бе доказано от C. Zanella в [200]. Отново Zanella в [200] и независимо от него S. Ball в [2] забелязват, че хиперболичната квадрика в $\mathrm{AG}(3,q)$ е $(q^2, q-1)$-блокиращо множество, лежащо на границата на Bruen за $n=3$, $t=q-1$.

Границата на Bruen е подобрена за някои специални стойности на $t, n$ и $q$. Първото подобрение се съдържа в следната теорема на S. Ball [2].

[2] Лесно се забелязва, че този пример не е единствен. Можем да построим блокиращи множества, достигащи границата на Jamison и по индукция: в произволна хиперравнина $H$ на $\mathrm{AG}(n-1,q)$ избираме $(n-1)(q-1)+1$ точки, образуващи 1-блокиращо множество, и след това по една точка във всяка хиперравнина, успоредна на $H$.

**Теорема 5.2.** *[2] Нека $t < q$ е цяло число. Едно $t$-кратно блокиращо множество по отношение на хиперравнините в $\mathrm{AG}(n,q)$ има поне $(n+t-1)(q-1)+k$ точки, ако съществува такова цяло $j$, $k-1 \le j < t$, за което е изпълнено $\binom{k-n-t}{j} \not\equiv 0 \pmod{p}$.*

Полагайки $k = t$, $j = t-1$ в тази теорема получаваме следното неравенство, което е по-удобно за използване.

**Следствие 5.3.** *Нека $\mathcal{B}$ е $t$-блокиращо множество в $\mathrm{AG}(n,q)$ по отношение на хиперравнините и нека $\binom{-n}{t-1} \not\equiv 0 \pmod{p}$. Тогава*

$$|\mathcal{B}| \ge (n+t-1)q - n + 1.$$

В [2] Ball предстви и конструкция на оптимални $((n+1)q-n+\varepsilon, 2)$-блокиращи множества в $\mathrm{AG}(n,q)$, където

$$\varepsilon = \begin{cases} 1, & \text{ако } n \not\equiv 0 \pmod{p}, \\ 0, & \text{ако } n \equiv 0 \pmod{p}. \end{cases}$$

Тези блокиращи множества са оптимални, а в случаите, когато $\varepsilon = 0$, то мощността им дори достига границата на Bruen.

Така до неотдавна известните примери на блокиращи множества, достигащи границата на Bruen, бяха следните:

(1) $t = 1$, за всички $n$ и всички $q$;

(2) $t = 2$, за всички $n \equiv 0 \pmod{q}$ и всички $q$;

(3) $t = q-1$, $n = 3$ за всички $q$.

По-нататъшно подобрение на границата на Bruen е направено от Ball и Blokhuis в [8] и от Ball в [4]. Резултатите в тези статии са по-общи и дават необходими условия за съществуването на думи с голямо тегло в един линеен код. Преведени на геометричен език те представляват необходими условия за съществуване на хиперравнини с малък брой точки, в частен случай за съществуване на празни хиперравнини. Теоремите на Ball-Blokhuis [8] и Ball [4] не дават експлицитни граници, но за почти всички параметри подобряват значително границата на Bruen. Те са особено полезни за стойности на $t$, които са по-големи от $q$.

**Теорема 5.4.** *[8] Нека $q = p^h$, където $p$ е просто число. Ако съществува $(N, t)$-блокиращо множество в $\mathrm{AG}(n, q)$, то за всички цели числа $\varepsilon \geq 1$ коефициентът пред $X^{N-tq+\varepsilon}$ във формалния степенен ред*

$$(X-1)^{N-q^n}(X^p-1)^{\frac{(q^{n-1}-t)q}{p}}$$

*се дели на $q^n$.*

**Теорема 5.5.** *[4] Нека $q = p^h$, където $p$ е просто число. Ако съществува $(N, t)$-блокиращо множество в $\mathrm{AG}(n, q)$, за което*

$$N = (t+n+1-e)q - n - 1 - \varepsilon,$$

*където $e \in \{1, \ldots, t-1\}$, а $\varepsilon \geq 1$ е цяло число, то*

$$\sum_{j=0}^{n-1}(-1)^j\binom{-t+e-1}{j}\binom{N}{(t-e+1)q-\varepsilon+j(q-1)} \equiv 0 \pmod{p^e}.$$

## 5.2 Обща конструкция

В този раздел ще опишем една обща конструкция, даваща афинни блокиращи множества, които са оптимални или близки до оптималните. Основна идея в тях е комбинирането на подходящо избрани подпространства (прави) в геометрията $\mathrm{AG}(n, q)$. Както отбелязахме в началото на тази глава, в проективните геометрии $\mathrm{PG}(n, q)$ подпространствата с размерност $n-r$ са блокиращи множества за подпространствата с размерност $r$. Този факт лесно следва от формулата за размерностите (2.1). В афинния случай това вече не е вярно, но използвайки подпространства за конструиране на блокиращи множества, можем да контролираме донякъде блокирането на хиперравнини. Всички известни блокиращи множества, които са оптимални или близки до оптималните, се плучават като комбинация на подпространства с малка размерност. Така за всички известни параметри, за които съществуват блокиращи множества, лежащи границата на Bruen, могат да бъдат конструирани примери, които са обединения на прави.[3]

[3]Съществуват и примери, които не са суми на прави. Така при $t = 1$ имаме доста голяма свобода за избор на точки.

**Теорема 5.6.** *Нека* $n \geq 3$ *е цяло число и нека* $q = p^h$ *е степен на просто число. Ако съществуват*

- *арка с параметри* $(M, w)$ *в* $\mathrm{PG}(r, q)$*, където* $2 \leq r \leq n-2$*, и*
- *блокиращо множество с параметри* $(M', u)$ *в афинната геометрия* $\mathrm{AG}(n-r-1, q)$*,*

*то съществува* $(N, t)$*-блокиращо множество в* $\mathrm{AG}(n, q)$ *с параметри*

$$N = qM, \ \ t = \min\{M - w, aqu\},$$

*където* $a = \lfloor M/M' \rfloor$*.*

*Доказателство.* Фиксираме подпространство $S$ с размерност $r$ в геометрията $\Sigma = \mathrm{PG}(n, q)$; ясно е, че $S \cong \mathrm{PG}(r, q)$. След това избираме и допълнително подпространство на $S$ в $\Sigma$, което означаваме с $T$, т.е. $\dim T = n - r - 1$ и $T$ няма общи точки с $S$. Да фиксираме хиперравнина $H$ в $\Sigma$, която съдържа $S$. Ясно е, че подпространството $T \cap H$ е допълнителното подпространство на $S$ в $H$ и тъй като $T \cap H$ е хиперравнина в $T$, то

$$T \setminus (T \cap H) \cong \mathrm{AG}(n - r - 1, q).$$

Нека $\mathcal{K}$ е $(M, w)$-арка, всички точки на която са в $S$, а $\mathcal{L}$ е $(M', u)$-афинно блокиращо множество, съдържащо се в $T \setminus (T \cap H)$. Нека точките $P_i$, $i = 1, \ldots, M$, са всички точки на $\mathcal{K}$, а $Q_j$, $j = 1, \ldots, M'$, са всички точки на $\mathcal{L}$. Нека $S_j$ са подпространствата, породени от $S$ и точките $Q_j$: $S_j = \langle S, Q_j \rangle$, $j = 1, \ldots, M'$. Ясно е, че размерността на всяко от тях е $\dim S_j = r + 1$. Освен това от формулата за размерностите имаме $\dim(S_j \cap T) = 0$, откъдето $S_j \cap T = \{Q_j\}$. Да разбием по произволен начин точките на арката $\mathcal{K}$ на $M'$ подмножества $C_i$ $i = 1, \ldots, M'$, всяко от които е с мощност $a$ или $a + 1$, където $a = \lfloor M/M' \rfloor$.

Конструираме множество от точки $\mathcal{B}$ по следния начин. През всяка от точките $P_i$, $i = 1, \ldots, M$, избираме права $L_i$ в $\Sigma$. За тези прави са изпълнени условията:

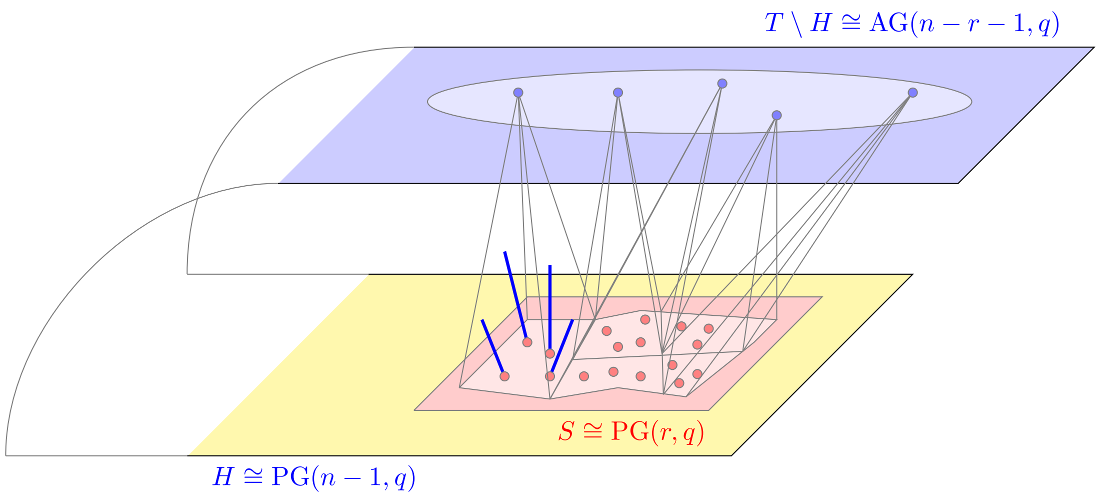
- ако $P_i \in C_j$, то правата $L_i$ се съдъжа в подпространството $S_j$, но не лежи изцяло в $S$ (т.е. $L_i \cap S = P_i$);
- за всеки индекс $j \in 1, \ldots, M'$ и за всеки два индекса $i_1, i_2$ с $P_{i_1}, P_{i_2} \in C_j$, правите $L_{i_1}$ и $L_{i_2}$ са кръстосани, $L_{i_1} \cap L_{i_2} = \varnothing$.

Дефинираме множеството $\mathcal{B}$ като обединение на множествата от всички точки, инцидентни с някоя от правите $L_i$, но лежащи извън $H$:

$$\mathcal{B} = \bigcup_{i=1}^{M}(L_i \setminus P_i). \tag{5.3}$$

Ясно е, че точките от $\mathcal{B}$ се съдържат в афинното пространство $\Sigma \setminus H \cong \mathrm{AG}(n,q)$. Сега ще докажем, че така дефинираното множество $\mathcal{B}$ е афинно $(N,t)$-блокиращо множество с желаните параметри, а именно $N = qM$, $t = \min\{M-w, aqu\}$.

Описаната конструкция е илюстрирана на фигурата по-долу.




Да започнем с това, че правите $L_i$ са кръстосани: ако две от тези прави съдържат точки $P_{i_1}$ и $P_{i_2}$ от един и същ клас $C_j$, то $L_{i_1}$ и $L_{i_2}$ са кръстосани по дефиниция; ако $P_{i_1}$ и $P_{i_2}$ са от различни класове, да кажем $C_{j_1}$ и $C_{j_2}$, то тъй като $S_{j_1} \cap S_{j_2} = S$, то правите $L_{i_1}$ и $L_{i_2}$ могат да се пресичат само в точка от $S$. Това е невъзможно, тъй като тогава всяка от тях би имала две точки от $S$ (общата им точка и $P_{i_1}$, съответно $P_{i_2}$) и би се съдържала в $S$, което е противоречие с конструкцията. Следователно имаме

$$|\mathcal{B}| = |\bigcup_{i=1}^{M}(L_i \setminus P_i)| = \sum_{i=1}^{M}|L_i \setminus P_i| = qM.$$

Нека $H'$ е произволна хиперравнина в $\Sigma$, различна от $H$. Тогава $H' \setminus (H' \cap H)$ е хиперравнина в афинното пространство $\Sigma \setminus H \cong \mathrm{AG}(n, q)$. Тъй като по конструкция множеството $\mathcal{B}$ не съдържа точки от $H$, то имаме

$$|\mathcal{B} \cap H'| = |\mathcal{B} \cap (H' \setminus H)|.$$

Следователно кратността на хиперравнината $H' \setminus (H' \cap H)$ в афинното пространство $\Sigma \setminus H$ е равна на кратността на хиперравнината $H'$ в $\Sigma$.

За хиперравнините $H'$ в $\Sigma$ има две възможности – те или съдържат $S$ или пресичат $S$ в $(r-1)$-мерно подпространство на $\Sigma$. Ще разгледаме всеки от тези два случая.

(1) Нека $H'$ съдържа подпространството $S$. Да разгледаме проекция $\varphi$ от $S$ в $T$:

$$\varphi : \begin{cases} \Sigma \setminus S & \rightarrow & T \\ P & \rightarrow & \langle S, P \rangle \cap T \end{cases}.$$

При тази проекция подпространствата $U$, съдържащи $S$ се изобразяват в подпространства на $T$. За размерността на образа на $U$ при $\varphi$ имаме $\dim \varphi(U \setminus S) = \dim U - \dim S - 1$. Оттук следва, че $H'$ се изобразява в хиперравнина $\varphi(H' \setminus S)$ на $T$. Тъй като $\mathcal{L}$ е блокиращо множество в $T \setminus (H' \cap H) \cong \mathrm{AG}(n-r-1, q)$ с параметри $(M', u)$, имаме $|\mathcal{L} \cap \varphi(H' \setminus S)| \geq u$. Това означава, че в хиперравнината $H' \setminus S$ на $T = \varphi(H)$ има $u$ на брой точки, да кажем $Q_{i_1}, \ldots, Q_{i_u}$ от $\mathcal{L}$. Тогава правите $L_j$, където $P_j \in C_{i_1} \cup \ldots \cup C_{i_u}$, ще се съдържат в $H'$. Тъй като правите $L_j$ са кръстосани и всяко подмножество $C_i$ съдържа поне $a$ точки от арката $\mathcal{K}$ в $S$, получаваме

$$|\mathcal{B} \cap H'| = |\mathcal{B} \cap (H' \setminus H)| \geq aqu.$$

(2) Нека сега $H'$ не съдържа $S$. Тогава $H'$ пресича $S$ в подпространство с размерност $r-1$, т.е. сечението $H' \cap S$ е хиперравнина в $S$. Понеже $S$ съдъжа по условие $(M, w)$-арката $\mathcal{K}$, то $H' \cap S$ пресича $\mathcal{K}$ в най-много $w$ точки. Нека $H' \cap S$ съдържа точно $u \leq w$ точки от $\mathcal{K}$, да кажем $P_{i_1}, \ldots, P_{i_u}$. Тогава хиперравнината $H'$ пресича всяка от правите $L_i$, за които $i \neq i_1, \ldots, i_u$ в точки извън $S$, а следователно и извън хиперравнината $H$. От това, че броят на всички прави $L_i$ е $M$, то $H'$ трябва да съдържа поне $M - w$ точки от $\mathcal{B}$.

Сега от разгледаните възможности (1) и (2) получаваме, че всяка хиперравнина в $\Sigma \setminus H$ е блокирана поне $\min\{M - w, aqu\}$ пъти, с което доказателството е завършено. $\square$

Описаната в Теорема 5.6 конструкция е доста обща, което ни дава свободата да избираме както произволни размерности за подпространството $S$, така и произволни арки и блокиращи множества съответно в $S$ и $T \setminus (T \cap H)$, като предварително не е ясно кой избор ще даде най-добри блокиращи множества. Един важен частен случай се получава, когато арката $\mathcal{K}$ и блокиращото множество $\mathcal{L}$ имат една и съща мощност.

**Следствие 5.7.** *Нека $n \geq 3$ е цяло число и нека $q = p^h$ е степен на просто число. Ако съществуват*

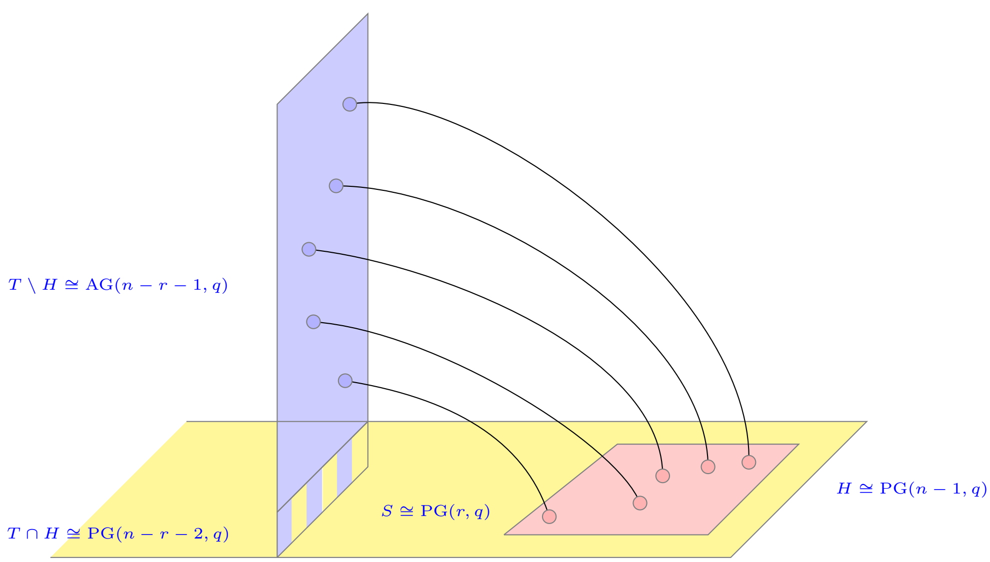
- $(M, w)$*-арка в* $\mathrm{PG}(r, q)$, $1 \leq r \leq n-2$, *и*
- $(M, u)$*-блокиращо множество в* $\mathrm{AG}(n-r-1, q)$,

*то съществува и $(N, t)$-блокиращо множество в $\mathrm{AG}(n, q)$ с параметри $N = qM$ и $t = \min\{M - w, qu\}$.*

*Доказателство.* Нека $\mathcal{K} = \{P_1, \ldots, P_M\}$ е $(M, w)$-арка в $\mathrm{PG}(r, q)$, $1 \leq r \leq n-2$, и $\mathcal{L} = \{Q_1, \ldots, Q_M\}$ е блокиращо множество в $\mathrm{AG}(n-r-1, q)$. Тогава в конструкцията от Теорема 5.6 можем да вземем $L_i = \langle P_i, Q_i \rangle$ и

$$\mathcal{B} = \cup_{I=1}^{M} (L_i \setminus \{P_i\}).$$

Полученото блокиращо множество е илюстрирано на фигурата по-долу. $\square$



Друг интересен случай се получава, когато подпространството $S$ е с коразмерност 2. Тогава $T \setminus H$ е афинна права, в която изборът на блокиращо множество е еднозначен. Така параметрите на блокиращото множество $\mathcal{B}$ зависят само от избора на арката в $S$.

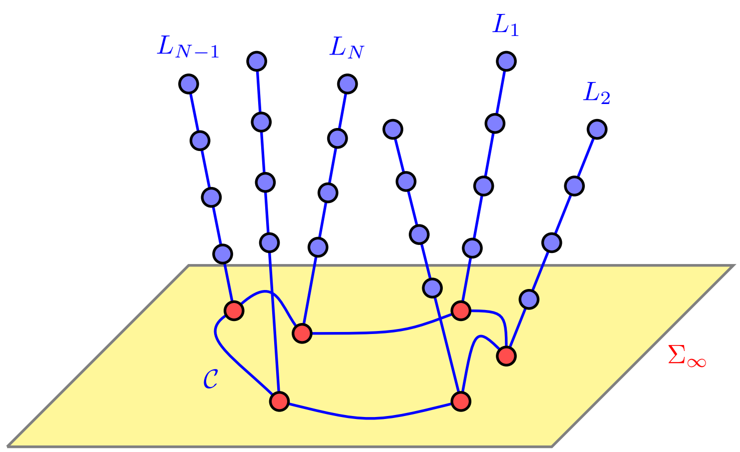
**Следствие 5.8.** *Нека $n \geq 4$ е цяло число и нека $q = p^h$ е степен на просто число. Ако съществува арка с параметри $(M, w)$ в $\mathrm{PG}(n-2, q)$, то съществува и $(N, t)$-блокиращо множество в $\mathrm{AG}(n, q)$ с параметри*

$$N = qM, \ t = \min\{M - w, q\lfloor M/q \rfloor\}.$$

*Доказателство.* Достатъчно е в Теорема 5.6 да положим $\dim S = n - 2$, $\dim T = 1$, а за $\mathcal{L}$ да изберем тривиалното $(q, 1)$-блокиращо множество, състоящо се от всички точки на афинната права $T \setminus (T \cap H)$. □

Модификация на Теорема 5.6 работи и в случая, когато $r = n - 1$, т.е. когато самото подпространство $S$ е хиперравнина. В този случай подпространството $T$ е просто точка извън $S$ и $T \setminus (T \cap H) = T$. Сега правите $L_i$ са непресичащи се прави в $\mathrm{PG}(n, q)$ през точките на арката $\mathcal{K}$ в $S$. Ако $\mathcal{K}$ не е твърде голяма, което винаги е изпълнено в интересните случаи, то винаги можем да изберем необходимия брой кръстосани прави. Този избор се гарантира от наличието на пълни спредове при нечетна размерност на $\Sigma$ или от достатъчно големи частични спредове при четна размерност (вж. [17, 106]). Следователно е в сила

**Следствие 5.9.** *Нека $n \geq 3$ е цяло число и нека $q = p^h$ е степен на просто число. Ако съществува $(M, w)$-арка в $\mathrm{PG}(n-1, q)$, то съществува и $(qM, M-w)$-блокиращо множество в $\mathrm{AG}(n, q)$.* □



Като изтриваме точки от някое блокиращо множество, конструирано в Теорема 5.6, получаваме блокиращи множества, чиито параметри все още лежат близо до съществуващите долни граници. Това формулираме като отделно следствие.

**Следствие 5.10.** *Нека $n \geq 3$ е цяло число и нека $q = p^h$ е степен на просто число. Ако съществуват*

- *$(M, w)$-арка в $\mathrm{PG}(r, q)$, където $1 \leq r \leq n-2$, и*
- *$(M', u)$-блокиращо множество в $\mathrm{AG}(n-r-1, q)$,*

*то за всяко $i \geq 1$ и всички $\alpha \in \{1, \ldots, q-1\}$ съществува $(N, t)$-блокиращо множество в $\mathrm{AG}(n, q)$ с параметри*

$$N = qM - i\alpha, \;\; t = \min\{M - w - i, aqu - b\alpha\},$$

*където $a = \lfloor M/M' \rfloor$ и $b = \lfloor i/M' \rfloor$.*

*Доказателство.* Използваме означенията от Теорема 5.6. Да фиксираме $i$ от точките $P_j$, да кажем $P_{j_1}, \ldots, P_{j_i}$, по такъв начин, че всеки от класовете $C_k$ да съдържа най-много $b$ от точките $P_{j_s}$. Сега да изтрием по $\alpha$ точки от всяка от правите $L_{j_1}, \ldots, L_{j_s}$. Полученото афинно блокиращо множество има желаните параметри. □

*Забележка* 5.11. Важно е да отбележим, че в $S$ можем да изберем и непроективна арка $\mathcal{K}$. В този случай, ако кратността на точка $P$ от $S$ е да кажем $\mathcal{K}(P) = c$, то е достатъчно да изберем в множеството $\mathcal{B}$ точките на $c$ прави през $P$. При образуването на множествата от точки $C_k$ трябва да осигурим наличието на $c$ копия на точката $P$. Те могат да се намират в един и същ или различни класове $C_k$. Във всички случаи трябва да осигурим избраните прави през $P$ да са кръстосани на останалите избрани прави в съответното подпространство $S_j$. В разглежданите от нас случаи $\mathcal{K}$ е с относително малка мощност и такъв избор е възможен.

## 5.3 Оптимални афинни блокиращи множества

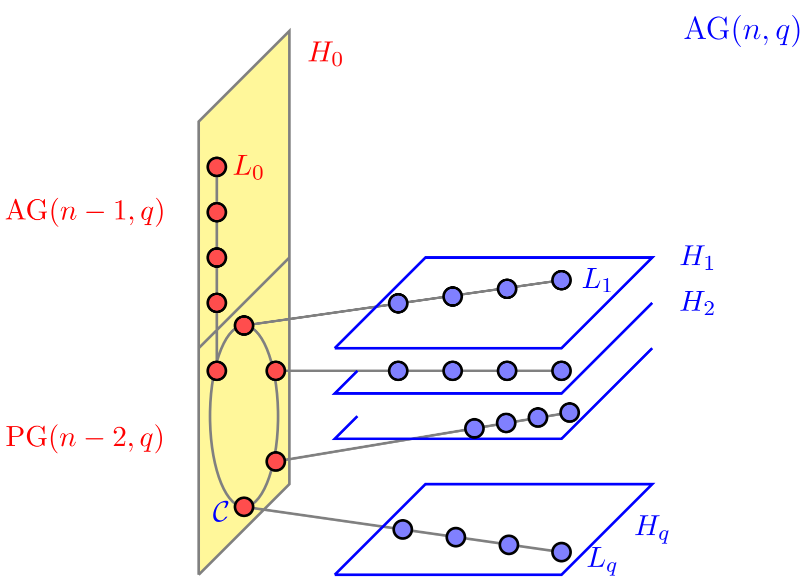
В този раздел ще опишем някои специални приложения на общата конструкция от Теорема 5.6, които водят до добри блокиращи множества.

В [2] Ball доказа, че в случая, когато $t + n = q + 2$, Теорема 5.2 не води до подобрение на границата на Bruen. За $n = 3$ наистина съществуват блокиращи множества, лежащи на тази граница. В този случай $t = q - 1$ и хиперболичната квадрика е пример за такова множество. Ще покажем, че блокиращи множества, лежащи на границата на Bruen съществуват за всички размерности $n \geq 3$. Конструкцията ни използва Следствие 5.7.

В подпространството $S$, което е с размерност $r = n - 2$, избираме множество $\mathcal{K}$ от $q$ точки в общо положение. Подпространството $T$ е афинна права и блокиращото множество е тривиалното $(q, 1)$-блокиращо множество. Да отбележим, че за всяка размерност $n$ можем да намерим $q$ точки в общо положение. В нашия случай дори имаме допълнителното изискване $n \leq q - 1$. Тук можем да вземем кои да е $q$ точки от нормална рационална крива, напр. точките

$$P_i = (1, \alpha_i, \ldots, \alpha_i^{n-2}, 0, 0), \alpha_i \in \mathbb{F}_q, i = 0, 1, \ldots, q - 1.$$

Конструкцията е представена на фигурата по-долу.




С това доказахме следната теорема.

**Теорема 5.12.** *За всяко $n$, за което $3 \leq n \leq q - 1$, в геометрията* AG$(n, q)$ *съществува блокиращо множество с параметри* $(q^2, q - n + 2)$. $\square$

Лесно се проверява, че това блокиращо множество лежи на границата на Bruen, която в този слчай е

$$|\mathcal{B}| \geq (t+n-1)(q-1)+1 = (q+1)(q-1)+1 = q^2.$$

Към настоящия момент е известно, че границата на Bruen се достига в следните случаи:

($i$) за $t = 1$ за всички размерности $n$ и за всички полета $\mathbb{F}_q$;

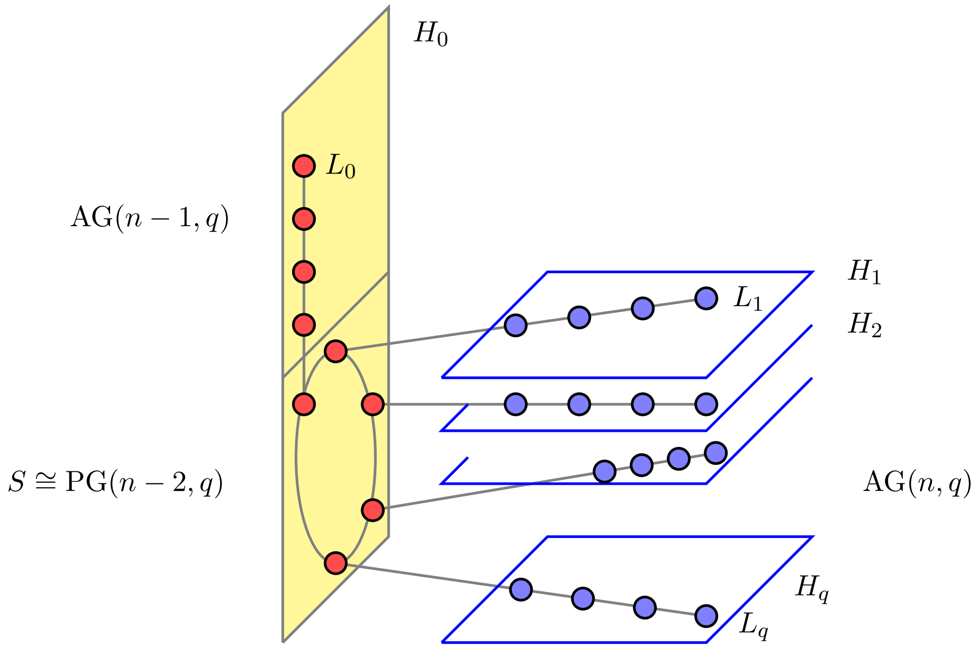
($ii$) за $t = 2$ за всички размерности $n \equiv 0 \pmod p$, където $p = \operatorname{char} \mathbb{F}_q$;

($iii$) за $t = q - n + 2$ за всички размерности $3 \leq n \leq q - 1$ и всички полета $\mathbb{F}_q$.

Блокиращите множества от Теорема 5.12 могат да бъдат използвани за получаване и на други блокиращи множества, които са оптимални или близки до оптималните.

**Теорема 5.13.** *За всяко* $s = 0, 1, \ldots, q + 1 - n$ *в* $\mathrm{AG}(n, q)$, $3 \leq n \leq q - 1$, *съществува блокиращо множество с параметри* $(q^2 - s(n - 2 + s), q - (n - 2 + s))$.

*Доказателство.* Нека $\mathcal{B}$ е блокиращо множество с параметри $(q^2, q-n+2)$ в $\mathrm{AG}(n, q)$, построено в горната теорема. То съдържа точките на $q$ кръстосани прави $L_1, \ldots, L_q$, пресичащи някое подпространство с коразмерност 2, съдържащо се в безкрайната хиперравнина $H_0$, в точките на $q$-арка. Построяваме ново блокиращо множество $\mathcal{B}'$, изтривайки $n - 2 + s$ точки от всяка от правите $L_1, \ldots, L_s$. Сега лесно се проверява, че полученото блокиращо множество е с желаните параметри. Наистина, хиперравнина, съдържаща $S$, съдържа и някоя от правите $L_i$ и, следователно, е с $q$ или $q - (n - 2 + s)$ точки. Хиперравнина $H$, която не съдържа $S$ пресича поне $q-n+2$ от правите $L_i$ в точки извън безкрайната хиперравнина. Най-много $s$ от тези точки не принадлежат на $\mathcal{B}'$ и $H$ е блокирана поне $(q - n + 2) - s$ пъти. $\square$




Да отбележим, че за $s = 0$ и $s = q+1-n$, Теорема 5.13 дава блокиращи множества, лежащи на границата на Bruen. Случаят $s = 0$ съвпада с Теорема 5.12, а за $s = q + 1 - n$ получаваме блокиращо множество с параметри $(n(q-1)+1, 1)$. В случая $s = 1$ получените блокиращи множества също са оптимални. Може да се покаже, че те лежат на границата на Ball, представена в Следствие 5.3.

**Теорема 5.14.** *За всяко $n \geq 2$ и всяка степен на просто число $q = p^h$ съществува афинно блокиращо множество в $\mathrm{AG}(n,q)$ с параметри $(q^2-n+1, q-n+1)$. Блокиращите множества с тази мощност са оптимални.*

*Доказателство.* Съществуването на блокиращо множество $\mathcal{B}$ с тези параметри следва от Теорема 5.13 за $s = 1$. Оптималността се доказва с помощта на Следствие 5.3. Ще проверим, че биномният коефициент

$$\binom{-n}{t-1} = \frac{(-n)\cdot(-n-1)\dots(-q+1)}{(q-n)!}$$

не се дели на $p$. Ако означим с $\lambda_p(m)$ най-високата степен на $p$, деляща $m$, то за всяко $i = 0, \dots, q-n-1$ имаме $\lambda_p(n+i) = \lambda_p(q-n-i)$. Оттук следва, че

$$\lambda_p(\binom{-n}{t-1}) = \sum_{i=0}^{q-n-1} (\lambda_p(n+i) - \lambda_p(q-n-i)) = 0,$$

откъдето $\lambda_p(\binom{-n}{t-1}) \not\equiv 0 \pmod p$. Следователно съгласно Следствие 5.3,

$$|\mathcal{B}| \geq (n+t-1)q - n + 1 = q^2 - n + 1.$$

$\square$

Блокиращите множества, получени за $s = 2$ също са близо до долните граници и може дори да се окажат оптимални за някои размерности.

**Следствие 5.15.** *За всяка степен на просто число $q$ съществува афинно блокиращо множество в $\mathrm{AG}(n, q)$, $3 \leq n \leq q-1$, с параметри $(q^2 - 2n, q - n)$.* $\square$

За конструкцията е достатъчно да положим $s = 2$ в Теорема 5.13. Тъй като имаме

$$\lambda_p(\binom{-n}{q-n-1})\lambda_p(n),$$

то за всяка размерност $n \not\equiv 0 \pmod p$ е в сила

$$|\mathcal{B}| \geq q^2 - q - n + 1.$$

Така за стойности на $n$ близки до $q$ конструираните блокиращи множества са близки до оптималните.

От Следствие 5.8 имаме, че за $t \leq q - n + 2$ наличието на достатъчно големи арки дава $t$-блокиращи можества, които са близки до оптималните. За по-големи стойности на $t$ съществуват и други добри конструкции. Да разгледаме случая $t = q - n + 3$. Тук е необходимо да изберем $(M, w)$-арка в $\mathrm{PG}(n-1, q)$ с $M - w = q - n + 3$. Известно е, че $(q+2)$-арки в $\mathrm{PG}(n-1, q)$ не съществуват за $n \neq 3, q-1$, $q$ четно, и за всички размерности за $q$ нечетно. Така най-добрите блокиращи множества се получават от $(q+3, n)$-арки в $\mathrm{PG}(n-1, q)$ и имат параметри $(q^2 + 3q, q - n + 3)$. Конструкцията от Теорема 5.13 може да бъде модифицирана така, че да получим блокиращи множества с по-малка мощност за същото $t$. В сила е следната теорема.

**Теорема 5.16.** *Съществуват* $(q^2+2q-1, q-n+3)$*-блокиращи множества в* $\mathrm{AG}(n,q)$ *за* $3 \le n \le q-1$.

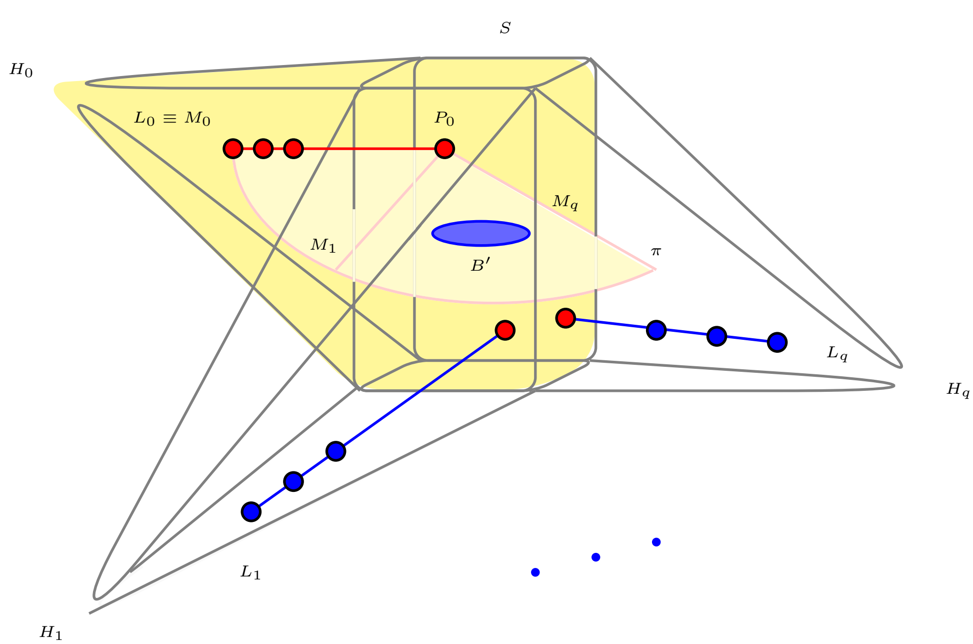
*Доказателство.* Нека $S$ е подпространство с коразмерност 2 в $\Sigma \cong \mathrm{PG}(n,q)$ и да означим с $H_0, H_1, \ldots, H_q$ хиперравнините през $S$. Фиксираме $(q+1)$-арка $\mathcal{C} = \{P_0, P_1, \ldots, P_q\}$ в $S$, както и прави $L_0, L_1, \ldots, L_q$, такива че $L_i \subseteq H_i$, $P_i \in L_i$, за всяко $i = 0, \ldots, q$.

През $L_0$ вземаме равнина $\pi$ такава, че правата $M_i$, в която $\pi$ пресича всяка от хиперравнините $H_i$, $i = 1, \ldots, q$, да няма общи точки с $L_i$. Това може да стане като първо изберем равнината $\pi$, а след това правите $L_i$, така че да са кръстосани с $M_i$. Ясно е, че $\pi \setminus L_0 \cong \mathrm{AG}(2,q)$.

Нека $\mathcal{B}'$ е $(2q-1,1)$-блокиращо множество в $\pi \setminus L_0$. Дефинираме множеството

$$\mathcal{B} = (\cup_{i=1}^{q} L_i \setminus \{P_i\}) \cup \mathcal{B}',$$

което се оказва $(q^2+2q-1, q-n+3)$-блокиращо множество в $\Sigma \setminus H_0 \cong \mathrm{AG}(n,q)$.



За да докажем това е достатъчно да се убедим, че за всяка хиперравнина $H$, различна от $H_0$ е в сила

$$|\mathcal{B} \cap H| \geq q - n + 3.$$

Ако $H$ съдържа $S$, то тя е една от $H_1, \ldots, H_q$ и съдържа поне $q$ точки – точките от правата $L_i$.

Нека $H$ не съдържа $S$. Тогава $H \cap S \cong \mathrm{PG}(n-3, q)$. Тъй като $\mathcal{C}$ е $(q+1)$-арка, $H \cap S$ съдържа най-много $n-2$ точки от $\mathcal{C}$. Ако $P_0$ е измежду тези точки, то $H$ е блокирана поне $q-(n-3)$ пъти от правите $L_1, \ldots, L_q$. Ако $P_0$ не е измежду тези точки, то в този случай $H$ или съдържа $\pi$ и е блокирана поне $2q-1$ пъти, или пресича $\pi$ в права, различна от $L_0$ (тъй като $H$ не съдържа $P_0$). Следователно $H$ отново е блокирана поне $q-n+3$ пъти: $q-(n-2)$ пъти от правите $L_1, \ldots, L_q$ и поне веднъж от $B'$. $\square$

За да изследваме, колко добра е тази конструкция, отново използваме Следствие 5.3. Сега имаме

$$\binom{-n}{t-1} = \frac{n(n+1)\ldots(q+1)}{(q-n+2)!}(-1)^{q-n},$$

откъдето

$$\begin{aligned}\lambda_p(\binom{-n}{t-1}) &= \lambda_p(q) + \lambda_p(q+1) - \lambda_p(q-n+1) - \lambda_p(q-n+2) \\ &= \lambda_p(q) - \lambda_p(q-n+1) - \lambda_p(q-n+2).\end{aligned}$$

Оттук следва, че за $n \equiv 1, 2 \pmod{q}$ можем да използваме подобрението на Ball, откъдето

$$|\mathcal{B}| \geq q^2 + 2q - n + 1.$$

Така горната конструкцията, която дава блокиращи множетва с мощност $q^2+2q-1$ е доста добра, особено за малки размерности. За размерности $n \not\equiv 1, 2 \pmod{q}$ имаме само границата на Bruen, която дава $|\mathcal{B}| \geq q^2+q-1$.

В следващите примери конструираме няколко оптимални блокиращи множества с $t=q$ над полетата с четири и осем елемента. Това са първите примери, лежащи на новата (имплицитна) граница на Ball, доказана неотдавна [4].

*Пример* 5.17. В този пример разглеждаме параметрите $n = 9$, $t = 8$, $q = 8$. От Теорема 5.5 (вж. също таблиците в [4]) получаваме, че мощността на $(N, 8)$-блокиращо множество в $\mathrm{AG}(9, 8)$ е ограничена отдолу с неравенството $N \geq 120$. Ще построим последователно няколко блокиращи множества, демонстрирайки как работи нашата конструкция от Теорема 5.6 при различен избор на размерността $r$.

Нека най-напред изберем $r = n-1 = 8$. В този случай прилагаме Следствие 5.9. В конструкцията използваме $(M, w)$-арка в $\mathrm{PG}(8, 8)$ с $M - w = 8$. Такава арка е еквивалентна на код с параметри $[M, 9, 8]_8$. Оптималната дължина на такъв код е неизвестна; съгласно таблиците на M. Grassl [69] тя е 17 или 18, което дава $(136, 8)$- или $(144, 8)$-блокиращо множество. Получените блокиращи множества са далеч от долната граница 120.

Нека сега изберем $r = n - 2 = 7$ и да използваме Следствие 5.8. За конструкцията ни е необходима $(M, w)$-арка в $\mathrm{PG}(7, 8)$ с $M - w = 8$. Ще изберем $(16, 8)$-арка, асоциирана с известния квазицикличен $[16, 8, 8]_8$-код (вж.[69]). Това дава $(128, 8)$-блокиращо множество в $\mathrm{AG}(9, 8)$, което е по-добро от построеното по-рано.

Накрая нека $r = n - 3 = 6$. За конструкцията са необходими арка в $\mathrm{PG}(6, 8)$ и блокиращо множество в $\mathrm{AG}(2, q)$. Ще вземем арка с параметри $(15, 7)$. Такава арка е асоциирана с $[15, 7, 8]_8$-кода, който се получава чрез скъсяване от споменатия по-горе квазицикличен $[16, 8, 8]_8$-код. Блокиращото множество в $\mathrm{AG}(2, q)$ е $(15, 1)$-блокиращо множество, напр. обединение на две пресичащи се прави. Сега Следствие 5.7 дава $(120, 8)$-блокиращо множество, което лежи на долната граница на Ball и следователно е оптимално. □

*Пример* 5.18. В този пример имаме $q = 4$ и $n = 4s + 1$, където $s \geq 1$ е цяло число. Ще приложим Следствие 5.7 с $r = 3s - 1$. За конструкцията е необходима арка $\mathcal{K}$ в $\mathrm{PG}(3s - 1, 4)$ и блокиращо множество $\mathcal{L}$ в $\mathrm{AG}(s + 1, 4)$. Естествен избор за блокиращо множество $\mathcal{L}$ е оптималното $(3s + 4, 1)$-блокиращо множество, лежащо на границата на Bruen. Вече отбелязахме, че блокиращи множества с $t = 1$ съществуват за всички размерности и всички $q$. За $\mathcal{K}$ искаме да изберем арка с параметри $(3s + 4, 3s)$. Такава арка е асоциирана с линеен код с параметри $[3s + 4, 3s, 4]_4$.

Известно е, че една шапка се асоциира с линеен код, имащ дуално разстояние поне 4, т.е. ако $C$ е линеен код, асоцииран с шапка, то $d(C^{\perp}) \geq 4$. Следователно, ако $\mathcal{C}_{\mathcal{K}}$ е кодът, асоцииран с $\mathcal{K}$, то ортогоналният му код $C_{\mathcal{K}}^{\perp}$ е $[3s + 4, 4]_4$-код. От своя страна $\mathcal{C}_{\mathcal{K}}^{\perp}$ се асоциира с шапка в PG$(3,4)$. Тъй като максималната мощност на шапка в PG$(3,4)$ е 17, то кодове с желаните параметри се получават само за $s = 1,2,3,4$ (вж. също таблиците на M. Grassl [69]). В тези четири случая Следствие 5.7 дава $(12s + 16, 4)$-блокиращо множество в AG$(4s + 1, 4)$.

Забележително е, че конструираните четири блокиращи множества са оптимални. Пресмятайки условията от Теорема 5.5 получаваме, че не съществува $(12s+5,4)$-блокиращо множество в AG$(4s+1,4)$ за $s = 1,2,3,4$ (долните граници за случаите $s = 1,2$ се съдържат и в Таблица 1 в края на [4]). За съжаление, блокиращо множество с горните параметри не съществува за $s = 5$. В този случай не съществува $(76,4)$-блокиращо множество, което се дължи на несъществуването на $[19,15,4]_4$-код. Вместо това ние можем да използваме $[20,15,4]_4$-код и да получим $(80,4)$-блокиращо множество, което е доста близо до долната граница 76 и дори може да се окаже оптимално. $\square$

В следващата таблица представяме най-добрите блокиращи множества, получени за $q = 4$, $t = 4,5,6,7$, и размерности $3 \le n \le 9$. Долните граници са взети от Таблица 1 в [4]. Конструкциите са обяснени в стълба “Забележки”. В случая $n = 5$, $t = 5$ използваме модификация на конструкцията от Теорема 5.6. Блокиращото множество с параметри $(8,1)$ в AG$(2,4)$, състоящо се от две пресичащи се прави плюс точка, не блокира два пъти само шест прави в AG$(2,4)$. Тези шест прави заедно с $S$ образуват шест хиперравнини в PG$(5,4)$, които са блокирани четири пъти. Оказва се, че за да блокираме всяка от тези хиперравнини пет пъти, са ни достатъчни две допълнителни точки. Например, ако изберем $(8,1)$-блокиращото множество като $\{(0,a),(b,0),(1,1),a,b \in \mathbb{F}_4\}$, то двете точки, от които се нуждаем са $(\alpha,\alpha^2)$ и $(\alpha^2,\alpha)$.

Долни и горни граници за $t$-кратни блокиращи множества в $\mathrm{AG}(n,4)$.

| $t=4$ | | | $t=5$ | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $n$ | LB-UB | Забележка | $n$ | LB-UB | Забележка |
| 3 | 21–24 | $(6,2)$ в $\mathrm{PG}(2,4)$<br>$(1,0)$ в $\mathrm{AG}(0,4)$ | 3 | 26–32 | $(8,3)$ в $\mathrm{PG}(2,4)$<br>$(1,0)$ в $\mathrm{AG}(0,4)$ |
| 4 | 22–24 | $(6,2)$ в $\mathrm{PG}(2,4)$<br>$(4,1)$ в $\mathrm{AG}(1,4)$ | 4 | 29–32 | $(8,3)$ в $\mathrm{PG}(2,4)$<br>$(4,1)$ в $\mathrm{AG}(1,4)$ |
| 5 | 28 | $(7,3)$ в $\mathrm{PG}(2,4)$<br>$(7,1)$ в $\mathrm{AG}(2,4)$ | 5 | 31–34 | $(8,3)$ в $\mathrm{PG}(2,4)$<br>$(8,1)$ в $\mathrm{AG}(2,4)$<br>плюс две точки |
| 6 | 28–32 | $(8,4)$ в $\mathrm{PG}(3,4)$<br>$(8,1)$ в $\mathrm{AG}(2,4)$ | 6 | 34–37 | $(10,4)$ в $\mathrm{PG}(3,4)$<br>$(10,2)$ в $\mathrm{AG}(2,4)$<br>С. 5.10, $i=1, \alpha=3$ |
| 7 | 31–36 | $(9,5)$ в $\mathrm{PG}(4,4)$<br>$(9,1)$ в $\mathrm{AG}(2,4)$ | 7 | 37–40 | $(10,5)$ в $\mathrm{PG}(4,4)$<br>$(10,2)$ в $\mathrm{AG}(2,4)$ |
| 8 | 34–40 | $(10,6)$ в $\mathrm{PG}(5,4)$<br>$(7,1)$ в $\mathrm{AG}(2,4)$ | 8 | 40–44 | $(11,6)$ в $\mathrm{PG}(5,4)$<br>$(10,2)$ в $\mathrm{AG}(2,4)$ |
| 9 | 40 | $(10,6)$ в $\mathrm{PG}(5,4)$<br>$(10,1)$ в $\mathrm{AG}(3,4)$ | 9 | 44–49 | $(13,7)$ в $\mathrm{PG}(5,4)$<br>$(13,2)$ в $\mathrm{AG}(3,4)$<br>С. 5.10, $i=1, \alpha=3$ |
| $t=6$ | | | $t=7$ | | |
| $n$ | LB-UB | Забележка | $n$ | LB-UB | Забележка |
| 3 | 30–36 | $(9,3)$ в $\mathrm{PG}(2,4)$<br>$(1,0)$ в $\mathrm{AG}(0,4)$ | 3 | 30-44 | $(11,4)$ в $\mathrm{PG}(2,4)$<br>$(1,0)$ в $\mathrm{AG}(0,4)$ |
| 4 | 30–36 | $(9,3)$ в $\mathrm{PG}(2,4)$<br>$(4,1)$ в $\mathrm{AG}(1,4)$ | 4 | 32-44 | $(11,4)$ в $\mathrm{PG}(2,4)$<br>$(4,1)$ в $\mathrm{AG}(1,4)$ |
| 5 | 35–40 | $(10,4)$ в $\mathrm{PG}(2,4)$<br>$(10,2)$ в $\mathrm{AG}(2,4)$ | 5 | 39-44 | $(11,4)$ в $\mathrm{PG}(2,4)$<br>$(10,2)$ в $\mathrm{AG}(2,4)$ |
| 6 | 35–40 | $(10,4)$ в $\mathrm{PG}(3,4)$<br>$(10,2)$ в $\mathrm{AG}(2,4)$ | 6 | 42-48 | $(12,5)$ в $\mathrm{PG}(3,4)$<br>$(10,2)$ в $\mathrm{AG}(2,4)$ |
| 7 | 41–44 | $(11,5)$ в $\mathrm{PG}(4,4)$<br>$(10,2)$ в $\mathrm{AG}(2,4)$ | 7 | 42-52 | $(13,6)$ в $\mathrm{PG}(4,4)$<br>$(10,2)$ в $\mathrm{AG}(2,4)$ |
| 8 | 41–48 | $(12,6)$ в $\mathrm{PG}(5,4)$<br>$(10,2)$ в $\mathrm{AG}(2,4)$ | 8 | 43-56 | $(14,7)$ в $\mathrm{PG}(4,4)$<br>$(14,2)$ в $\mathrm{AG}(3,4)$ |
| 9 | 48–56 | $(14,8)$ в $\mathrm{PG}(6,4)$<br>$(10,2)$ в $\mathrm{AG}(2,4)$ | 9 | 52-56 | $(14,7)$ в $\mathrm{PG}(5,4)$<br>$(14,2)$ в $\mathrm{AG}(3,4)$ |

## 5.4 Таблици на оптимални блокиращи множества

S. Ball доказа в [2], че за двукратни афинни блокиращи множества долната граница от Теорема 5.2 се достига и с това реши въпроса за намиране на минималната мощност на 2-блокиращо множество в $AG(n,q)$ за всички $n$ и $q$. Задачата за намиране на минималната мощност на $t$-кратно блокиращо множество в $\mathrm{AG}(n,q)$ за $t \geq 3$ е нерешена в общия случай. Ще завършим тази глава с таблица за мощностите на най-добрите известни 3-кратни и 4-кратни блокиращи множества в афинни пространства с малка размерност над малки полета. От Следствие 5.9 получаваме блокиращи множества с мощност $(n+2)q$ за трикратни (съотв. $(n+3)q$ за четирикратни) блокиращи множества. За $t = 3$ долната граница е $(n+2)q - n - 1$ или $(n+2)q - n + 1$ в зависимост от това, дали $\binom{-n}{2}$ е 0 по модул характеристиката на полето или не; аналогично, за $t = 4$ имаме долна граница $(n+3)q - n - 1$, ако $\binom{-n}{3} \equiv 0 \pmod p$ и $(n+3)q - n + 1$ в противен случай. Долните граници в таблиците са получени от (5.2) или от Теорема 5.2, докато горните граници са обяснени в полето "Бележки".

Граници за 3-кратни блокиращи множества в $\mathrm{AG}(n,q)$, $n = 3,4,5$.

| | $\mathrm{AG}(3,q)$ | | | $\mathrm{AG}(4,q)$ | | | $\mathrm{AG}(5,q)$ | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $q$ | LB | UB | Бележки | LB | UB | Бележки | LB | UB | Бележки |
| 4 | 16 | 16 | $t = q - 1$ | 19 | 23 | Т. 5.16 | 24 | 32 | С. 5.9 |
| 5 | 23 | 23 | Т. 5.14 | 25 | 25 | Т. 5.12 | 29 | 34 | Т. 5.16 |
| 7 | 33 | 35 | С. 5.9 | 39 | 41 | Т 5.13 | 45 | 45 | Т. 5.14 |
| 8 | 36 | 40 | С. 5.9 | 43 | 48 | С. 5.9 | 52 | 54 | С. 5.9 |
| 9 | 41 | 45 | С. 5.9 | 51 | 54 | С. 5.9 | 57 | 63 | С. 5.9 |
| 11 | 53 | 55 | С. 5.9 | 63 | 66 | С. 5.9 | 73 | 77 | С. 5.9 |
| 13 | 63 | 65 | С. 5.9 | 75 | 78 | С. 5.9 | 87 | 91 | С. 5.9 |

Граници за 4-кратни блокиращи множества в $\mathrm{AG}(n,q)$, $n=3,4,5$.

| | $\mathrm{AG}(3,q)$ | | | $\mathrm{AG}(4,q)$ | | | $\mathrm{AG}(5,q)$ | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $q$ | LB | UB | Бележки | LB | UB | Бележки | LB | UB | Бележки |
| 5 | 25 | 25 | $t=q-1$ | 29 | 34 | Т. 5.16 | 33 | 45 | С. 5.9 |
| 7 | 40 | 42 | С. 5.9 | 46 | 46 | Т. 5.14 | 49 | 49 | Т. 5.12 |
| 8 | 43 | 48 | С. 5.9 | 50 | 56 | Т. 5.13 | 60 | 60 | Т. 5.14 |
| 9 | 52 | 54 | С. 5.9 | 60 | 63 | С. 5.9 | 68 | 71 | Т. 5.13 |
| 11 | 64 | 66 | С. 5.9 | 74 | 77 | С. 5.9 | 84 | 88 | С. 5.9 |
| 13 | 76 | 78 | С. 5.9 | 88 | 91 | С. 5.9 | 100 | 104 | С. 5.9 |

# Литература


[1] S. Ball, Multiple blocking sets and arcs in finite planes, *J. London Math. Soc.* (2) **54**(1996), 581–593.

[2] S. Ball, On intersection sets in Desarguesian affine spaces, *European J. Comb.* **21**(2000), 441-446.

[3] S. Ball, On sets of vectors of a finite vector space in which every subset of basis size is a basis, *J. Eur. Math. Soc.* **14** (2012) 733–748.

[4] S. Ball, A p-adic condition on the weight of a codeword of a linear code, *Des. Codes Cryptogr.* **72** (2014) 177–183.

[5] S. Ball, Finite Geometry and Combinatorial Applications, Cambridge Univ. Press, 2015.

[6] S. Ball, Table of bounds on three dimensional linear codes or $(n, r)$-arcs in PG$(2, q)$, `https://mat-web.upc.edu/people/simeon.michael.ball/`

[7] S. Ball, A. Blokhuis, An easier proof of the maximal arcs conjecture, *Proc. Amer. Math. Soc.* **126** (1998) 3377–3380.

[8] S. Ball, A. Blokhuis, A bound for the maximum weight of a linear code, *SIAM J. Discrete Math.* **27** (2013) 575–583.

[9] S. Ball, A. Blokhuis, F. Mazzocca, Maximal arcs in Desarguesian planes of odd order do not exist, *Combinatorica*, **17** (1997) 31–41.

[10] S. Ball, J. De Beule, On sets of vectors of a finite vector space in which every subset of basis size is a basis II, *Des. Codes Cryptogr.* **65** (2012) 5–14.

[11] S. Ball, R. Hill, I.Landjev, H. N. Ward, On $(q^2 + q + 2, q + 2)$-arcs in the projective plane $PG(2, q)$, *Designs, Codes and Cryptography*, **24**, 2001, 205–224.

[12] A. Barlotti, Su $\{k; n\}$-archi di un piano lineare finito, *Boll. Un. Mat. Ital.* **1**(1956), 553–556.

[13] C.D.Baumert, R.J.McEliece, A Note on the Griesmer Bound, *IEEE Trans. Inf. Theory* **IT-19** (1973), 134–135.

[14] B.I. Belov, A conjecture on the Griesmer bound, In: Optimization methods and their application, Sib. Otdel. Akad. nauk SSSR, Irkutsk, 1974, 100–106.

[15] B. I. Belov, V. N. Logachev, V. P. Sandimirov, Construction of a class of linear binary codes achieving the Varshamov-Griesmer bound, *Probl. Inf. Transm.* **10**(3)(1974), 211–217.

[16] E. R. Berlekamp, R. C. McEliece, H. C. van Tilborg, On the inherent intractability of certain coding theoretic problems, *IEEE Trans. Inf. Theory* **IT-24**(1978), 384-386.

[17] A. Beutelspacher, Blocking sets and partial spreads in finite projective spaces, *Geom. Dedicata* 9(1980), 130–157.

[18] J. Bierbrauer, Y. Edel, Bounds on affine caps, *J. Combin. Designs* **10**(2002), 111-115.

[19] J. Bierbrauer, Introduction to coding theory, Discrete Mathematics and Its Applications (Boca Raton), Chapman&Hall/CRC, Boca Raton, 2005.

[20] J. Bierbrauer, Y. Edel, Large Caps in Projective Galois Spaces, in: Current Research Topics in Galois Geometry (eds. J. De Beule, L. Storme), NOVA Science Publ., 2012, 87–104.

[21] A. Blokhuis, G. E. Moorhouse, Some $p$-ranks related to orthogonal spaces, *J. Algebraic Comb.* 4(1995), 295–316.

[22] A. Bonisoli, Every equidistant linear code is a sequence of dual Hamming codes, *Ars Combinatoria* **18**(1984), 181-186.

[23] R. C. Bose, Mathematical Theory of the symmetrical factorial design, *Sankhyā* **8** (1947), 107–166.

[24] R. C. Bose, R. C. Burton, A characterization of flat spaces in a finite geometry and the uniqueness of the Hamming and the MacDonald codes, *J. Comb. Theory* **1**(1966), 96–104.

[25] I. Boukliev, New bounds for the minimum length of quaternary linear codes of dimension five, *Discrete Math.* **169**(1997), 185-192.

[26] I. Boukliev, R. Daskalov, S. Kapralov, Optimal quaternary linear codes of dimension five, *IEEE Trans. Inform. Theory* **42** (1996) 1228–1235.

[27] I. Bouyukliev, M. Grassl, Z. Varbanov, New bounds for $n_4(k, d)$ and classification of some optimal codes over GF(4), *Discrete Math.* 281(2004), 43–66.

[28] I. Boukliev, S. Kapralov, T. Maruta, M. Fukui, Optimal linear codes of dimension 4 over $\mathbb{F}_5$, *IEEE Trans. Inf. Theory*, **IT-43**(1997), 308-313.

[29] A. Brouwer, Bounds on the minimum distance of linear codes, in: "Handbook of Coding Theory" (eds. V. Pless, W. Cary Huffman), Elsevier, 1998, 295-461.

[30] A. Brouwer, M. van Eupen, The Correspondence between Projective Codes and 2-weight Codes. *Des. Codes Cryptography* 11(1997), 261-266.

[31] A. E. Brouwer, A. Schrijver, The blocking number of an affine space, *J. Combin. Th. Ser. A* **24**(1978), 251–253.

[32] A. A. Bruen, Polynomial multiplicities over finite fields and intersection sets, *J. Comb. Th. Ser. A* **60**(1992), 19–33.

[33] A.A. Bruen, R. Silverman, On the nonexistence of certain MDS-codes and projective planes, *Math. Z.* **183** (1983), 171–175.

[34] A.A. Bruen, J.A. Thas, A. Blokhuis, On MDS codes, arcs in $PG(n, q)$ with $q$ even, and a solution of three fundamental problems of B. Segre, *Inventiones Mathematicae* **92** (1988), 441–459.

[35] K.A. Bush, Orthogonal arrays of index unity, *Ann. Math. Statist.* **23**(1952), 426–434.

[36] L. Casse, A solution to Beniamino Segre's problem $I_{r,q}$ for $q$ even, *Atti Accad. Naz. Linzei Rend. Cl. Sci. Fis. Mat. Nat.* **46**(1969), 13–20.

[37] L. Casse, D.G. Glynn, The solution of Beniamino Segre's problem $I_{r,q}$, $r = 3$, $q = 2^h$, *Geom. Dedicata* **13** (1982), 157–163.

[38] L. Casse, D.G. Glynn, On the uniqueness of $(q+1)_4$-arcs in $PG(4,q)$, $q = 2^h$, $q \geq 3$, *Discrete Math.* **48** (1984), 173–186.

[39] P. V. Cechherini, J. W. P Hirschfeld, The dimension of projective geometry code, *Discrete Math.* **106**/**107**(1992), 117–126.

[40] B. Cherowitzo, Bill Cherowitzo's hyperoval page,

`//www-math.cudenver.edu/ wcherowi/research/hyperoval/hypero.html`

[41] A.Cossu, Su alcune proprietà dei $\{k, n\}$-archi di un piano proiettivo sopra un corpo finito, *Rend. Mat. e Appl.* **20**(1961), 271–277.

[42] T.M. Cover, J. A. Thomas, Elements of Information Theory, John Wiley and Sons, 1991.

[43] J. De Beule, K. Metsch, L. Storme, Characterization results on weighted minihypers and on linear codes meeting the Griesmer bound, *Adv. in Math. of Comm.* **2**(3)(2008), 261–272.

[44] P. Dembovski, Finite Geometries, Springer Verlag, Berlin-Heidelberg-New York,1968.

[45] R.H.F.Denniston, Some maximal arcs in finite projective planes, *J. Comb. Theory* Ser. A, **6**(1969), 317–319.

[46] S. Dodunekov, Optimal Codes, DSc Thesis, Institute of Mathematics, Sofia, 1985.

[47] S. Dodunekov, S. Guritman, J. Simonis, Some new results on the minimum weight of binary linear codes of dimension nine. *IEEE Trans. Inf. Theory*, **IT-45**, No. 7, 1999, 2543-2546.

[48] S. Dodunekov, T. Helleseth, N. Manev, Ø. Ytrehus, New bounds on binary linear codes of dimension eight, *IEEE Trans. Inform. Theory*, **IT-33**, No. 6, 1987, 917-919.

[49] S. Dodunekov, N. Manev, Characterization of two classes of codes meeting the Griesmer bound, *Problems of Information Transmission*, **19**, No. 4, 1983, 3-10.

[50] S. Dodunekov, N. Manev, Minimal possible block length of a binary linear code for some distances, *Problems of Information Transmission*, **20**, No. 1, 1984, 12-18.

[51] S. Dodunekov, N. Manev, An improvement of the Griesmer bound for some small minimum distances, *Discrete Appl. Math.*, **12**, No. 2, 1985, 103-114.

[52] S. Dodunekov, N. Manev, An improvement of Griesmer bound for some classes of distances, *Problems of Information Transmission*, **23**, No. 1, 1987, 47-56.

[53] S.Dodunekov, I. Landjev, On Near-MDS Codes, *Journal of Geometry*, **54**(1995), 30–43.

[54] S. Dodunekov, I. Landjev, On the Quaternary [11,6,5] and [12,6,6] Codes, Applications of Finite Fields (ed. D. Gollmann), IMA Conference Series 59, Clarendon Press, Oxford, 1996, 75–84.

[55] S. Dodunekov, I. Landjev, Near-MDS Codes over Some Small Fields, *Discrete Mathematics*, **213**(2000),55-65.

[56] S. Dodunekov, J. Simonis, Codes and projective multisets, *Electronic Journal of Combinatorics* 5(1998), no. #R37.

[57] Y. Edel, J. Bierbrauer, 41 is the largest size of a cap in $\mathrm{PG}(4,4)$, Designs, Codes and Cryptography 16(1999), 151–160.

[58] Y. Edel, S. Ferret, I. Landjev, L. Storme, The classification of the largest caps in $\mathrm{AG}(5,3)$, *J. Combin. Theory* Ser. A **99**(2002), 95–110.

[59] Y. Edel, I. Landjev, On multiple caps in finite projective spaces, *Des. Codes Cryptogr.* **56**(2010), 163–175.

[60] G. Fano, Sui postulati fondamentali della geometria proiettiva, *Giornale di Matematiche* **30**(1892), 106–132.

[61] G. Fellegara, Gli ovaloidi di uno spazio tridimensionale di Galois di ordine 8, *Atti Accad. Naz. Linzei Rend.* **32** (1962), 170–176.

[62] J. M. Goethals, P. Delsarte, On a class of majority decodable cyclic codes, *IEEE Trans. Inf. Theory* 14(1968), 182–188.

[63] E. N. Gilbert, A comparison of signaling alphabets, *Bell System Tech. J.* **31**(1952), 504–522.

[64] D.G. Glynn, Two new sequences of ovals in finite desarguesian planes of even order, in: Combinatorial mathematics X (Adelaide, 1982) Lecture Notes in Mat., vol. 1036, Springer, Berlin, 1983, 217–229.

[65] D.G. Glynn, The non-classical 10-arc in $PG(4, 9)$, *Discrete Math.* **59**(1986), 43–51.

[66] V. D. Goppa, A new class of linear error-correcting codes, *Probl. Peredach. Inform.* **6**(3)(1970), 24–30.

[67] V. D. Goppa, Rational representation of codes and $(L, g)$ codes, *Probl. Peredach. Inform.* **7**(3)(1971), 41–49.

[68] V. D. Goppa, Some codes constructed on the basis of $(L, g)$ codes, *Probl. Peredach. Inform.* **8**(2)(1972), 107–109.

[69] M. Grassl, Code Tables: Bounds on the parameters of various types of codes. `http://codetables.markus-grassl.de`

[70] P.Greenough, R.Hill, Optimal Linear Codes over GF(4), *Discrete Mathematics* **125** (1994), 187–199.

[71] J.H. Griesmer, A bound for error-correcting codes, *IBM J. Res. Develop.* 4, 1960, 532–542.

[72] P. Gronchi, I blocking sets ed il packing problem, *Bull. Un. Mat. Ital.* **7-A**(1993), 227–236.

[73] N. Hamada, The Rank of the Incidence Matrix of Points and $d$-Flats in Finite Geometries, *J. Sci. Hiroshima Univ.* Ser. A-I 32(1968), 381–396.

[74] N. Hamada, A survey of recent work on characterization of minihypers in $PG(t, q)$ and nonbinary linear codes meeting the Griesmer bound, *J. Combin. Inform. Syst. Sci.* 18(1993), 161–191.

[75] N. Hamada, A characterization of some $[n,k,d;q]$ codes meeting the Griesmer bound using a minihyper in a finite projective geometry, *Discrete Math.* **116**(1993), 229-263.

[76] N. Hamada, The nonexistence of some quaternary linear codes meeting the Griesmer bound and the bounds for $n_4(5,d)$, $1 \leq d \leq 256$, *Mathematica Japonica* 43 No 1 (1996), 7–21.

[77] N. Hamada, The nonexistence of quaternary linear codes with parameters [243,5,181], [248,5,185] and [240,5,179], *Ars Combinatoria* **45**(1997).

[78] N. Hamada, M. Deza, A characterization of $\{v_{\mu+1}+\varepsilon, v_\mu; t, q\}$–minihypers and its application to error–correcting codes and factorial design, *J. Statist. Plann. Inference* 22(1989), 323–336.

[79] N. Hamada, M. Deza, A survey of recent works with respect to a characterization of of an $[n,k,d;q]$-code meeting the Griesmer bound using a min-hyper in a finite projective geometry, *Discrete Math.* **77**(1989), 75–87.

[80] N. Hamada and T. Helleseth, A characterization of some $\{3v_2, 3v_1; t, q\}$-minihypers and some $\{2v_2+v_{\gamma+1}, 2v_1+v_\gamma; t, q\}$-minihypers ($q=3$ or 4, $2 \leq \gamma < t$) and its applications to error-correcting codes, Bull. Osaka Women's Univ. 27 (1990) 49–107.

[81] N.Hamada, T.Helleseth, A Characterization of Some Minihypers in $PG(t,q)$ and Its Applications to Error-Correcting Codes, *Lecture Notes in Mathematics* **1518**, 1992, 43–62.

[82] N. Hamada, T. Helleseth, A characterization of some $q$-ary codes ($q > (h-1)^2, h \geq 3$) meeting the Griesmer bound, *Math. Japonica* 38, 1993, 925–940.

[83] N. Hamada, T. Helleseth, Ø. Ytrehus, On the Construction of $[q^4+q^2-q, 5, q^4-q^3+q^2-2q; q]$ Codes Meeting the Griesmer Bound, *Designs, Codes and Cryptography* **2**(1992), 225–229.

[84] N. Hamada, T. Helleseth, Ø. Ytrehus, The Nonexistence of [51,5,33;3] Codes, *Ars Combinatoria* **35**(1993), 25–32.

[85] N. Hamada, T. Maekawa, A characterization of some $q$-ary codes ($q > (h-1)^2, h \geq 3$) meeting the Griesmer bound, Part 2, *Math. Japonica* 46, 1997, 241–252.

[86] N. Hamada, T. Maruta, Note on an improvement of the Griesmer bound for $q$-ary linear codes, *Serdica J. Comp.* **5**(2011), 199-206.

[87] N. Hamada, T. Maruta, A survey of recent results on optimal linear codes and minihypers, manuscript.

[88] N. Hamada, F. Tamari, Construction of optimal codes and optimal fractional factorial designs using linear programming, *Annals Disc. Math.* **6**(1980), 175–188.

[89] N.Hamada, Y. Watamori, The Nonexistence of [71,5,46;3] Codes, *J. Stat. Pl. and Inference*, **52**(1996), 379–394.

[90] N.Hamada, Y. Watamori, The nonexistence of some ternary linear codes of dimension 6 and the bounds for $n_3(6,d)$, $1 \leq d \leq 243$, *Mathematica Japonica*, 43 No 3 (1996), 577–593.

[91] U. Heim, On $t$-blocking sets in projective spaces, unpublished manuscript, 1994.

[92] W. Heise, P. Quattrocchi, Informations- und Codierungstheorie, Springer Verlag, Berlin, 3rd Edition, 1995.

[93] T. Helleseth, A characterization of codes meeting the Griesmer bound, *Information and Control* **50**(1981), 128–159.

[94] R. Hill, On the largest size of cap in $S_{5,3}$, *Atti Accad. Naz. Linzei Rend.* **54** (1973), 378–384.

[95] R. Hill, Caps and codes, *Discrete Math.* **22** (1978), 111–137.

[96] R. Hill, Some results concerning linear codes and $(k,3)$-caps in three-dimensional Galois space, *Math. Proc. Cambridge Philosophical Society* **84**(1978), 191–205.

[97] R. Hill, On Pellegrino's 20-caps, Combinatorics'81, North-Holland Mathematics Studies **78**(1983), 433-447.

[98] R. Hill, A First Course in Coding Theory, The Clarendon Press, Oxford University Press, New York, 1986.

[99] R. Hill, Optimal Linear Codes, Cryptography and Coding II (C. Mitchell ed.), Oxford Univ. Press (1992), 75–104.

[100] R. Hill, An extension theorem for linear codes, *Des. Codes and Cryptogr.* **17**(1999), 151–157.

[101] R. Hill, I. Landjev, On the nonexistence of some quaternary codes, Applications of Finite Fields (ed. D. Gollmann), IMA Conference Series 59, Clarendon Press, Oxford, 1996, 85–98.

[102] R. Hill, I. Landjev, P. Lizak, Optimal quaternary codes of dimension four and five, Proc. Int. Workshop on Algebraic and Combinatorial Coding Theory, Novgorod, 1994, 98–101.

[103] R. Hill, P. Lizak, Extensions of linear codes, in: *Proc. Int. Symp. on Inf. Theory*, Whistler, Canada, 1995, 345.

[104] R. Hill, J. R. M. Mason, On $(k, n)$-arcs and the falsity of the Lunelli-Sce conjecture, "Finite Geometries and Designs", London Math. Soc. Lecture Note Series 49, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1981, 153–168.

[105] R. Hill, H. N. Ward, A geometric approach to classifying Griesmer codes, *Designs, Codes and Cryptography* 44(2007), 169–196.

[106] J.W.P. Hirschfeld, *Projective Geometries over Finite Fields*, Oxford University Press, 2nd edition, 1998.

[107] J.W.P. Hirschfeld, Maximum sets in finite projective spaces, Surveys in combinatorics, London Math. Soc. Lecture Notes Series **82**, Comb. Univ. Press, 1983, 55–76.

[108] J.W.P. Hirschfeld, Finite projective spaces of three dimensions, Oxford Univ. Press, 1985.

[109] J. W. P. Hirschfeld, G. Korchmáros, F. Torres, Algebraic Curves over a Finite Field, Princeton University Press, Princeton, 2008.

[110] J. W. P. Hirschfeld, L. Storme, The packing problem in statistics, coding theory and finite projective spaces, in: *Finite Geometries*, Proc. of the Fourth Isle of Thorns Conference, (eds. A. Blokhuis et al.), 2001, Kluwer, 201–246.

[111] J. W. P. Hirschfeld, J. Thas, General Galois Geometries, Oxford Univ. Press, Oxford, 1991.

[112] J.W.P. Hirschfeld, J. Thas, Linear independence in finite spaces, *Geom. Dedicata* **23**(1987), 15–31.

[113] T. Honold, I. Landjev, Linear codes over finite chain rings, *Electronic Journal of Combinatorics*, **7**(1), 2000, R11.

[114] D. R. Hughes, F. C. Piper, Projective Planes, Graduate Texts in Mathematics **6**, Springer, New York, 1973.

[115] D. A. Huffman, A method for the construction of minimum redundancy codes, *Proc. IRE* **40**(1952), 1098–1101.

[116] W. C. Huffman, V. Pless, Fundamentals of Error-Correcting Codes, Cambridge University Pless, 2003.

[117] R. Jamison, Covering finite fields with cosets of subspaces, *J. Comb. Th. Ser. A* **22**(1977), 253–256.

[118] H. Kanda, The non-existence of $[383, 5, 286]$ and $[447, 5, 334]$ quaternary linear codes, *Serdica Math. J.*, 2020, to appear.

[119] A. Klein, On codes meeting the Griesmer bound, *Des. Codes Cryptogr.* **274**(2004), 289-297.

[120] A. Klein, K. Metsch, Parameters for which the Griesmer bound is not sharp, *Discrete Math.* **307**(2007), 2695–2703.

[121] I. Landjev, The geometry of $(n, 3)$-arcs in the projective plane of order 5, Proc. of the Sixth Workshop on ACCT, Sozopol, 1996, 170–175.

[122] I. Landjev, Linear codes over finite fields and finite projective geometries, *Discrete Mathematics* **213**(2000), 211-244.

[123] I. Landjev, The geometric approach to linear codes, in: Finite geometries, Proc. of the Fourth Isle of Thorns Conference, (eds. A. Blokhuis et al.), 2001, Kluwer, 247–256.

[124] I. Landjev, T. Maruta, On the minimum length of quaternary linear codes of dimension five, *Discrete Mathematics* 202(1999), 145–161.

[125] I. Landjev, T. Maruta, R. Hill, On the nonexistence of quaternary [51,4,37] codes, *Finite Fields and Their Applications* **2** (1996) 96–110.

[126] I. Landjev, A. Rousseva, On the existence of some optimal arcs in $\mathrm{PG}(4,4)$, Proc. of the 8th Int. Workshop on ACCT, Russia, Carskoe selo, 2002, 176–180.

[127] I. Landjev, A. Rousseva, An extension theorem for arcs and linear codes, *Probl. Inf. Transmission* **42**(2006), 65–76.

[128] I. Landjev, A. Rousseva, Characterization of some optimal arcs, *Adv. Math. Comm.* **5**(2)(2011), 317–331.

[129] I. Landjev, A. Rousseva, On the extendability of Griesmer arcs, *Ann. de l'Univ. de Sofia* **101**(2013/14), 183–191.

[130] I. Landjev, A. Rousseva, The Nonexistence of (104,22;3,5)-Arcs, *Advances in Mathematics of Communications* **10**(3)(2016), 601–611.

[131] I. Landjev, A. Rousseva, Linear codes close to the Griesmer bound and the related geometric structures, *Designs, Codes and Cryptography* **87**(4)(2019), 841-854.

[132] I. Landjev, L. Storme, A study of $(x(q+1), x; 2, q)$-minihypers, *Designs, Codes and Cryptography* **54**(2010), 135–147.

[133] I. Landjev, L. Storme, Linear codes and Galois geometries, chapter 8 in: "Current research topics in Galois geometries" (eds. L. Storme and J. De Beule), NOVA Publishers, 2012, 187-214.

[134] I. Landjev, P. Vandendriessche, A study of $(xv_t, xv_{t-1})$-minihypers in $\mathrm{PG}(t,q)$, *J. Comb. Theory* Ser. A **119**(2012), 1123–1131.

[135] S. Ling, C. Xing, Coding Theory, a First Course, Cambridge University Press, 2004.

[136] J. H. van Lint, Nonexistence theorems for perfect error-correcting codes, in: Computers in Algebra and Theory, Vol. IV (SIAM-AMS Proceedings), 1971.

[137] J. H. van Lint, A survey of perfect codes, *Rocky Mountain J. Math.* **5**(1975), 199–224.

[138] V.N. Logachev, An improvement of the Griesmer bound in the case of small code distances, In: Optimization methods and their application, Sib. Otdel. Akad. Nauk SSSR, Irkutsk, 1974, 107–111.

[139] L. Lunelli, M. Sce, Considerazione aritmetiche e resultati sperimentali sui $\{K, n\}_q$-archi, *Ist. Lombardo Accad. Sci.* Rend. A, **98**(1964), 3–52.

[140] F.J. MacWilliams, A theorem on the distribution of weights in a systematic code, *Bell System Tech. J.* **42**(1963), 79–94.

[141] F. J. MacWilliams, H. B. Mann, On the $p$-rank of the design matrix of a difference set, *Inform. and Control* **12**(1968), 474–489.

[142] F.J.MacWilliams, A.Odlyzko, N.J.A.Sloane, H.N.Ward, Self-dual Codes over GF(4), *J.Comb. Theory Ser.A 25*(1978), 288–318.

[143] F. J. MacWilliams, N. J. A. Sloane, The theory of error-correcting codes, North Holland, 1977.

[144] T. Maruta, On the nonexistence of Griesmer codes attaining the Griesmer bound, *Geom. Dedicata* **60**(1996) 1–7.

[145] T. Maruta, On the achievement of the Griesmer bound, *Des. Codes Cryptogr.* **12**(1997), 83–87.

[146] T. Maruta, On the minimum length of $q$-ary linear codes of dimension four, *Discrete Math.* 208/209, 1999, 427–435.

[147] T. Maruta, On the extendability of linear codes, *Finite Fields Appl.* **7**(2001), 350–354.

[148] T. Maruta, The nonexistence of some quaternary linear codes of dimension 5, *Discrete Mathematics* 238(2001), 99–113.

[149] T. Maruta, Extendability of linear codes over GF($q$) with minimum distance $d$, $\gcd(d, q) = 1$, *Discrete Math.* **266**(2003), 377–385.

[150] T. Maruta, A new extension theorem for linear codes, *Finite Fields and Appl.* **10**(2004), 674–685.

[151] T. Maruta, Extension theorems for linear codes over finite fields, *J. of Geom.* **101**(2011), 173–183.

[152] T. Maruta, `http://www.mi.s.oskafu-u.ac.jp/ maruta/griesmer.htm`

[153] T. Maruta, H. Kaneta, On the uniqueness of $(q+1)$-arcs of $PG(5,q)$, $q = 2^h, h \geq 4$, *Math. Proc. Cambridge Phil. Soc.* **110**(1991), 91–94.

[154] J.R.M. Mason, On the maximum sizes of certain $(k,n)$-arcs in finite projective geometries, *Math. Proc. Cambridge Phil. Soc.* **91**(1982), 153–169.

[155] R. Mathon, New maximal arcs in Desarguesian planes, *J. Combin. Theory*, Ser A, **97**(2002), 353–368.

[156] R. Meshulam, On subsets of finite abelean groups with no 3-term arithmetic progressions, *J. Combin. Theory* Ser. A **71**(1995), 168–172.

[157] A. C. Mukhopadhyay, Lower bounds on $m_t(r,s)$, *J. Comb. Theory* Ser. A **25**(1978), 1–13.

[158] G. Panella, Caratterizzazione delle quadriche di uno spazo (tridimensionale) linear sopra un corpo finito, *Boll. Un. Mat. Ital.* **10** (1955), 507–513.

[159] G. Pellegrino, Sul massimo ordine delle calotte in $S_{4,3}$, *Mathematiche* (Catania) **25** (1970), 1–9.

[160] T. Penttila, G.F. Royle, On hyperovals in small projective planes, *J. Geometry* **54**(1995), 91–104.

[161] A. Potechin, Maximal caps in AG$(6,3)$, *Des. Codes Cryptogr.* **46**(2008), 243–259.

[162] B. Qvist, Some remarks concerning curves of the second degree in a finite plane, *Ann. Acad. Sci. Feun.* Ser. A **134** (1952), 1–27.

[163] I.S. Reed, G. Solomon, Polynomial codes over certain fields, *J. Soc. Indust. Appl. Math.* **8**(1960), 300-304.

[164] A. Rousseva, A General construction for blocking sets in finite affine geometries, *Compt. Rend. Acad. Bulg. des Sciences* **71**(4)(2018), 460-466.

[165] A. Rousseva, On the structure of some arcs related to caps and the nonexistence of some optimal codes, *Ann. de l'Univ. de Sofia, Fac. de Math. and Inf.*, 2019, to appear.

[166] B. Segre, Sulle ovali nei piani lineari finiti, *Atti Acad. Naz. Lincei Rend.* **17**(1954), 1–2.

[167] B. Segre, Ovals in a finite projective plane, *Can. J. Math.* **7**(1955), 414–416.

[168] B. Segre, Curve rationali e $k$-archi negli spazi finiti, *Ann. Mat. Pura Appl.* **39** (1955), 357–379.

[169] B. Segre, Sui $k$-archi nei piani finiti di caratteristica due, *Rev. Mat. Pures Appl.* **2**(1957),289–300.

[170] B. Segre, Le geometrie de Galois, *Ann. Mat. Pura Appl.* **48** (1959), 1–97.

[171] B. Segre, Lectures on modern geometry, Ed. Cremonese, Roma, 1961.

[172] B. Segre, Ovali e curve $\sigma$ nei piani di galois di caratteristica due, *Atti Acad. Naz. Lincei Rend. Cl. Sci. Fis. Mat. Nat.* (8), **32**(1962), 785–790.

[173] B. Segre, U. bartocci, Ovali ed altre curve nei piani di Galois di caratteristica due, *Acta Arith.* **18**(1971), 423-449.

[174] C. Shannon, A mathematical theory of communication, *Bell Systems Technical Journal* **27**(1948), 379–423.

[175] R. C. Singleton, Maximum distance $q$-nary codes, *IEEE Trans. Inf. Theory* **10**(2)(1964, 116–118.

[176] K. J. C. Smith, On the $p$-rank of the incidence matrix of points and hyperplanes in a finite projective geometry, *J. Combin. Theory* 1(1969), 122-129.

[177] G. Solomon, J. J. Stiffler, Algebraically punctured cyclic codes, *Inf. and Control* **8**(1965), 170–179.

[178] L. Storme, J. De Beule, Current Research Topics in Galois Geometries, NOVA Science Publ., New York, 2012.

[179] L. Storme, J. Thas, M.D.S. codes and arcs in $PG(n,q)$ with $q$ even: An improvement of the bound by Bruen, Thas and Blokhuis, *J. Combin. Theory* Ser.A **62**(1993), 139–154.

[180] L. Storme, J. Thas, $k$-arcs and dual $k$-arcs, *Discrete Mathematics* **125**(1994), 357–370.

[181] L. Storme, J. A. Thas, S. K. J. Vereecke, New upper bounds on the sizes of caps in finite projective spaces, J. of Geometry 73(2002), 176–193.

[182] P. Sziklai, Polynomials in Finite Geometry, Chapman&Hall/CRC Press, 2016.

[183] G. Tallini, Calotte complete di $S_{4,4}$ contenenti due quadriche elittiche quale sezioni, *Rend. di Matematica* **23**(1964), 108–123.

[184] J. Thas, Normal rational curves and $k$-arcs in Galois spaces, *Rend. di Mat.* (Roma) Ser. VI, **1** (1968), 331–334.

[185] J. Thas, Connections between the Grasmannian $G_{k-1;n}$ and the set of $k$-arcs of the Galois space $S_{n,q}$, *Rend. di Mat.* (Roma) Ser. VI, **2** (1969), 121–133.

[186] J. Thas Construction of maximal arcs and partial geometries, *Geom. Dedicata* **3**(1974), 61–64.

[187] J. Thas, Some Results Concerning $((q+1)(n-1),n)$-arcs, *J.Combin. Theory* Ser.A **19**(1975), 228–232.

[188] J. Thas, Constructions of maximal arcs and dual ovals in translation planes, *European J. Comb* **1**(1980), 189–192.

[189] A. Tietäväinen, On the nonexistence of perfect codes over finite fields, *SIAM J. Appl. Math.* **24**(1973), 88-96.

[190] A. Tietäväinen, A short proof for the nonexistence of unknown perfect codes over GF($q$), $q > 2$, *Ann. Acad. Sci. Fenn. Sewr. A I Math.* **580**(1974), 1–6.

[191] J. Tits, Ovoides et groupes de Suzuki, *Arch. Math.* **13**(1962), 187–198.

[192] M. A. Tsfasman, S. G. Vladut, Th. Zink, Modular curves, Shimura curves, and Goppa codes, better than Varshamov-Gilbert bound, *Math. Nachr.* **109**(1982), 21–28.

[193] M. Tsfasman, S. Vladut, D. Nogin, Algebraic-geometric codes - basic notions, Math. Surveys and Monographs vol. 139, AMS, 2007.

[194] R. R. Varshamov, Estimate of the number of signals in error-correcting codes, *Dokl. Akad. Nauk SSSR* **117**(1957), 739–741.

[195] S. Vladut, D. Nogin, M. Tsfasman, Algebro-Geometric Codes, MCNMO, Independent Moscow University, 2003. (in Russian)

[196] H.N. Ward, Divisibility of codes meeting the Griesmer bound, *Journal of Combinatorial Theory*, Ser. A, **83**(1998), 79–93.

[197] V. Wei, Generalized Hamming weights for linear codes, *IEEE Trans. Inf. Th.* **IT-37**(1991), 1412-1418.

[198] B.J. Wilson, $(k, n)$-caps of a finite projective space, Combinatorics'88 **2** *Res. Lecture Notes Math.*, Rende (1991), 483–496.

[199] Y. Yoshida, T. Maruta, An extension theorem for $[n, k, d]_q$ codes with $\gcd(d, q) = 2$, *Australas. J. Combin.* **48**(2010), 117–131.

[200] C. Zanella, Intersection sets in $AG(n, q)$ and a characterization of the hyperbolic quadric in $\mathrm{PG}(3, q)$, *Discrete Math.* **255**(2002), 381–386.

[201] V. A. Zinoviev, V. K. Leontiev, The nonexistence of perfect codes over Galois fields, *Probl. Control and Inform. Theory* **2**(1973), 123-132.