Софийски университет “ СВ. КЛИМЕНТ ОХРИДСКИ“

Факултет по математика и информатика

ГЕОРГИ ИВАНОВ ГЕОРГИЕВ

НЕИНТЕГРУЕМОСТ В СМИСЪЛ НА ЛИУВИЛ НА НЯКОИ УРАВНЕНИЯ НА ПЕНЛЕВЕ ОТ ПО-ВИСОК РЕД

Д И С Е Р Т А Ц И Я

за присъждане на

образователна и научна степен „Доктор“

Област на висше образование:

4. Природни науки, математика и информатика

Професионално направление: 4.5. Математика

Научен ръководител: чл. кор. проф. дмн Емил Хорозов

Научен консултант: Огнян Христов

София, 2015 г.

Съдържание

Благодарности **4**

Въведение **5**

0.0.1 Интегруемост и неинтегруемост 5

0.0.2 Уравнения със свойство на Пенлеве. 13

0.0.3 Формулировка на основните задачи 18

1 Интегруемост и диференциална теория на Галоа **27**

1.0.4 Интегруемост на Хамилтонови системи. . . . 27

1.0.5 Неинтегруемост на линейни системи диференциални уравнения. 30

1.0.6 Линейни системи с особености. 38

1.0.7 Условия за интегруемост на хамилтонови системи с (NVE) от Ламе тип. 52

1.0.8 Самопресичащи се комплексни сепаратриси. . 54

2 Уравнения на Пенлеве от по-висок ред **66**

2.1 Доказателство на Теорема 5 68

2.1.1 Матрици на Стокс 71

2.1.2 Уравнения $\mathrm{P}_{\mathrm{II}}^{(2)}$ и $\mathrm{P}_{\mathrm{II}}^{(3)}$. 80

3 Бозе–Ферми смеси (BFM) в едномерна оптична решетка **89**

3.1 Доказателство на Теорема 6 90

3.2 Случай $C_0 = 0, C_j \neq 0$. 91

3.3 Случай $C_0 \neq 0, C_j = 0$. 93
3.4 Случай $C_0 \neq 0, C_1 \neq 0$. 105

A G-функция на Майер **110**

Литература **120**

Благодарности

Смятам за свое задължение да изкажа искрената си благодарност и признателност на моя научен консултант Огнян Христов от Софийския университет „Св. Климент Охридски“, за голямото търпение, за съветите и помощта които той ми даде.

Благодарен съм също така и на член-кореспондент професор Емил Хорозов от Софийски университет за плодотворните дискусии. Специална благодарност дължа и на доктор Цветана Стоянова от СУ за многото отделено време, на професор Иван Димитров от университета в Куинс - Канада за помощта по алгебричните въпроси, на колегите от семинара Динамични системи и Теория на числата, които изтърпяха моята лекция, на колегите ми във ВТУ „Тодор Каблешков“ за проявеното разбиране. Благодарен съм на ръководството на Висшето Транспортно Училище, за оказаната финансова подкрепа. Благодарности на Огнян Касабов и Емил Иванов за ценните препоръки по оформянето на ръкописа.

Увод

0.0.1 Интегруемост и неинтегруемост

Обекти на изследване в тази дисертация са няколко хамилтонови системи, чиято интегруемост в смисъл на Лиувил се разглежда.

Задачата за интегруемост в квадратури на дадена динамична система е стар, важен и трудно решим проблем. Известно е, че една алгебрична или аналитична динамична система е разрешима локално. Въпросът е дали е разрешима глобално? Ако е възможно дадена динамична система, дефинирана чрез обикновени диференциални уравнения, да се реши експлицитно, казваме, че тази система е *интегруема*. Проблем е, че достатачно добре работеща дефиниция за понятието интегруемост в общия смисъл няма. Съществуват две фамилии от крайномерни комплексни динамични системи, за които понятието интегруемост е добре дефинирано – хамилтоновите системи и линейните диференциални уравнения. За хамилтоновите системи под *интегруемост в смисъл на Лиувил* се разбира съществуването на достатачен брой първи интеграли в инволюция. За линейните обикновени диференциални уравнения интегруемостта се дефинира в контекста на Диференциалната Теория на Галоа, наречена още Теория на Пикар - Весио.

Ще да проследим развитието на критериите за интегруемост на хамилтонови системи от Поанкаре до Теорията на Зиглин-Моралес-Руис-Рамис.

Нека е дадено реално симплектично многообразие M с размерност $2n$ и хамилтонова система $\dot{x} = X_H(x)$ (често в нашето изложе-

ние ще отъждествяваме хамилтоновата система с хамилтоновото векторно поле X_H) върху него. Да означим с Γ една интегрална крива на $z = z(t)$ на векторното поле X_H. Уравненията във вариации, VE, около Γ се записват във вида

$$(VE) \qquad \dot{\eta} = \frac{\partial X_H}{\partial x}(z(t))\,\eta.$$

Уравненията VE са отново хамилтонови с пръв интеграл $dH(z(t))$, но зависещи явно от времето. Използвайки този пръв интеграл, уравненията VE могат да се редуцират с една степен на свобода до така наречените уравнения в нормални вариации NVE, които в подходящи координати приемат вида

$$(NVE) \qquad \dot{\xi} = J\,S(t)\,\xi,$$

където

$$J = \begin{pmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{pmatrix}$$

е стандартната симплектична форма с размерност $2(n-1)$.

Нека сега допълнително да предположим, че Γ е периодична орбита с период T, т.е. $z(t+T) = z(t)$. Нека $U(t)$ е фундаментално матрично решение на VE, около Γ, като $U(0) = I$. Матрицата $M = U(T)$ се нарича *матрица на монодромия*, съответстваща на периодичното решение Γ, а нейните собствени стойности се наричат *мултипликатори на периодичното решение* Γ. Понеже M е симплектично, то за матрицата на монодромия имаме $M \in \mathrm{Sp}(n, \mathbf{R})$ и ако λ е мултипликатор, то и λ^{-1} е мултипликатор. Тогава е в сила следният критерий на Поанкаре:

Теорема 1. *(Поанкаре, [77]) Да предположим, че хамилтоновата система X_H притежава k на брой ($k \leq n$) първи интеграли в инволюция $f_1 = H$, $f_2 \ldots, f_k$, функционално независими върху периодичното решение Γ. Тогава поне $2k$ на брой от мултипликаторите на Γ трябва да са равни на 1.*

Идеята за разглеждане на решенията на хамилтонова система като мероморфни функции на времето, разглеждано като комплексна променлива, така наречената комплексификация на уравненията, е основна в работата на Ковалевска [47] от 1888 г. С този подход тя открива нов случай на интегруемост на твърдо тяло с неподвижна точка. Освен това Ковалевска доказва, че изключвайки някои частни решения само в случаите на Ойлер, Лагранж и Ковалевска, системата, описваща твърдо тяло притежава глобални мероморфни решения. Ляпунов обобщава резултата на Ковалевска и доказва, че с изключение на някои частни решения, само в горните три случая системата твърдо тяло притежава глобални еднозначни решения. Неговият метод се базира върху анализ на уравненията във вариации около дадени решения [50].

През 1963 г. Арнолд и Крилов , разглеждат комплексни линейни диференциални уравнения и формулират достатъчни условия за съществуването на еднозначни, но не непременно комплексно аналитични, първи интеграли. Методът им се основава на факта, че затворената обвивка на разглежданата група на монодромия се съдържа в линейна група на Ли [4]. Това наблюдение е близко до факта, че в случая на фуксови диференциални уравнения диференциалната група на Галоа е точно затварянето по Зариски на групата на монодромия (вж. в следващата глава).

В своите две фундаментални работи [97, 100], разглеждайки комплексни аналитични динамични системи

$$\frac{d}{dt}\, x = v(x), \quad t \in \mathbb{C}, \quad x \in M, \tag{0.0.1}$$

където M е комплексно многообразие с размерност n, Зиглин показва, че ако системата (0.0.1) притежава мероморфен първи интеграл, то системата в нормални вариации притежава рационален интеграл. Този резултат му позволява да формулира необходими условия за интегруемост на хамилтонови системи.

В случая на комплексна аналитична хамилтонова система с раз-

мерност $2n$ имаме един първи интеграл - хамилтониана H. Нека Γ е римановата повърхнина, съответстваща на интегралната крива $z = z(t)$ на векторното поле X_H. Нека сега да разгледаме хамилтонова система

$$\dot{x} = X_H(x), \quad t \in \mathbb{C}, \quad x \in M \tag{0.0.2}$$

зададена с аналитичен хамилтониан H, дефиниран върху комплексно $2n$-мерно многообразие M. Предполагаме, че системата (0.0.2) притежава неравновесно решение $\Psi(t)$. Означаваме чрез Γ неговата фазова крива. Ние можем да запишем уравнението във вариации (VE) около това решение

$$\dot{\xi} = DX_H(\Psi(t))\xi, \quad \xi \in T_\Gamma M. \tag{0.0.3}$$

Понататък, използвайки интеграла dH, ние можем да редуцираме уравнението във вариации. Разглеждаме нормалното разслоение на Γ, $F := T_\Gamma M/TM$ и нека $\pi : T_\Gamma M \to F$ е естествената проекция. Уравнението (0.0.3) индуцира уравнение върху F

$$\dot{\eta} = \pi_*(DX_H(\Psi(t))(\pi^{-1}\eta), \quad \eta \in F, \tag{0.0.4}$$

което се нарича нормално вариационно уравнение (NVE).

Логично е да предположим, че ако системата (0.0.2) е интегруема, тогава линейните уравнения (VE) и (NVE) са също интегруеми. Както по-горе, можем да напишем уравненията в първи вариации VE около Γ и уравненията в нормални вариации NVE, които са с размерност $2(n-1)$. Групата на монодромия на NVE е подгрупа на $\mathrm{Sp}(2(n-1), \mathbb{C})$. Спектърът на елемент g от групата на монодромия $g \in \mathcal{M} \subset \mathrm{Sp}(2(n-1), \mathbb{C})$ има следния вид

$$\mathrm{Spec}(g) = (\lambda_1, \lambda_1^{-1}, \ldots, \lambda_{n-1}, \lambda_{n-1}^{-1}), \quad \lambda_i \in \mathbb{C}$$

и g се нарича *резонансен*, ако

$$\prod_{l=1}^{n-1} \lambda_l^{k_l} = 1 \text{ за някое } (k_1, \ldots, k_{n-1}) \in \mathbb{Z}^{n-1}, \quad \sum_{i=1}^{n-1} k_i \neq 0.$$

В първата си работа [97] Зиглин доказва основната теорема на теорията си. Ще дадем формулировката от [65].

Теорема 2. *(Зиглин, [97]) Да предположим, че дадена хамилтонова система притежава $n-k$ на брой допълнителни аналитични първи интеграли, независими в околност на* Γ*, не задължително върху* Γ*. Предполагаме, че съществува нерезонансен елемент $g \in \mathcal{M}$ от групата на монодромия на NVE. Тогава всеки друг елемент $g' \in \mathcal{M}$ от групата на монодромия $\mathcal{M}$ на NVE изпраща собствените вектори на g в собствени вектори на g.*

Зиглин изучава и системата на Хенон-Хайлес, както и частен случай на полето на Янг-Милс. За последната система доказва несъществуването на локален мероморфен първи интеграл, независим с хамилтониана в околност на хиперболично особено решение [100].

През 1985 г. Ито прилага метода на Зиглин върху обобщената система на Хенон - Хайлес [39]. По-късно се появяват много работи, използващи метода на Зиглин. Йошида публикува серия от работи относно приложението на метода на Зиглин върху някои хомогенни потенциали с две степени на свобода, [95, 96]. Разширявайки метода на Зиглин, Хорозов доказва неинтегруемост на системата на Грос - Невьо за $n = 3$ степени на свобода [36]. По-късно Мачиевски, използвайки теорията на Моралес - Рамис, доказва неинтегруемост на същата система за произволен брой ($n \geq 3$) степени на свобода [51]. В своята работа [38] Иригоаиен и Симо чрез теорията на Зиглин и критерия на Йошида за хомогенни потенциали доказват неинтегруемост на така наречения проблем J_2 за $\alpha/\beta = -3$.

Разширяването на теорията на Зиглин и приближаването ѝ до диференциалната теория на Галоа започва едновременно и независимо да се разработва както от Чърчил и Род [20], така и от Моралес-Руис и Симо [65, 70]. Така от началото на деветдесетте години на миналия век до днес този подход намира широко при-

ложение както в теоретични работи, така и в конкретни задачи от приложно естество. Преди възникването на тази идея всички критерии за неинтегруемост не са взимали под внимание условието първите интеграли да са в инволюция, т.е. използвала се е само тяхната независимост. Така, с изключение на резултата на Поанкаре, споменат по-горе, за първи път се появява препятствие за пълна интегруемост (в смисъл на Лиувил) на хамилтонова система. Това означава, че се взима под внимание не само броят на независимите първи интеграли, както в работите на Зиглин и неговите последователи, но и фактът, че тези интеграли трябва да са в инволюция. Основната идея на метода, използващ Диференциалната Теория на Галоа, е следната: ако хамилтоновата система X_H е напълно интегруема в смисъл на Лиувил, то съответната система във вариации трябва също да е интегруема в смисъл, че съответното разширение на Пикар - Весио трябва да е лиувилово. Последното е еквивалентно на изискването единичната компонента на съответната диференциална група на Галоа да бъде разрешима алгебрична група. А още по-точно, в работата на Моралес-Руис и Рамис [67] този критерий вече звучи така:

Теорема 3. *(Моралес - Рамис, [67]) Ако хамилтоновата система X_H е напълно интегруема с мероморфни първи интеграли в околност на Γ, но не задължително върху самата Γ, то свързаната компонента G^0 на единицата на групата на Галоа на уравнението NVE е абелева.*

Така се оказва, че абелевата структура на алгебрата на Поасон от първи интеграли на хамилтоновата система X_H се проектира върху групата на Галоа на NVE.

Теорема 3 може да се разглежда като обобщение на Теорема 2 на Зиглин и може да се покаже, че теоремата на Зиглин се явява като следствие от резултатите на Моралес и Рамис в [67]. Теорема 3 и нейните версии в [67] са мощен критерий за неинтегруемост,

намерил приложение в изследвания на широк кръг динамични системи:

1) задачата за n-те тела, задачата на Ситников за трите тела [65]; задачата на Лагранж за трите тела [14, 89]; сателитна и астероидна динамика - [6, 7]; космологични модели - така наречените модели на Бианки, по-специално, модел от тип Бианки IX с рационални първи интеграли [65]; модел от тип Бианки VIII [56]; модел на Фридман - Робъртсън - Уолкер [21];

2) задачи от механиката (твърдо тяло, махало) - школата на Мачиевски, [51, 53, 54, 55]; небесна механика - проблем на Хил [64];

3) трансцедентите на Пенлеве [68, 88].

Последният пример е за уравнения с нерегулярна особеност. Поточно, неинтегруемостта на уравнението на Пенлеве P_{II} за $\alpha \in \mathbb{Z}$ се дължи на наличието на нетривиален феномен на Стокс в точката $z = \infty$. Това ни отвежда на въпроса: как се пресмята групата на Галоа на дадено линейно диференциално уравнение? Изобщо казано намирането на Диференциалната група на Галоа за дадено линейно уравнение е трудна задача. Ще отбележим, че за линейни обикновени диференциални уравнения от втори ред решения от Лиувилов вид се намират с алгоритъм, открит от Ковачич [46], (това дава възможност, да пресмятаме Групата на Галоа за някои случаи), а що се отнася до системи линейни уравнения като че ли най-доброто изложение, заедно с множество примери, се дава от Сингер [84], интересно изложение за уравнения на Пенлеве може да се намери в [102].

За съжаление Теорема 3 дава само необходимо условие за интегруемост на дадена хамилтонова система: ако хамилтоновата система е интегруема, то свързаната компонента G^0 на единичния елемент на групата на Галоа на съответното уравнение в нормални вариации е абелева. Обратното обаче не е вярно, от това, че диференциалната група на Галоа е абелева, не следва хамилтонова

интегруемост. Част от проблемите, разгледани в настоящата дисертация са примери за такива случаи.

В току-що описаната ситуация, мощен апарат за доказване на неинтегруемост е разглеждането на уравненията в по-високи вариации, VE_k, (респективно NVE_k), [69]. Аналог на Теорема 3 е следният критерий

Теорема 4. *(Моралес-Руис-Рамис-Симо [69]) Да предположим, че хамилтоновата система X_H е напълно интегруема с мероморфни първи интеграли в околност на аналитична крива* Γ. *Тогава свързаната компонента G_k^0 на единичния елемент на диференциалната група на Галоа на уравненията в k-ти вариации е абелева за всяко $k \in \mathbf{N}$.*

Прилагането на този критерий за неинтегруемост е сравнително тежко технически и не са известни много примери относно употребата му. Заслужава да се спомене работата на Мачиевски и Пшибилска [52] върху хамилтонови системи с хомогенен потенциал от степен 3

$$H = (p_1^2 + p_2^2)/2 + V(q_1, q_2).$$

Чрез анализ на нормалните уравнения в трети вариации, авторите доказват неинтегруемост на разглежданата от тях задача.

Друг пример за използването на уравнения във високи вариации може да се намери във работата на Моралес-Руис, Рамис и Симо [69]. Изучавайки уравненията във високи вариации, авторите доказват неинтегруемост на обобщеното уравнение на Хенон - Хайлес с потенциал

$$V(x_1, x_2) = \frac{1}{2}\, x_1^2 + \frac{1}{3}\, dx_1^3 + \left(\frac{1}{2} + cx_1\right)\, x_2^2$$

при условие $d/c = 2$.

0.0.2 Уравнения със свойство на Пенлеве.

Към края на 19 век математиците започват да търсят така наречените *добри трансцендентни функции*, дефинирани чрез нелинейни алгебрични диференциални уравнения. Едно диференциално уравнение

$$F\left(z, y, \frac{dy}{dz}, \ldots, \frac{d^n y}{dz^n}\right) = 0, \tag{0.0.5}$$

дефинирано над област D се нарича *алгебрично*, ако $F(z, y_0, y_1, \ldots, y_n)$ е полином на $y = (y_0, y_1, \ldots, y_n)$ ($y_k := y^{(k)}$, $k = 0, \ldots n$), с коефициенти мероморфни функции на $z \in D$. Уравнението се нарича *рационално*, ако е алгебрично и е от степен 1 по отношение на y_n. Уравнението е *линейно*, ако F е линейна форма по y. Разглеждайки едно нелинейно диференциално уравнение ние по принцип не можем да предскажем къде са особеностите на решенията, нито пък от какъв вид са тези особености. Това, което можем да твърдим е, че дадено решение се контролира от самото уравнение.

Фукс въвежда разделянето на особените точки на решенията на диференциалните уравнения на два вида: неподвижни и подвижни особени точки. Например уравнението

$$w' = \frac{1}{2wz}$$

притежава решение $w = \sqrt{\ln \frac{z}{C}}$ (вж. [1]). Точките $z = 0$ и $z = \infty$ са трансцендентни особени точки за решението, а точката $z = C$ е критична алгебрична точка. В случая трансцендентните особени точки са едни и същи за различните стойности на константата C. Положението на алгебричните особени точки обаче зависи от C и следователно се мени при промяна на началните данни, т.к. C е свързана с началните данни z_0 и $w_0, C = z_0 e^{-w_0^2}$.

Особените точки на решенията, положението на които не зависи от началните данни, определящи решението, се наричат *неподвижни особени точки.* Особените точки на решенията, положението

на които зависи от началните данни, се наричат *подвижни особени точки*. Така в горния пример критичните трансцедентни точки $z = 0$ и $z = \infty$ са неподвижни особени точки, докато критичните алгебрични точки $z = C$ са подвижни особени точки [1].

Така възниква задачата :

Да се намерят всички алгебрични диференциални уравнения, чиито решения не притежават подвижни особени критични точки.

Дефиниция. *Казваме, че едно алгебрично диференциално уравнение (0.0.5) притежава* **свойството на Пенлеве**, *ако неговото общо решение не притежава подвижни особени критични точки. Под критична особена точка разбираме особена точка, при обикалянето около която дадената функция променя своята стойност [1].*

Така в горния пример точките $z = 0, z = \infty$ и $z = C$ са критични особени точки. Пример за некритични особени точки са полюсите и съществените особени точки на еднозначните функции.

За $n = 1$ проблемът е изучен и решен от Фукс и Поанкаре. Всяко уравнение от типа (0.0.5), притежаващо свойството на Пенлеве, може да бъде редуцирано с точност до трансформация на Мьобиус

$$y \longmapsto \frac{\alpha(z)\, y + \beta(z)}{\gamma(z)\, y + \delta(z)}, \quad z \longmapsto \varphi(z)$$
$$\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varphi - \text{ мероморфни по } z$$

или до уравнението на $\wp-$функцията на Вайерщрас

$$\left(\frac{dy}{dz}\right)^2 = 4y^3 - g_2 y - g_3, \quad g_2, g_3 \in \mathbb{C},$$

или до уравнението на Рикати

$$\frac{dy}{dz} = a(t)y^2 + b(z)y + c(z),$$

където $a(z), b(z)$ и $c(z)$ са мероморфни функции.

За $n = 1$ е в сила следният забележителен резултат на Пенлеве, [73, 74]:

Решенията на алгебричните уравнения от първи ред не могат да притежават подвижни трансцендентни и съществени особени точки.

С други думи, решенията на алгебричните уравнения от първи ред могат да притежават само алгебрични точки като подвижни особени точки, докато при $n = 2$ е напълно възможно да се появят подвижни съществени особени точки.

Уравнения на Пенлеве от втори ред.

През 1893 г., Пикар изказва съмнение относно намирането на нелинейни диференциални уравнения, притежаващи свойството на Пенлеве при $n \geq 2$. Независимо от това, Пенлеве решава проблема за нелинейни рационални диференциални уравнения от втори ред

$$\frac{d^2y}{dz^2} = R\left(z, y, \frac{dy}{dz}\right).$$

В началото на 20 век (1900-1910), в своите изследвания Пенлеве показва, че всички рационални диференциални уравнения от втори ред с неподвижни критични точки се свеждат до 14 основни вида. Впоследствие Гамбие [28, 75] намира грешка в работата му и показва, че уравненията с неподвижни критични точки от втори ред могат да се редуцират до 50 различни вида. Болшинството от тях се редуцират до вече познати уравнения. Само шест от тях водят до нови трансцендентни функции. Именно тези уравнения са известни в математическия свят като шестте уравнения на Пенлеве:

$$
\begin{aligned}
P_I: &\quad w'' = 6w^2 + z,\\
P_{II}: &\quad w'' = 2w^3 + zw + \alpha,\\
P_{III}: &\quad w'' = \frac{1}{w}\,w'^2 - \frac{1}{z}w' + \frac{1}{z}(\alpha z^2 + \beta) + \gamma w^3 + \frac{\delta}{w},\\
P_{IV}: &\quad w'' = \frac{1}{2w}w'^2 + \frac{3}{2}w^3 + 4zw^2 + 2(z^2 - \alpha) + \frac{\beta}{w},\\
P_V: &\quad w'' = \left(\frac{1}{2w} + \frac{1}{w-1}\right)w'^2 - \frac{1}{z}w' + \frac{(w-1)^2}{z^2}\left(\alpha w + \frac{\beta}{w}\right)\\
+ &\quad \gamma\frac{w}{z} + \delta\frac{w(w+1)}{w-1},\\
P_{VI}: &\quad w'' = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{w} + \frac{1}{w-1} + \frac{1}{w-z}\right)w'^2 - \left(\frac{1}{z} + \frac{1}{z-1} + \frac{1}{w-z}\right)w'\\
&\quad + \frac{w(w-1)(w-z)}{z^2(z-1)^2}\left(\alpha + \beta\frac{z}{w^2} + \gamma\frac{z-1}{(w-1)^2} + \delta\frac{z(z-1)}{(w-z)^2}\right),
\end{aligned}
$$

където α, β, γ и δ са произволни комплексни константи. По-точно казано, само първите три уравнения са дефинирани от Пенлеве. Гамбие, прибавя P_{IV} и P_V. Шестото уравнение, P_{VI}, е въведено от Фукс [27]. Всъщност едва в края на 20 век, 1990 г., Йоши и Крускал [41], дават просто доказателство на факта, че уравненията на Пенлеве не притежават подвижни съществени особени точки. Успехът на Пенлеве относно рационалните диференциални уравнения от втори ред подтиква Шази и Гарние да продължат изследванията за рационални диференциални уравнения от ред ≥ 3 и за алгебрични диференциални уравнения от втори ред, [19, 29]. Класификация на уравненията, притежаващи свойство на Пенлеве от ред четири е направена от Косгроув [22]. Според тази класификация има 18 уравнения, притежаващи свойство на Пенлеве от ред 4, които се означават с F-I, F-II,..., F-XVIII.

В края на 20-ти век, използвайки Нелинейна Диференциална Теория на Галоа, Ниширока, [71], и Умемура, [92], доказват неинтегруемост на първото уравнение на Пенлеве P_I в термините на „класически функции“. През 1998 година Уатанабе, [93], доказва

неинтегруемост на шестото уравнение на Пенлеве P_{VI} чрез „класически функции“.

Последното изисква известно уточнение. Следвайки Умемура [91, 92], под „класически“ или „познати функции“ ще разбираме функции, получени от полето на рационалните функции $\mathbb{C}(z)$ чрез краен брой итерации на следните операции:

1. диференциране,

2. квадратури,

3. аритметичните операции $+, -, \times, \div$,

4. решение на хомогенни линейни обикновени диференциални уравнения с коефициенти класически функции,

5. субституции в абелеви функции,

6. решение на алгебрични диференциални уравнения от първи ред с коефициенти класически функции.

Например за рационалните функции $f(z), g(z), h(z) \in \mathbb{C}(z)$, всяка функция $w(z)$, удоволетворяваща уравнението на Рикати

$$\frac{dw}{dz} + f(z)\, w^2 + g(z)\, w + h(z) = 0$$

е класическа функция.

При това уточнение, в работите [71, 92, 93] се говори за неинтегруемост в смисъл на Умемура. В наши дни се говори и за неинтегруемост в смисъл на Малгранж [57] и Касел [17]. Прилагайки тяхната теория за неинтегруемост, Касел [18] доказва неинтегруемостта на P_I, а Канат и Лорей, [16] доказват неинтегруемост на P_{VI} за всички стойности на параметрите, освен тези, за които се получават решенията на Пикар.

Уравнения със свойство на Пенлеве от по-висок ред.

Разглеждаме $\mathrm{P_{II}}$-йерархия, формулирана чрез

$$\mathrm{P_{II}^{(n)}} \quad : \quad \left(\frac{d}{dz}+2w\right)\mathcal{L}_n[w'-w^2] + \sum_{l=1}^{n-1}\beta_l\left(\frac{d}{dz}+2w\right)\mathcal{L}_l[w'-w^2] = zw+\alpha_n, \quad n\geq 1, \tag{0.0.6}$$

където $\mathcal{L}_n$ е оператора, дефиниран с рекурентното съотношение

$$\frac{d}{dz}\mathcal{L}_{n+1} = \left[\frac{d^3}{dz^3}+4(w'-w^2)\frac{d}{dz}+2(w'-w^2)_z\right]\mathcal{L}_n;$$
$$\mathcal{L}_0[w'-w^2] = \frac{1}{2}, \tag{0.0.7}$$

а β_l и α_n са комплексни параметри. Специално внимание обръщаме на (0.0.6), което е нелинейно обикновено диференциално уравнение от ред $2n$, $n\geq 1$. Някои автори разглеждат всички β_l тривиални. Първите три члена на тази $\mathrm{P_{II}}$-йерархия са:

$$\mathrm{P_{II}^{(1)}}: w'' = 2w^3 = zw+\alpha_1, \tag{0.0.8}$$
$$\mathrm{P_{II}^{(2)}}: w^{(4)} = 10w(ww''+w'^2)+6w^5+\beta_1(w''-2w^3) = zw+\alpha_2, \tag{0.0.9}$$
$$\mathrm{P_{II}^{(3)}}: w^{(6)} = 14w^{(4)}w^2-56w^{(3)}w'w+70w''(w^4-w'^2) + 140w^3w'^2-42w(w'')^2-20w^7+\beta_1[w''-2w^3] + \beta_2[w^{(4)}-10w(ww''+w'^2)+6w^5] = zw+\alpha_3. \tag{0.0.10}$$

Уравненията $\mathrm{P_{II}^{(2)}}$ са известни като F-XVII, според класификацията на Косгроув ([22]).

0.0.3 Формулировка на основните задачи

Първата задача, която си поставяме в тази дисертация, е свързана с изследване на интегруемостта в смисъл на Лиувил на някои уравнения, притежаващи свойство на Пенлеве от ред четири и ред шест.

Получени като чисто математическа задача, шестте уравнения на Пенлеве имат доста физически приложения: в описанието на нелинейните вълни, в статистическата механика, в теорията на квантовата гравитация, в топологичната теория на полето, във физиката на плазмата, в теорията на случайните матрични модели и др.

Класическите уравнения на Пенлеве имат доста забележителни свойства, едно от най-интересните от които е съществуването на хамилтонова формулировка.

В [68] Моралес-Руис задава въпроса за неинтегруемостта на Хамилтоновата система на класическите уравнения на Пенлеве, които имат частни рационални решения. Този въпрос има положителен отговор за $\mathrm{P_{II}}$ при стойности на параметъра $\alpha = n \in \mathbb{Z}$. По-нататък развитието на тези задачи минава през работите на Стоянова, която доказва неинтегруемост на редица уравнения на Пенлеве [86, 87],[88] (с Христов), [37] (с Хорозов) и [3].

Въпросът, който естествено възниква, е дали уравненията на Пенлеве от по-висок ред са също неинтегруеми?

Разглеждаме следното диференциално уравнение от четвърти ред

$$w^{(4)} = 5w''(w^2 - w') + 5w(w')^2 - w^5 + (\lambda z + \alpha)w + \gamma, \qquad (0.0.11)$$

където λ, α, γ са комплексни параметри.

Това уравнение възниква като група от инвариантни редукции на модифицираното уравнение на Кауп- Купершмидт (или уравнение на Севада-Котера). За повече подробности вж. А. Хоун [35], Н. Кудряшов [48]. Известно е и като уравнение F-XVIII в класификацията, направена от К. Косгроув [22] за всички уравнения от ред четири и пет, притежаващи свойството на Пенлеве. Това уравнение е изследвано от В. Громак [32] за други, различни от неинтегруемост, свойства.

Както в класическия случай на уравненията на Пенлеве, тези

уравнения имат хамилтонова формулировка, Баклунд трансформации и фамилия от рационални специални решения. Например (вж. [22]):

- когато $\lambda = 0, \gamma \neq 0$, уравнението е решено чрез хиперелиптични функции;

- когато $\lambda = 0, \gamma = 0$, уравнението е решено с елиптични функции;

- когато $\gamma = -\lambda/2$, $w(z)$ решението може да се изрази чрез решенията на две Пенлеве I уравнения.

По-нататък предполагаме, че $\lambda \neq 0$.

Уравнението (0.0.11) притежава две фамилии рационални решения:

I) $\gamma/\lambda = 3k, k \in \mathbb{Z}$

$$k = 0,\ w = 0; \quad k = 1,\ w = -\frac{3\lambda}{\alpha + \lambda z};\ \ldots. \tag{0.0.12}$$

II) $\gamma/\lambda = 3k - 1, k \in \mathbb{Z}$

$$k = 0,\ w = \frac{\lambda}{\alpha + \lambda z}; \quad k = 1,\ w = -\frac{2\lambda}{\alpha + \lambda z};\ \ldots. \tag{0.0.13}$$

Всъщност, тези две фамилии са единствените рационални решения на (0.0.11) (Громак [32], Теорема 3).

Означаваме с $q_1(z) := w(z)$, $\varepsilon^2 = 1$. Тогава уравнението (0.0.11) може да се представи като две еквивалентни Хамилтонови системи със $2 + 1/2$ степени на свобода с

$$\begin{aligned} H_\varepsilon &= \frac{1}{2}p_2^2 + \frac{7 - 9\varepsilon}{12}q_2^3 + p_1 q_2 - \frac{1 + 3\varepsilon}{4}p_1 q_1^2 \\ &+ \frac{3\varepsilon - 1}{4}q_2(\lambda z + \alpha) + \left(\gamma + \frac{3\varepsilon - 1}{4}\lambda\right) q_1. \end{aligned} \tag{0.0.14}$$

Съответната система от уравнения е ($' = d/dz$)

$$\begin{aligned} q_1' &= q_2 - \frac{3\varepsilon + 1}{4}q_1^2, \quad p_1' = \frac{1 + 3\varepsilon}{2}p_1 q_1 - \gamma - \frac{3\varepsilon - 1}{4}\lambda \\ q_2' &= p_2, \qquad\qquad\quad p_2' = -p_1 - \frac{7 - 9\varepsilon}{4}q_2^2 - \frac{3\varepsilon - 1}{4}(\lambda z + \alpha). \end{aligned} \tag{0.0.15}$$

Съществуват Баклунд трансформации (вж. Громак [32]) T_1, T_2 и $T := T_2T_1$ за уравнението (0.0.11), действащи на параметрите по следния начин:

$$T_1(\lambda) = \lambda, \quad T_1(\alpha) = \alpha, \quad T_1(\gamma) = -\gamma - \lambda, \tag{0.0.16}$$

$$T_2(\lambda) = \lambda, \quad T_2(\alpha) = \alpha, \quad T_2(\gamma) = -\gamma + 2\lambda, \tag{0.0.17}$$

$$T(\gamma) = \gamma + 3\lambda, \qquad T^{-1}(\gamma) = \gamma - 3\lambda. \tag{0.0.18}$$

Громак е показал, че тези Баклунд трансформации са бирационални. Не е трудно да се види, тези трансформации е също така канонични.

Разширяваме по естествен начин хамилтоновата система (0.0.15) до автономна система с три степени на свобода, означавайки

$$\hat{H}(q_1, q_2, z, p_1, p_2, F) := H_\varepsilon + F.$$

Тогава

$$\begin{array}{rclll} \dfrac{dq_1}{ds} & = & q_2 - \dfrac{3\varepsilon+1}{4}q_1^2, & \dfrac{dp_1}{ds} = \dfrac{1+3\varepsilon}{2}p_1q_1 - \gamma - \dfrac{3\varepsilon-1}{4}\lambda, \\ \dfrac{dq_2}{ds} & = & p_2, & \dfrac{dp_2}{ds} = -p_1 - \dfrac{7-9\varepsilon}{4}q_2^2 - \dfrac{3\varepsilon-1}{4}(\lambda z + \alpha), \\ \dfrac{dz}{ds} & = & 1, & \dfrac{dF}{ds} = -\lambda\dfrac{3\varepsilon-1}{4}q_2. \end{array} \tag{0.0.19}$$

Нашият първи основен резултат е следният

Теорема 5. *Хамилтоновата система (0.0.19) с параметри $\gamma/\lambda = 3k, \gamma/\lambda = 3k-1, k \in \mathbb{Z}$ не е интегруема в смисъл на Лиувил чрез рационални първи интеграли.*

Като допълнение към този резултат получаваме и подобно твърдение за $\mathrm{P}_{\mathrm{II}}^{(2)}$ и $\mathrm{P}_{\mathrm{II}}^{(3)}$ от йерархията P_{II}.

Теорема 19. *Да разгледаме следните случаи:*

(i) за $\beta_1 = \alpha_2 = 0$, хамилтоновата система, отговаряща на $\mathrm{P}_{\mathrm{II}}^{(2)}$, не е интегруема в смисъл на Лиувил чрез рационални първи интеграли;

(ii) за $\beta_1 = \beta_2 = \alpha_3 = 0$, хамилтоновата система отговаряща на $\mathrm{P}_{\mathrm{II}}^{(3)}$, не е интегруема в смисъл на Лиувил чрез рационални първи интеграли.

Другата задача, която решаваме в тази дисертация, е изследване на интегруемостта на системата, получена от стационарните решения на уравненията, описващи Бозе–Ферми смеси (BFM) в едномерна оптична решетка. Интересът към BFM възниква след откриването на Бозе – Айнщайн кондензати (BEC) през 1995 и от желанието да се разбере строгото взаимодействие в зависими системи с приложения във физиката на твърдото тяло, ядрената физика, астрофизиката, квантовата механика и нанотехнологиите. По-детайлни физични обосновки на BFM има в [43, 82, 9, 12, 45].

Предмет на нашето изследване са следните $N_f + 1$ свързани нелинейни уравнения на Шрьодингер

$$i\hbar\frac{\partial\Psi^b}{\partial t} + \frac{1}{2m_{\mathrm{B}}}\frac{\partial^2\Psi^b}{\partial x^2} - V\Psi^b - g_{\mathrm{BB}}|\Psi^b|^2\Psi^b - g_{\mathrm{BF}}\rho_f\Psi^b = 0, \quad (0.0.20)$$

$$i\hbar\frac{\partial\Psi_j^f}{\partial t} + \frac{1}{2m_{\mathrm{F}}}\frac{\partial^2\Psi_j^f}{\partial x^2} - V\Psi_j^f - g_{\mathrm{BF}}|\Psi^b|^2\Psi_j^f = 0,\ j = 1, \ldots, N_f, \quad (0.0.21)$$

където вълновата функция Ψ_j^f описва всеки един от N_f фермиони и Ψ^b е вълновата функция на бозонната компонента, $\rho_f = \sum\limits_{i=1}^{N_f}|\Psi_i^f|^2$, а $g_{\mathrm{BB}}, g_{\mathrm{BF}}, m_{\mathrm{F}}, m_{\mathrm{B}}$ са определени физични константи. По-специално,

$$g_{\mathrm{BB}} = \frac{2a_{\mathrm{BB}}}{a_s},\ g_{\mathrm{BF}} = \frac{2a_{\mathrm{BF}}}{a_s\alpha},\ \alpha = \frac{m_{\mathrm{B}}}{m_{\mathrm{F}}}$$

и

$$\alpha_s = \sqrt{\frac{\hbar}{m_{\mathrm{B}}\omega_\perp}}$$

са свързани със взаимодействието на s-вълните за бозон-бозон и бозон-фермион взаимодействие, съответно, като a_{BB} и a_{BF} са дължини на разсейване на s-вълновите сблъсъци на бозон-бозон и бозон-фермион взаимодействия. Квантовите дегеративни смеси ^{40}K, ^{87}Rb се изследват, когато $m_{\mathrm{B}} = 87m_p$, $m_{\mathrm{F}} = 40m_p$ и $\omega_\perp = 215Hz$. Потенциалът V е обикновено във вида $V = V_0 sn^2(\alpha x, \kappa)$, където

$sn(\alpha x, \kappa)$ е елиптичната sine-функция на Якоби. В тази работа ние предполагаме $V_0 = 0$, както в [9].

Ние се интересуваме от стационарните решения на системата (0.0.20), (0.0.21) от вида

$$\begin{aligned} \Psi^b(x,t) &= q_0(x) \exp\left(-i\frac{\omega_0}{\hbar}t + i\Theta_0(x) + i\kappa_0\right), \\ \Psi_j^f(x,t) &= q_j(x) \exp\left(-i\frac{\omega_j}{\hbar}t + i\Theta_j(x) + i\kappa_{0,j}\right),\ j = 1, \ldots, N_f \end{aligned} \tag{0.0.22}$$

където κ_0, $\kappa_{0,j}$, са фазови константи, q_0, q_j и Θ_0, $\Theta_j(x)$ са реалнозначни функции,

$$\Theta_0(x) = C_0 \int_0^x \frac{dx'}{q_0^2(x')},\ \Theta_j(x) = C_j \int_0^x \frac{dx'}{q_j^2(x')},\ j = 1, \ldots, N_f. \tag{0.0.23}$$

C_0, C_j, са константи, получени при интегриране. Заместваме (0.0.22) в уравненията (0.0.20), (0.0.21) и отделяме реалната и имагинерната части. Получава се

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2m_{\mathrm{B}}} q_0^3 q_{0xx} - g_{\mathrm{BB}} q_0^6 - g_{\mathrm{BF}} \left(\sum_{i=1}^{N_f} q_i^2\right) q_0^4 + \omega_0 q_0^4 = \frac{C_0^2}{2m_{\mathrm{B}}}, \\ &\frac{1}{2m_{\mathrm{F}}} q_j^3 q_{jxx} - g_{\mathrm{BF}} q_0^2 q_j^4 + \omega_j q_j^4 = \frac{C_j^2}{2m_{\mathrm{F}}},\ j = 1, \ldots, N_f. \end{aligned} \tag{0.0.24}$$

Костов, Герджиков и Вълчев [45] са открили много частни (квазипериодични, периодични и солитонни) решения на системата (0.0.24) и следователно, стационарни решения за системата (0.0.20), (0.0.21). Естествено възниква въпросът, дали можем да получим достатъчно на брой първи интеграли, такива че системата (0.0.24) да е интегруема. Забелязваме, че при $g_{\mathrm{BF}} = 0$ уравненията се разделят, т.е. системата е разрешима.

Преди да формулираме нашия резултат, ще се наложи да направим някои смени на несъществени (за интегруемостта) параметри. В това, което следва, ние предполагаме, че параметрите $\omega_0, \omega_j, m_{\mathrm{F}}, m_{\mathrm{B}}$ са положителни, (това следва от физичния им смисъл) и $C_0, C_j, g_{\mathrm{BF}}$ са реални параметри. Полагаме

$$q_0 = \beta\tilde{q}_0,\ q_j = \alpha\tilde{q}_j,\ x = \gamma\tilde{x}.$$

След това избираме

$$\alpha = \sqrt{m_{\rm F}}, \beta = \sqrt{m_{\rm B}}, \gamma = \frac{1}{(m_{\rm B}\sqrt{g_{\rm BB}})}, g_{\rm BB} \neq 0.$$

Означаваме

$$\tilde{g}_{\rm BF} = g_{\rm BF}\alpha^2\gamma^2 m_{\rm B}, \tilde{\omega}_0 = \omega_0\gamma^2 m_{\rm B}, \tilde{\omega}_j = \omega_j\gamma^2 m_{\rm F},$$

$$\tilde{C}_j^2 = C_j^2\gamma^2/\alpha^4, \tilde{C}_0^2 = C_0^2\gamma^2/\beta^4.$$

Получаваме

$$\frac{1}{2}\frac{d^2\tilde{q}_0}{d\tilde{x}^2} - \tilde{q}_0^3 - \tilde{g}_{\rm BF}\left(\sum_{i=1}^{N_f}\tilde{q}_i^2\right)\tilde{q}_0 + \tilde{\omega}_0\tilde{q}_0 = \frac{\tilde{C}_0^2}{2\tilde{q}_0^3}, \qquad (0.0.25)$$

$$\frac{1}{2}\frac{d^2\tilde{q}_j}{d\tilde{x}^2} - \tilde{g}_{\rm BF}\tilde{q}_0^2\tilde{q}_j + \tilde{\omega}_j\tilde{q}_j = \frac{\tilde{C}_j^2}{2\tilde{q}_j^3}, \quad j = 1, \ldots, N_f.$$

За опростяване на разглежданията премахваме тилдите, пишем t вместо x и заместваме $p_j = \dot{q}_j, j = 0, \ldots, N_f$, (тук $\dot{} = d/dt$). Тогава системата (0.0.25) може да се разглежда като хамилтонова система с хамилтониан

$$\begin{aligned} H &= \frac{p_0^2}{2} + \frac{1}{2}\sum_1^{N_f} p_j^2 + \omega_0 q_0^2 + \sum_1^{N_f}\omega_j q_j^2 \\ &- g_{\rm BF}q_0^2\sum_1^{N_f} q_j^2 - \frac{q_0^4}{2} + \frac{C_0^2}{2q_0^2} + \frac{1}{2}\sum_1^{N_f}\frac{C_j^2}{q_j^2}. \end{aligned} \qquad (0.0.26)$$

За Хамилтоновата система с хамилтониан (0.0.26) разглеждаме следните случаи:

1) $C_0 = 0, C_j \neq 0, \omega_j = \omega^2/2, j = 1, \ldots, N_f$;

2) $C_0 \neq 0, C_j = 0, j = 1, \ldots, N_f$, $g_{\rm BF} = n(n+1)/2, n \notin \mathbb{Z}$;

3) $C_0 \neq 0, C_1 \neq 0, N_f = 1$, за достатъчно малко $g_{\rm BF}$.

Теорема 6. *За горните случаи хамилтоновата система с хамилтониан (0.0.26) е интегруема точно тогава, когато* $g_{\rm BF} = 0$.

Формулировката на тази теорема е такава, защото ние извършваме проверка само в случаите за $n = 1$ и $n = 2$. Проблем в доказателството на общия случай се явява, факта че членът с ненулев резидуум се променя в различните случаи. Изглежда правноподобно, че системата (0.0.26) е неинтегруема за всяко цяло $n > 2$.

С други думи, хамилтоновата система, която разглеждаме, е интрегруема само когато променливите ѝ се разделят.

Доказателството на този факт се базира на резултатите на Теорията на Зиглин-Моралес-Рамис-Симо. Този метод е прилаган за изследване на интегруемостта на системи с хомогенни потенциали, [65, 69, 68]. Класификацията на всички интегруеми системи с две степени на свобода, имащи полиномиални потенциали от степен 3, е получена в [52]. Разглежданата в тази работа система не е от този вид.

За естествените хамилтонови системи с две степени на свобода, подобни на разглежданата

$$H = \frac{p_1^2 + p_2^2}{2} + U(q_1, q_2),$$

съществува интегруемо обобщение на системата на Гарние, открито от Войчиеховски [94], а именно

$$U = Aq_1^2 + Bq_2^2 + (q_1^2 + q_2^2)^2 + \frac{C}{q_1^2} + \frac{D}{q_1^2},$$

с рационални първи интеграли, зависещи от A, B, C, D (вж. също [76]). Важно е да се отбележи, че в разглежданата система липсват симетрии и е нормално да очакваме интегруемост единствено в случая, когато променливите се разделят.

В главата „Увод“ са фиксирани означенията, изложени са основните дефиниции и теореми от теорията на хамилтоновите системи. Формулирани са задачите, които решава настоящата дисертация.

В Глава 1 е изложена Теорията на Зиглин-Моралес-Рамис, описани са резултатите от тази теория, които използваме съществено за доказване на нашите твърдения.

В Глава 2 намираме групата на Галоа на уравнението

$$w^{(4)} = 5w''(w^2 - w') + 5w(w')^2 - w^5 + (\lambda z + \alpha)w + \gamma,$$

а също така и на уравненията $\mathrm{P}_{\mathrm{II}}^{(2)}$ и $\mathrm{P}_{\mathrm{II}}^{(3)}$. От където следва неинтегруемост на съответната хамилтонова система.

В Глава 3 разглеждаме задачата за стационарните решения на Бозе-Ферми смеси (BFM) в едномерна оптична решетка. Доказана е неинтегруемост в смисъл на Лиувил на тази задача с изключение на случая $g_{BF} = 0$.

В „Допълнението“ са разгледани, някои свойства на G-функцията на Майер, от които се нуждаем за нашето изложение.

Глава 1

Интегруемост и диференциална теория на Галоа

В тази глава ще резюмираме някои факти от теорията за интегруемите хамилтонови системи и теорията на Зиглин-Моралес-Рамис, необходими за нашето изложение.

1.0.4 Интегруемост на Хамилтонови системи.

Нека (M, Ω) е симплектично многообразие с размерност $2n$, т. е. M е гладко многообразие, а Ω е затворена диференциална форма от ранг n. Нека H е гладка функция върху M.

Теорема 7. *(Дарбу)В околност на всяка точка x от симплектичното многообразие (M, Ω), съществува система от координати $(q_1, q_2, \ldots, q_n, p_1, p_2, \ldots p_n)$ (канонични координати), в които симплектичната форма Ω приема каноничния вид*

$$\Omega = \sum dp_i \wedge dq_i.$$

Тази теорема позволява директно да се разпространи върху всички симплектични многообразия всяко локално твърдение, което е инвариантно спрямо каноничните трансформации и е вярно

за стандартното фазово пространство $(\mathbb{R}^{2n}, \Omega = dp \wedge dq)$. Под *канонично преобразувание* разбираме такава смяна на променливите $(q_i, p_i), i = 1, \ldots, n$, която запазва 2-формата $\Omega = dp \wedge dq$. Симплектичната структура поражда изоморфизъм между тангенциалното и котангенциалното разслоения, с други думи има изоморфизъм между векторните полета от TM и 1-формите от T^*M към симплектичното многообразие (M, Ω). Това става по следния начин: да съпоставим на вектора ξ, който е от TM в симплектичното многообразие (M, Ω) в точка x, 1-формата Ω^1_ξ върху TM_x по формулата

$$\Omega^1_\xi(\eta) = \Omega^2(\eta, \xi), \qquad \eta \in TM_x.$$

Построеният по-горе изоморфизъм означаваме с $I : TM \to T^*M$. Нека сега H е функция върху симплектичното многообразие (M, Ω). Тогава dH е диференциална 1-форма върху M и на нея във всяка точка отговаря някакъв допирателен към M вектор. Така получаваме векторното поле IdH върху M. Векторното поле $IdH = X_H$ наричаме *хамилтоново векторно поле*, а H *функция на Хамилтон*. Следствие от Теоремата на Дарбу е, че всяка хамилтонова система може да се запише в канонични координати $(q_1, \ldots, q_n, p_1, \ldots, p_n)$ във вида

$$\dot{q_i} = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \dot{p_i} = -\frac{\partial H}{\partial q_i}, \qquad i = 1, \ldots, n.$$

Горната система наричаме уравнения на Хамилтон, съответстващи на хамилтониан H. Понякога използваме по-краткото записване $\dot{x} = X_H(x)$, където $x = (q_1, q_2, \ldots, q_n, p_1, p_2, \ldots p_n)$. Дефинираният изоморфизъм I налага върху гладките функции върху (M, Ω) структура на поасонова алгебра, дефинирана чрез скобката на Поасон $\{f, g\} = \Omega(X_f, X_g)$. В канонични координати тя има вида

$$\{f, g\} = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial g}{\partial q_i} - \frac{\partial f}{\partial q_i} \frac{\partial g}{\partial p_i} \right).$$

Функцията f е пръв интеграл за X_H тогава и само тогава, когато $\{H, f\} = 0$, т. е. когато H и f са в инволюция. В частност

H е винаги пръв интеграл на X_H. Казваме, че една хамилтонова система X_H е *напълно интегруема* (*интегруема по Лиувил*), ако притежава n функционално независими първи интеграли в инволюция.

Изборът на дефиниция за интегруемост се обосновава със следната основна теорема на Лиувил - Арнолд, която е в сила само за реална хамилтонова система и не притежава комплексен аналог.

Теорема 8. *(Лиувил- Арнолд [2]) Нека $\dot{x} = X_H(x)$ е реална хамилтонова система с n степени на свобода, дефинирана върху симплектично многообразие M. Да предположим, че съществуват n функционално независими първи интеграла $f_1 = H, f_2, \ldots, f_n$ в инволюция. Нека $M_b = \{x \in M : f_i(x) = b_i, i = 1, \ldots, n\}, b = (b_1, \ldots, b_n)$ е неособено многообразие на ниво в точката b, и нека $(df_1, \ldots, df_n)$ са линейно независими върху M_b. Тогава*

1. *Многообразието на ниво M_b остава инвариантно по потока на хамилтоновата система $\dot{x} = X_H(x)$. Ако M_b е компактно и свързано, то се разслоява на инвариантни подпространства с типичен слой n-мерен тор, $T^n = \mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$;*

2. *В околност на такъв тор съществува канонична система симплектични координати*

$$(I, \phi) = (I_1, \ldots, I_n, \phi_1, \ldots, \phi_n),\ \phi_i (\mathrm{mod}\, 2\pi),\ \phi_i \in T.$$

Ще ги наричаме променливи действие-ъгъл. Тогава хамилтоновата система за $\dot{x} = X_H(x)$ в тези координати има вида

$$\dot{I}_i = 0, \quad \dot{\phi}_i = \omega_i, \qquad i = 1, \ldots, n,$$

където честотите ω_i зависят само от променливите действие, т.е. $\omega_i = \omega_i(I_1, \ldots, I_n)$, и хамилтоновата система с хамилтониан H е интегруема в квадратури.

Въпреки, че ограничихме разсъжденията си само върху реални променливи, всички формулировки могат да се дефинират и в комплексна област. Така времето и каноничните променливи ще са комплексни променливи, многообразията ще са аналитични, функциите и полетата ще са аналитични или мероморфни. Единственото неудобство е, че с изключение на някои специални случаи, няма комплексен аналог на теоремата на Лиувил-Арнолд. Всъщност в общия комплексен случай липсва описание на топологията на многообразието на ниво и на дефинираното върху него хамилтоново векторно поле X_H. Тъй като ще се ограничим в доказването на неинтегруемост, ние няма да се интересуваме от топологията на дадената система, а ще търсим достатъчни условия, при които системата ще е неинтегрума.

Оттук нататък, когато говорим за хамилтонова система, ще имаме предвид аналитична хамилтонова система, дефинирана върху комплесно аналитично симплектично многообразие с комплексна размерност $2n$. Понякога ше отъждествяваме хамилтоновата система $\dot{x} = X_H(x)$ с хамилтоновото векторно поле X_H. Под интегруема хамилтонова система, в тази дисертация ще разбираме хамилтонова система, притежаваща n на брой интеграли (холоморфни или мероморфни) в инволюция.

1.0.5 Неинтегруемост на линейни системи диференциални уравнения.

В този параграф ще изложим необходимата ни диференциална теория на Галоа за линейни хомогенни системи диференциални уравнения, наречена още теория на Пикар - Весио по имената на откривателите ѝ.

Нека K е поле. Ще казваме, че изображението $\partial : K \to K$ е *диференциране*, ако е *линейно*

$$\partial(a+b) = \partial(a) + \partial(b), a, b \in K$$

и е *деривативно*

$$\partial(ab) = \partial(a)b + a\partial(b), \qquad a, b \in K.$$

Наредената двойка от поле и изображението диференциране (K, ∂_K) ще наричаме *диференциално поле*. Множеството $\{c \in K | \partial(c) = 0\}$ е подполе на диференциалното поле K, което ще означаваме с $\mathrm{const}(K)$ и ще наричаме *поле от константи*. Оттук нататък ще ползваме стандартното означение за диференциране a' вместо $\partial(a)$.

В настоящата работа всички полета, които ще разглеждаме, ще бъдат диференциални и с характеристика 0, а полето от константите ще бъде полето на комплексните числа $\mathbb{C}$. Един пример за диференциално поле е полето от рационални функции $\mathbb{C}(z)$ с диференциране d/dz и поле от константи $\mathbb{C}$.

Ще казваме, че L е *разширение* на диференциалното поле K, ако $L \supset K$ и $\partial_{L_{|K}} \equiv \partial_K$. Ще използваме стандартното означение за разширение – L/K. Под K-*автоморфизъм* ще разбираме изоморфизъм между полета $\sigma : L \to L$, такъв че $\sigma_{|K} \equiv id_K$ и $\partial \circ \sigma \equiv \sigma \circ \partial$. Множеството от всички K-автоморфизми за дадено диференциално разширение образуват група по отношение на операцията композиция, която ще означаваме стандартно с $Aut_K(L)$.

Главен обект на изследване в настоящата работа са линейните хомогенни системи диференциални уравнения $y' = Ay, A \in M_n(K)$.

Нека е дадена хомогенна система линейни диференциални уравнения

$$y' = Ay, \qquad A \in M_n(K), \tag{1.0.1}$$

където с $M_n(K)$ сме означили пространството от $n \times n$ матрици с елементи в K, а $y = (y_1, \ldots, y_n)^\tau$. С това уравнение ще свържем така нареченото разширение на Пикар-Весио.

Нека E/K е едно разширение на K, съдържащо множеството V от решения на (1.0.1). Винаги съществува минимално подполе $L \subset E$, съдържащо и K, и елементите на V - ще пишем $L = K(V)$

и ще казваме, че L е *диференциално поле над* K, *породено от елементите на* V.

Една обратима матрица $\Phi \in \mathrm{GL}_n(L)$ е фундаментална матрица за уравнението (1.0.1), ако е в сила $\Phi' = A\Phi$. Да предположим, че $\Phi, \tilde{\Phi} \in \mathrm{GL}_n(L)$ са две фундаментални матрици за уравнението (1.0.1). Дефинираме M чрез $\tilde{\Phi} = \Phi M$. Тогава $A\tilde{\Phi} = \tilde{\Phi}' = \Phi' M + \Phi M' = A\Phi M + \Phi M'$ и следователно $M' = 0$. Така получихме, че $M \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$. С други думи, множеството от всички фундаментални матрици (като подмножество на $\mathrm{GL}_n(L)$) за уравнението (1.0.1) се записва експлицитно като $\Phi.\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$.

Дефиниция 1.0.1. *Нека е дадено матричното диференциално уравнение (1.0.1) над* K. *Едно диференциално разширение* L/K *се нарича разширение на Пикар - Весио (*P - V*) на* K *за (1.0.1), ако*

1. $\mathrm{const}(L) = \mathrm{const}(K)$;
2. *съществува фундаментална матрица* $\Phi \in \mathrm{GL}_n(L)$ *за уравнението (1.0.1)* ;
3. L *е диференциално поле над* K, *породено от елементите на* Φ.

Нека L/K е $P-V$ разширение за (1.0.1) и нека L_1 е междинно разширение $L \supset L_1 \supset K$. Тогава L/L_1 е също $P-V$ разширение за някое обикновено диференциално уравнение над L_1. Изобщо, ще казваме, че L/K е $P-V$ разширение, ако то е такова за някое обикновено диференциално уравнение над K.

Ще отбележим, че за $\mathbb{C}(z)$ съществуването и единствеността (с точност до K-изоморфизъм) на разширение на Пикар-Весио на уравнението (1.0.1) е следствие от класическата теорема за съществуване и единственост за линейни системи диференциални уравнения.

Дефиниция 1.0.2. *Нека* L/K *е разширение на Пикар-Весио за уравнението (1.0.1). Диференциална група на Галоа* $G = Gal(L/K)$

на L над K наричаме групата от всички диференциални K-автоморфизми $Aut_K(L)$.

Дефиниция 1.0.3. *Една подгрупа на* $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$, *за някое* $n \in \mathbf{N}$, *е линейна алгебрична група над* $\mathbb{C}$ *при условие, че елементите ѝ са матрици, чиито коефициенти са нули на полиноми над* $\mathbb{C}$. *Една подгрупа на линейна алгебрична група е затворена, ако тя самата е линейна алгебрична група.*

Теорема 9. *Диференциалната група на Галоа на уравнението (1.0.1) е линейна алгебрична група.*

Доказателство. Ще дадем доказателство само на линейността като следваме [85]. Доказателството за затвореност може да бъде намерено например на същото място [85]. Диференциалната група на Галоа $G = Gal(L/K)$ на уравнението (1.0.1) е група от матрици. Наистина, нека $\Phi \in G_n(L)$ е фундаментална матрица на (1.0.1). Тогава за всяко $\sigma \in Gal(L/K), \sigma(\Phi)$ също е фундаментарна матрица на (1.0.1) и следователно $\sigma(\Phi) = \Phi R(\sigma)$ за някое $R(\sigma) \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$. Изображението

$$\rho : Gal(L/K) \to \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}), \qquad \sigma \mapsto R(\sigma),$$

е холоморфно групово влагане на $Gal(L/K)$ в $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$, откъдето следва, че $Gal(L/K)$ е линейна група.

Дефиниция 1.0.4. *Нека C е поле и m е цяло число. Ще казваме, че $Z \subset C^m$ е Зариски-затворено, ако съществува подмножество S на $C[z_1, \ldots, z_m]$ такова, че*

$$Z = \{(c_1, \ldots, c_m) \in C^m \mid f(c_1, \ldots, c_m) = 0 \ \text{ за всяко } \ f \in S\}.$$

Тъй като произволните сечения и крайните обединения на Зариски-затворени множества са Зариски- затворени, то можем да дефинираме топология от Зариски-затворени множества, наречена топология на Зариски. Всъщност според тази топология затворените

множества са точно алгебричните множества: нулите на полиноми с коефициенти в C. Ще отбележим, че ако C е безкрайно, то всеки две непразни отворени множества се пресичат. От теоремата на Хилберт за базиса (която гласи, че всеки идеал на пръстена $C[z_1, \ldots, z_m]$ е крайно породен) следва, че за тази топология е изпълнено условието за намаляващите редици от затворени множества (всяка редица от затворени множества $Z_1 \supset Z_2 \supset \ldots$ се стабилизира от известно място нататък). Тъй като $G = Gal(L/K)$ е алгебрична група, то груповите операции умножение и съпоставяне на обратен елемент са непрекъснати изображения. Това следва от факта, че ако Z е Зариски-затворено множество и $F : Z \to \mathbb{C}^n$ е изображение, зададено покомпонентно от рационални функции, чиито знаменатели не се анулират никъде в Z, то F е непрекъснато спрямо топологията на Зариски. Друго свойство на алгебричната група е, че една от свързаните ѝ компоненти съдържа единичния ѝ елемент. Тази свързана компонента се нарича свързана компонента на единичния елемент и стандартно се бележи с G^0. Твърдим, че G^0 е нормална подгрупа на G с краен индекс (вж. [42], стр. 28, Лема 4.5). Наистина използваме, че операцията съпоставяне на обратен елемент е непрекъсната. Тогава $(G^0)^{-1}$ е също свързана компонента на G и съдържа единичния елемент. Следователно съвпада с G^0, т.е. $(G^0)^{-1} = G^0$. Аналогично за произволно $\sigma \in G^0$ имаме $\sigma.G^0 = G^0$ и за всяко $\tau \in G$ е в сила $\tau.G^0.\tau^{-1} = G^0$.

По аналогия с класическата теория на Галоа формулираме така наречената Фундаментална Теорема на диференциалната теория на Галоа.

Теорема 10. *(Фундаментална Теорема на диференциална теория на Галоа) Нека L/K е разширение на Пикар-Весио с алгебрично затворено поле от константи C и с диференциална група на Галоа $G = Gal(L/K)$. Тогава*

1. *Съществува взаимно – еднозначно съответствие между Зариски-*

затворените подгрупи $H \subset G$ и диференциалните подполета $K \subset F \subset L$, дефинирано с

$$H \subset G \longmapsto L^H = \{a \in L \,|\, \sigma(a) = a \text{ за всяко } \sigma \in H\}$$
$$K \subset F \subset L \longmapsto Gal(L/F) = \{\sigma \in G \,|\, \sigma(a) = a \text{ за всяко } a \in F\}.$$

2. *Едно диференциално подполе $K \subset F \subset L$ е разширение на Пикар-Весио над K тогава и само тогава, когато $Gal(L/F)$ е нормална подгрупа на G и в този случай*

$$Gal(F/K) \cong Gal(L/K)Gal(L/F).$$

Като следствие от Фундаменталната теорема може да се покаже:

Твърдение 1.0.1. *Нека L, K и G са същите като в горната теорема.*

1. *За $a \in L$ имаме, че $a \in K$ тогава и само тогава, когато $\sigma(a) = a$ за всяко $\sigma \in Gal(L/K)$.*

2. *За $H \subset Gal(L/K)$ затварянето по Зариски $\overline{H}$ съвпада с $Gal(L/K)$ тогава и само тогава, когато $L^H = K$.*

3. *L^{G^0} е точно алгебричното затваряне $\widetilde{K}$ на K в L.*

Доказателството на Теорема 10 и Твърдение 1.0.1 може да се намери в Глава 1.3 от [85].

Вече можем да дадем строга дефиниция на понятието интегруемо линейно диференциално уравнение.

Дефиниция 1.0.5. *Нека K е диференциално поле с алгебрично затворено подполе от константи. Разширението L/K наричаме Лиувилово разширение на K, ако* $\mathrm{const}(L) = \mathrm{const}(K)$ *и съществува редица от разширения*

$$K = L_0 \subset L_1 \subset \ldots \subset L_n = L,$$

такава че за всяко $i = 1, \ldots, n, L_i = L_{i-1}(t_i)$ *и е в сила едно от условията:*

1. $t_i' \in L_{i-1}$ *(разширение с интеграл);*
2. $t_i \neq 0$ *и* $t_i'/t_i \in L_{i-1}$ *(разширение с експонента от интеграл);*
3. t_i *е алгебрично над* L_{i-1} *(алгебрично разширение).*

Казваме, че уравнението (1.0.1) е разрешимо, ако неговото разширение на Пикар-Весио е Лиувилово разширение.

Следната теорема формулира основната характеристика на Лиувиловите разширения.

Теорема 11. *Нека* L *е разширение на Пикар – Весио над* K *с диференциална група на Галоа* G*. Тогава следните две твърдения са еквивалентни*

1. L *е Лиувилово разширение над* K *;*
2. *свързаната компонента на единичния елемент* G^0 *на* G *е разрешима група.*

В настоящата работа връзката между диференциалната група на Галоа и групата на монодромия на дадено диференциално уравнение играе важна роля. В следващите няколко дефиниции и теореми накратко ще опишем някои аспекти на тази връзка. Ще следваме [24, 83, 84, 101, 3].

Да се върнем на уравнението (1.0.1), като $K = \mathbb{C}(t)$ (полето от рационални функции на комплексната променлива t с коефициенти в $\mathbb{C}$), $t' = 1$ и нека $A(t) \in \mathrm{gl}_n(\mathbb{C}(t))$.

Дефиниция 1.0.6. *Точката* t_0 *се нарича обикновена точка за уравнението (1.0.1), ако всичките елементи на матрицата* $A(t)$ *са аналитични функции в* t_0*. В противен случай* t_0 *се нарича сингулярна точка.*

Може да се разглежда и безкрайната точка $t = \infty$. Нека $x = \frac{1}{t}$. Тогава имаме $\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{x^2} A\left(\frac{1}{x}\right) y$. Следователно точката $t = \infty$ е обикновена или сингулярна точно когато точката $x = 0$ е обикновена или сингулярна за новото уравнение.

Нека $X = \mathbb{CP}^1 - \{\text{сингулярните точки на (1.0.1)}\}$, където $\mathbb{CP}^1$ е римановата сфера и нека $t_0 \in X$. От теоремата за съществуване знаем, че в достатачно малка околност O на точката t_0 съществува фундаментална матрица Φ, чиито елементи са аналитични в O. Нека γ е затворен път върху X, с начална точка t_0. Аналитичното продължение по γ дефинира ново фундаментално матрично решение Φ_γ в t_0. Връзката между двете фундаментални матрици се дава с

$$\Phi_\gamma = \Phi M_\gamma,$$

където $M_\gamma \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$. Матрицата M_γ се нарича матрица на монодромия. Матрицата на монодромия M_γ не зависи от избора на γ (в един и същи хомотопен клас). Ако пътят σ може да се получи от пътя γ чрез непрекъсната деформация, то $M_\sigma = M_\gamma$. Означаваме с $[\gamma]$ множеството от всички пътища, получени от γ чрез някаква непрекъсната деформация. Това множество стандартно се нарича хомотопен клас на пътя γ. Ако имаме два пътя σ и γ, под произведение $\tau = \sigma \circ \gamma$ се разбира пътят τ, получен по следния начин: първо обикаляме по γ, а след това по σ. Може да се покаже, че по този начин се дефинира произведение на хомотопни класове, т.е. $[\tau] = [\sigma] \circ [\gamma] = [\sigma \circ \gamma]$. Може да се дефинира обратният на γ път, γ^{-1} : обикаляме по γ в обратна посока. Коректна е и дефиницията $[\gamma]^{-1} := [\gamma^{-1}]$. По този начин хомотопните класове формират група върху X. Стандартно тя се означава с $\pi_1(X, t_0)$ и се нарича фундаментална група на X.

Ако изберем друга базисна точка t_0 за нашите пътища, то вместо матрицата M_γ, получаваме $CM_\gamma C^{-1}$, където C е неособена матрица (една и съща за всички пътища). Това означава, че фундаменталните групи във всички точки t_0 са изоморфни.

Матриците на монодромия образуват група $\mathcal{M}$ по отношение на операцията умножение на матрици, която е подгрупа на $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$. Наистина, от дефиницията на матрица на монодромия имаме, че $M_{\sigma\circ\gamma} = M_\gamma M_\sigma$, и следователно $M_{[\sigma\circ\gamma]} = M_{[\gamma]}M_{[\sigma]}$. По същия начин $M_{[\gamma]^{-1}} = M_{[\gamma]}^{-1}$. С други думи матриците на монодромия дефинират антихомоморфно представяне на $\pi_1(X, t_0)$ в $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$. Понеже аналитичните продължения запазват аналитичните отношения, то групата на монодромия се съдържа в диференциалната група на Галоа.

1.0.6 Линейни системи с особености.

Нека

$$y' = A(x)y, \quad y \in \mathbb{C}^n, \tag{1.0.2}$$

е линейна система.

Предполагаме, че за $t_1 = 0$. Тогава системата (1.0.2) може да бъде записана локално във вида

$$t^{r+1}y' = B(t)y, \tag{1.0.3}$$

където $B(t)$ е холоморфна в точката 0 и $r \in \mathbb{Z}$. Ако $r < 0$ точката $t = 0$ е регулярна точка; ако $r = 0$ точката $t = 0$ е регулярна сингулярна точка; ако $r > 1$, точката $t = 0$ е ирегулярна сингулярна. Система, която има само регулярни сингулярни точки, се нарича *фуксова*.

Дефиниция 1.0.7. *Системата $y' = A(t)\,y$ притежава сингулярност от фуксов тип в точката $t = 0$, ако матрицата $A(t)$ има прост полюс в $t = 0$.*

Съществува връзка между сингулярностите от фуксов тип и регулярните такива, която се дава със следното твърдение :

Твърдение 1.0.2. *Ако в системата $y' = A(t)\,y$ матрицата $A(t)$ може да се представи във вида $A(t) = \dfrac{A_0}{t} + A_1(t)$, където A_0 е*

константна матрица, а $A_1(t)$ *е холоморфна в* $t = 0$*, то тогава точката* $t = 0$ *е регулярна.*

Твърдение 1.0.2 казва, че ако системата $y' = A(t)\,y$ притежава особеност от фуксов тип, то тази особеност е регулярна. Обратното не е вярно. Съществува конструиран от Болибрух [13], пример за система, притежаваща само регулярни особености, но неприводима във фуксова система със същите особености и същата група на монодромия. Въпросният пример може да се намери и в книгата на Жоладек [101].

За да се пишат експлицитно фундаментални матрични решения е необходимо преди всичко правилно да се определи видът на особените точки.

Ще илюстрираме връзката между групата на монодромия на дадено уравнение и диференциалната му група на Галоа с два показателни примера ([84]).

1) Да разгледаме диференциалното уравнение $y' = \dfrac{\alpha}{t}y$. Неговото решение е $y = ce^{\alpha \log t} = ct^{\alpha}$. Сингулярните му точки са 0 и ∞. Тогава групата на монодромия на въпросното уравнение е

$$\mathcal{M} = \left\{(e^{2\pi i\alpha})^n | n \in \mathbb{Z}\right\}.$$

Ако $\alpha \in \mathbb{Q}$, то тази група е крайна и съвпада с диференциалната група на Галоа на уравнението. Групата на Галоа на това уравнение е крайна и циклична и ако $\alpha = \dfrac{p}{q}$, то $Gal = \{(c)\,|\,c^q - 1 = 0\} \subset \mathrm{GL}_1(\mathbb{C})$.

Ако $\alpha \notin \mathbb{Q}$, то групата на монодромия не е крайна и следователно е Зариски-гъста в $Gal = \mathrm{GL}_1(\mathbb{C}) = (\mathbb{C}^*, \times)$. Всъщност и в двата случая групата на монодромия $\mathcal{M}$ е Зариски-гъста в диференциалната група на Галоа.

2) Да разгледаме диференциалното уравнение $y' = y$. Неговото решение е $y = ce^t$. Единствената му сингулярна точка е ∞. Групата му на монодромия е тривиалната група

$$\mathcal{M} = \{1\}.$$

В този пример диференциалнта група на Галоа на уравнението е $\mathrm{GL}_1(\mathbb{C})$. Но групата на монодромия $\mathcal{M}$ не е Зариски-гъста в тази група.

В първия пример сингулярните точки са регулярни-сингулярни, а във втория - не са такива. За диференциални уравнения, притежаващи сингулярности само от вида регулярно-сингулярни имаме следното полезно твърдение:

Теорема 12. *(Шлезингер) Ако уравнението $y' = A\,y$ има само регулярни-сингулярни точки, то групата му на монодромия $\mathcal{M}$ е Зариски-гъста в диференциалната му група на Галоа.*

Доказателство. Ще се придържаме към доказателството от [84].

Нека L/K е Пикар- Весио разширение на K за уравнението $y' = A\,y$. Имаме, че $\mathcal{M} \subset Gal(L/K)$. Следвайки Твърдение1.0.1, достатъчно е да покажем, че ако $f \in L$ е лявоинвариантна под действието на $\mathcal{M}$, то $f \in K = \mathbb{C}(t)$. Ако f е лявоинвариантна при аналитично продължение върху X, то тогава f е еднозначна мероморфна функция върху X. Нека $\Phi = (\phi_{ij}), \phi_{ij} \in L$ е фундаментално матрично решение и нека $f \in \mathbb{C}(t, \phi_{ij})$. Регулярните-сингулярни особености предполагат, че f има полиномиален ръст в околност на сингулярните точки на уравнението $y' = Ay$ и в най-лошия случай тя е мероморфна функция в останалите точки от римановата сфера. От теоремата на Коши следва, че f е мероморфна върху римановата сфера и следователно тя е рационална функция. Това доказва твърдението.

Да разгледаме линейната система

$$\dot{x} = A(t)x, \quad x \in \mathbb{C}^n \tag{1.0.4}$$

с променлива t, дефинирана върху някаква риманова повърхнина. Означаваме полето от коефициенти на (1.0.4) с K. Нека x_{ij} са елементите на фундаменталната матрица $X(t)$. Нека $L(x_{ij})$ е разширението на K, породено от K и x_{ij} е диференциално поле. Това

разширение се *нарича разширение на Пикар- Весио*. Ще дефинираме на групата на Галоа, както е в класическата Диференциална Теория на Галоа $G := Gal_K(L) = Gal(L/K)$ е групата от всички диференциални автоморфизми на L, които оставят елементите на of K фиксирани. Групата на Галоа е, както е известно, алгебрична група. Тя притежава единствена свързана компонента G^0, която съдържа идинтитета и която е нормална подгрупа с краен индекс. Групата на Галоа G може да се представи като алгебрична линейна подгрупа на $GL(n, \mathbb{C})$ чрез

$$\sigma(X(t)) = X(t)R_\sigma,$$

където $\sigma \in G$ and $R_\sigma \in GL(n, \mathbb{C})$ (вж. също така [85]).

Следвайки Рамис, нека дадем кратко описание на локалната група на Галоа на (1.0.2) в 0, като предполагаме съществуването на иррегулярна сингулярна точка от ранг r.

Нека $K = \mathbb{C}\{x\}[x^{-1}]$ е полето на сходящите редове на Лоран около 0, а $\widehat{K} = \mathbb{C}[[x]][x^{-1}]$ е полето от формалните редове на Лоран около 0, а $K_t = \mathbb{C}\{t\}[t^{-1}]$ и $\widehat{K} = \mathbb{C}[[t]][t^{-1}])$ са същите обекти по отношение на променливата t и $A \in \mathrm{gl}(n, K)$. Както знаем от класическата теория, съществува формално фундаментално решение на (1.0.2) :

$$\widehat{Y}(t) = \widehat{H}(t)x^L e^{Q(t)}, \tag{1.0.5}$$

където $t^\sigma = x\,(\sigma \in \mathbb{N}^*)$, $\zeta = e^{2\pi i/\sigma}$, $L = Mat(n, \mathbb{C})$, $\widehat{H} \in \mathrm{GL}(n, \widehat{K}_t)$ and $Q = \mathrm{diag}(q_1, \ldots, q_n)$, $q_i \in t^{-1}\mathbb{C}[t], i = 1, \ldots, n$.

Дефиниция 1.0.8. *За системата (1.0.2), глобална група на Галоа (респективно локална група на Галоа за точка $a \in \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$) G (респективно G_a) на (1.0.2) над $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ (респективно $a \in \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$) е групата на Галоа Gal_K за $K = \mathbb{C}(x)$ (респективно K е полето $\mathbb{C}\{x_a\}[x_a^{-1}]$от зародишите на мероморфните функции за $a \in \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$, където с x_a отбелязваме локален параметър за a).*

Пример MP. Нека фиксираме точката $x_0 \in \mathbb{P}^1(\mathbb{C}) - S$, където

S е множеството от особените точки на (1.0.2) и нека Σ_{x_0} е аналитичният зародиш на фундаменталното решение на (1.0.2) в x_0. Продължаваме аналитично Σ_{x_0} до „секторен“ зародиш на фундаменталното решение за всяко $a \in S$ осигурявайки фиксиран брой на клоновете. По-точно нека U_a, за всяко $a \in S$, е отворен кръг с център a, заедно с локален параметър x_a около a и такъв, че $U_a \cap S = \{a\}$. Нека d_a е фиксиран лъч от a в U_a, заедно с точка $b_a \in d_a$ в U_a и път γ_a от x_0 до b_a. Аналитичното продължение на Σ_{x_0} над γ_a и d_a осигурява аналитичен зародиш Σ_a от фундаменталното решение в зародиша на отворен сектор с връх a, разполовяващ се от d_a. Нека G_a е локалната група на Галоа на (1.0.2) над $\mathbb{C}\{x_a\}[x_a^{-1}]$ спрямо Σ_a. Ако свържем елементите на G_a с така формулираното аналитично продължение, ние индуцираме инективен морфизъм на алгебрични групи $G_a \hookrightarrow G$ по отношение на представянето на тези групи в $\mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$ дадено чрез Σ_a и Σ_{x_0} съответно. По този начин всички $G_a \in S$ могат да бъдат едновременно отъждествени със затворените подгрупи на G.

Твърдение 1.0.3. *Глобалната група на Галоа G се генерира топологично в $\mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$ чрез подгрупите G_a, за $a \in S$.*

Сега нека да дефинираме останалите формални инвариантни.

Дефиниция 1.0.9. *Матрица на формалната монодромия $\widehat{M} \in GL_n(\mathbf{C})$ относно решението $\widehat{Y(x)}$ на (1.0.2, дефинирана чрез*

$$\widehat{Y}(t\zeta) = \widehat{Y}(t)\widehat{M} \tag{1.0.6}$$

Смяната на променливите $x \to xe^{2\pi i}$ комутира с диференцирането, така че се дефинира елемент $\widehat{m} \in G$, формалната монодромия ($t \to t\zeta$ комутира със съответното диференциране). Спрямо $\widehat{Y}$, автоморфизмът $\widehat{m}$ може да се представи чрез матрица $\widehat{M}$:

Дефиниция 1.0.10. *Експоненциален тор $\mathcal{T}$ на (1.0.2) спрямо $\widehat{Y}$ е групата от диференциалните $\widehat{K}_t$-автоморфизми на диференци-*

алното разширение

$$\widehat{K}_t(e^Q) = \widehat{K}_t(e^{q_1}, e^{q_2}, \ldots, e^{q_n}) \quad \text{от} \quad \widehat{K}_t.$$

$\mathcal{T}$ *е изоморфно на* $(\mathbb{C}^*)^l$, *където* l *е рангът на* $\mathbb{Z}$*-модула, породен от* q_i.

Предполагаме, че всички ненулеви $(q_i - q_j)$ за $1 \leq i, j \leq n$ са от една и съща степен k.

Дефиниция 1.0.11. *Отворен сектор* $S = S(a, b, \rho)$ *наричаме множеството от комплексни числа*

$$S = S(a, b, \rho) = \left\{x = re^{i\phi},\, 0 < r < \rho,\, d - \alpha/2 < \phi < d + \alpha/2\right\}.$$

Дефиниция 1.0.12. *Затворен сектор* $\overline{S} = \overline{S}(a, b, \rho)$ *наричаме множеството от комплексни числа*

$$\overline{S} = \overline{S}(a, b, \rho) = \left\{x = re^{i\phi},\, 0 < r \leq \rho,\, d - \alpha/2 \leq \phi \leq d + \alpha/2\right\}.$$

Всички ъглови направления и сектори се разглеждат върху универсалното накритие на единичния кръг, с други думи върху римановата повърхнина на логаритъма.

Дефиниция 1.0.13. *Сингулярно направление на (1.0.2) за решението* $\widehat{Y}$ *е ъглополовящ лъч на всеки максимален ъглов сектор, където* $Re(q_i(x^{1/\sigma}) - q_j(x^{1/\sigma}) < 0$ *за* $i,\, j = 1, \ldots, n$.

Дефиниция 1.0.14. *За дадено* $k > 0$ *и дадено направление* d, *формалният ред* $\widehat{f} = \sum_{n \geq 0} a_n x^n \in \mathbf{C}[[x]]$ *е* k*- сумируем по направление* d, *ако съществува пораждащ отворен сектор* V, *разположен от* d *с разтваряне по-голямо от* π/k *и холоморфна функция* f *върху* V, *удовлетворяваща*

$$|x|^{-n} \left| f(x) - \sum_{p=0}^{n-1} a_p x^p \right| < C_W (n!)^{1/k} A_W^n,\ \forall x \in W,\ \forall n \in \mathbf{N}^*,$$

за всеки подсектор $W \subset V$ *с константи* A_W *и* C_W, *зависещи само от* W. *Функцията* f *е единствена. Функцията* f *се нарича "*k*-сума на* $\widehat{f}$ *над* d*".*

Теорема 13. *(Туритин [90], Мартине-Рамис [63, 58]). С предположението, че матрицата $\widehat{H}$ е k- сумируема по всяка несингулярно направление d и ако с H означим k-сумата над d, тогава $Y = Hx^L e^Q$ е актуалното решение на (1.0.2). Освен това H може да се получи чрез трансформация на Борел-Лаплас, която индуцира инективен морфизъм от алгебрата на k-сумируемите редове над d към алгебрата от зародишите от холоморфни функции върху зародишите, разположени от d.*

Нека α е сингулярно направление на (1.0.2) в 0 и нека $\alpha^+ = \alpha+\varepsilon$ (респективно $\alpha^+ = \alpha - \varepsilon$), където $\varepsilon > 0$ е несингулярна околност на направлението α. Нека Y_{α^+} (респективно Y_{α^-}) са актуалните решения на (1.0.2), получена от $\widehat{Y}$ чрез Теорема13 като зародиш на сектор разположен от α^+ (α^-).

Дефиниция 1.0.15. *За дадено формално фундаментално решение $\widehat{Y}$ от вида на (1.0.5), матрица на Стокс (мултипликатор на Стокс) наричаме матрица $S_\alpha \in GL(n, \mathbf{C})$, отговаряща на сингулярно направление α на (1.0.2) в 0, дефинирана чрез $Y_{\alpha^-} = Y_{\alpha^+} S_\alpha$ върху α.*

Отбелязваме, че тази дефиниция не зависи от от избора на α^+ и α^- по-скоро е в сила за достатъчно близо до α [62]. Формалната монодромия $\widehat{M}$ и матриците на Стокс са сързани с равенството $\widehat{M} S_\alpha \widehat{M}^{-1} = S_{\alpha+2\pi}$. Актуалната монодромия M може да се възстанови чрез формалната монодромия и матриците на Стокс с формулата

$$M = \widehat{M} S_{\alpha_1} \dots S_{\alpha_n},$$

където $0 \leq \alpha_1 \leq \dots \alpha_r < 2\pi$ са сингулярните лъчи в x-равнината.

Теорема 14. *(Рамис) За формалното решение $\widehat{Y}$, дадено чрез Пример MP, аналитичната диференциална група на Галоа G на (1.0.2) в 0 е Зариски-затваряне в $\mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$ на подгрупите, генерирани от формалната монодромия $\widehat{M}$, експоненциалния тор τ и матриците на Стокс S_α за всички сингулярни лъчи α.*

Разглеждаме комплексно аналитично многообразие M с размерност $2n$ и нека X_H е аналитична хамилтонова система, дефинирана върху M. Нека Γ е риманова повърхнина, отговаряща на интегралната крива C, дефинирана чрез $z = z(t)$ на X_H. Тогава ние разглеждаме уравнението във вариации (VE)

$$\dot{\eta} = X_H'(z(t))\eta$$

на римановата повърхнина Γ. Полето от коефициенти на тази система е полето от мероморфни функции $\mathcal{M}(\bar{\Gamma})$, като $\bar{\Gamma}$ обобщение на Γ (включващо освен всички точки на Γ и особените точки, и (може би) безкрайната точка (за подробности може да се погледнат [65], [67])). Следващата теорема е доказана в [67]:

Обръщаме внимание на следния факт: при всички приложения на Теорема 3 се използват нормалните вариационни уравнения (NVE). (NVE) се получават от (VE) с процес на редукция (подробности могат да се видят в [65] и [67]). Тук ние ще разгледаме пълните (VE). Понататък в доказателството на Теорема 3 е доказано, че ако единичната компонента на групата на Галоа на (VE) върху Γ не е абелева, то хамилтоновата система няма достатъчен брой мероморфни интеграли в инволюция върху околност Γ.

Техниката за доказване на неинтегруемост, базирана на горната теорема, е следната: след като е покажем, че G^0 не е абелева, съответната хамилтонова система е неинтегруема в смисъл на Лиувил. Забелязваме и следния факт, ако G^0 е абелева, това не води непременно до интегруемост на хамилтоновата система. За интегруемостта е нужно нещо повече. Методът, който ще използваме, се базира на вариации от по-висок ред въведен в [65], където предишната теорема е разширена в [69]. Преди да формулираме този резултат, нека да въведем понятието уравнения във вариации от по-висок ред. За системата (0.0.2) с частно решение $\Psi(t)$, вземаме

$$x = \Psi(t) + \varepsilon\xi^{(1)} + \varepsilon^2\xi^{(2)} + \ldots + \varepsilon^k\xi^{(k)} + \ldots, \qquad (1.0.7)$$

където ε е формален малък параметър. Замествайки горните изрази в равенство (0.0.2) и сравнявайки коефициентите пред равните степени на ε получаваме следната верига от линейни нехомогенни уравнения

$$\dot{\xi}^{(k)} = A(t)\xi^{(k)} + f_k(\xi^{(1)}, \ldots, \xi^{(k-1)}), \quad k = 1, 2, \ldots, \tag{1.0.8}$$

където $A(t) = DX_H(\Psi(t))$ и $f_1 \equiv 0$. Уравнението (1.0.8) се нарича *k-то вариационно уравнение* (VE_k). Нека $X(t)$ е фундаменталната матрица на (VE_1)

$$\dot{X} = A(t)X.$$

Тогава решенията на (VE_k), $k > 1$ се намират с формулата на Лагранж

$$\xi^{(k)} = X(t)c(t), \tag{1.0.9}$$

където $c(t)$ е решение на

$$\dot{c} = X^{-1}(t)f_k. \tag{1.0.10}$$

Въпреки че (VE_k) не са точно хомогенни уравнения, те могат да бъдат поставени в същата рамка. Така може да се определи редица от разширения $K \subset L_1 \subset L_2 \subset \ldots \subset L_k$, където L_k е разширение, получено чрез прибавяне на решения на (VE_k). Съответно можем да дефинираме Групите на Галоа $Gal(L_1/K), \ldots, Gal(L_k/K)$.

Теорема 15. *Ако хамилтоновата система (0.0.2) е интегруема в смисъл на Лиувил, то единичните компоненти на всяка от групите на Галоа $Gal(L_k/K)$ е абелева.*

Да отбележим, че прилагаме Теорема 15 в ситуацията, когато единичната компонента на групата на Галоа $Gal(L_1/K)$ е абелева. Това означава, че първото вариационно уравнение е разрешимо. Вече имаме решението на (VE_1), следователно решенията на (VE_k) могат да се намерят с метода на Лагранж за вариране на константите. Оттук, групата на Галоа $Gal(L_k/K)$ е разрешима. Един възможен начин да се докаже некомутативност на съответната група

на Галоа е да се намери логаритмичен член на съответното решение (вж. за подробности и обяснения в [65, 69, 68]).

Съществуването на логаритмични членове (с ненулеви резидууми) в решението на вариационните уравнения е един възможен метод за доказване на неинтегруемост. Ще се спрем на него малко по-подробно. Предполагаме, че първите вариации на VE_1 на хамилтонова система около частно решение имат комутативна единична компонента на групата на Галоа $(G_1)^0$. Нямаме причини да се съмняваме в интегруемостта на хамилтоновата система. За простота ще разгледаме система с две степени на свобода с уравнения в първи вариации, която е директна сума на две уравнения на Ламе

$$\begin{aligned} \ddot{\xi}_1 &= (n_1(n_1+1)\wp(t) + B_1)\,\xi_1 \\ \ddot{\xi}_2 &= (n_2(n_2+1)\wp(t) + B_2)\,\xi_2, \end{aligned} \tag{1.0.11}$$

където полето от коефициенти на (1.0.11), както и полето от коефициенти на (VE_k), $k > 1$ е полето от елиптичните функции $K = \mathbb{C}(\wp(t), \wp(\dot{t}))$ изоморфно на полето на мероморфните функции върху Г. Спокойно можем да се ограничим на първи вариации, на две уравнения на Ламе (случая, който разглеждаме), но резултатите могат да се обобщят за n степени на свобода с първа вариация директна сума на n уравнения на Ламе.

Нека $K \subset L_1 \subset L_2 \subset \ldots \subset L_k$ е редицата от разширенията на Пикар-Весио на решенията на VE_k. Всяко разширение се получава чрез метода на Лагранж за вариране на константите. Тогава вземаме разширението L_k/L_1, използвайки само квадратури. Това разширение е напълно трансцендентно и според теорията на Пикар-Весио групата на Галоа $Gal(L_k/L_1)$ е свързана. Ако групата на Галоа G_1 е също свързана тогава разширението $K \subset L_1$ е също трансцендентно, пълното разширение на Пикар-Весио $K \subset L_k$ от VE_k е трансцендентно и $G_k = (G_k)^0$. Доказахме следната

Лема 1.0.1. *При направените по-горе предположения, $G_k = (G_k)^0$ тогава и само тогава, когато $G_1 = (G_1)^0$.*

Уравненията във вариации VE_1 са фуксови. Тогава вариационните уравнения от по-висок ред VE_k (по-точно техните линейни части) са също фуксови и G_k е Зариски- затваряне на техните групи на монодромия. В сила е следната

Лема 1.0.2. *Предполагаме, че първите вариации VE_1 на уравненията на Ламе със n_1 и $n_2 \in \mathbb{Z}$ (1.0.11)са фуксови. Тогава G_k е комутативна, тогава и само тогава, когато решенията на VE_k са мероморфни функции по променливата t.*

Доказателство. Групите от монодромия на всяко от VE_k са линейно представяне на фундаменталната група на $\Gamma - \{\infty\}$ (точката ∞ се представя в параметризацията на Вайершрас с подходящи периоди) и тази фундаментална група е свободна, некомутативна и е породена от транслациите на периодите. Комутаторът на тези два генератора се представя като прост цикъл около особената точка ∞. В такъв случай групата на монодромия е комутативна тогава и само тогава, когато монодромията, асоциирана с този цикъл, е тривиална. В Зариски-затварянето, деференциалната група на Галоа G_k е комутативна тогава и само тогава, когато съответната подгрупа на монодромия е комутативна.

В такъв случай ние ще проверяваме комутативността на G_k локално в ∞. Палучавайки рекурсивно изрази в степенни редове за решения на VE_{k-1} и квадратури, не е трудно да се провери, че VE_k има разклонено решение в 0. Единственото нещо, което трябва да се направи е да се провери дали полученото решение има ненулев резидуум, който при интегрирането при метода на вариране на константите се превръща (локално) в логаритъм.

Предполагаме, че двете уравнения (1.0.11) имат частно решение в полето от коефициенти на елиптичните функции. Тогава групата

на Галоа на 1.0.11 се дава с матрици (унипотентни) от вида

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \alpha & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \beta & 1 \end{pmatrix}. \tag{1.0.12}$$

и $G_1 \subset (\mathbb{C}^2, +)$. Тъй като G_1 е тривиална, следователно е или $(\mathbb{C}, +)$, или $(\mathbb{C}^2, +)$. Във всеки един от случаите $G_1 = (G_1)^0$ е комутативна. Следователно според Лема 1.0.1 $G_k = (G_k)^0$ и Лема 1.0.2 $(G_k)^0$ е комутативна тогава и само тогава, когато решенията на VE_k са мероморфни функции на променливата t.

Лема 1.0.3. *Нека уравненията в първи вариации VE_1 се представят като директна сума на две уравнения на Ламе (1.0.11) с цели параметри n_1 и n_2 и групата на Галоа на нормалните вариационни уравнения не е крайна. Тогава G_k е комутативна тагава и само тогава, когато $(G_k)^0$ е комутативна.*

Доказателство. Първо ще изучим групата на Галоа G_1 на уравненията в първи вариации. Тангенциалното вариационно уравнение има решение в полето от мероморфните функции на елиптичната интегрална крива Γ, $K = \mathcal{M}(\Gamma)$. Тя попада в случая на уравнението на Ламе, а неговата група на Галоа и свързана. Редуцираме проблема до изучаване на на нормалната първа вариация NVE например в първото уравнение на (1.0.11)

$$\ddot{\xi}_1 = (n_1(n_1+1)\wp(t) + B_1)\,\xi_1.$$

Това уравнение попада в един от случаите

a) на Ламе

b) на Ермит.

В първия случай, едно от частните решения е функция на Ламе ξ_1 което лежи или в K или в квадратично разширение $\bar{K}$ на K, а другото независимо решение е трансцендентно. Ако $\xi_1 \in K$, тогава $G_1 = (G_1)^0$, следователно $G_k = (G_k)^0$ и резултатът е тривиален. Следователно можем да предположим, че $\xi_1 \notin K$. Ще покажем само, че ако $(G_k)^0$ е комутативна, то G_k е също комутативна. Допускаме противното: съществува $k \in \mathbf{N}$, $k \geq 2$, такова че $(G_k)^0$ е комутативна, а G_k не е комутативна и k е най-малкото с това свойство: $G_{k'}$ е комутативна за всяко $1 \leq k' < k$. Тогава според Лема 1.0.2, за всяко $1 \leq k' < k$, решенията на $VE_{k'}$ са решения на $VE_{k'}$ и са мероморфни функции на променливата t.

Нека K е полето на мероморфните функции върху елиптичната крива $E = \mathbb{C}/(2\,\mathbb{Z}\,\omega_1 \oplus 2\,\mathbb{Z}\,\omega_3)$. Разглеждаме полето K_1 от мероморфните функции върху елиптичната крива $E_1 = \mathbb{C}/(4\,\mathbb{Z}\,\omega_1 \oplus 4\,\mathbb{Z}\,\omega_3)$. Идентитета на $\mathbb{C}$ индуцира изображение $\pi : E_1 \to E$ и влагане $K \subset K_1$, π е накритие от ред 4 и $Gal(K_1/K)$ е група от ред 4, изоморфна на $\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$. Ние получаваме следните включвания на диференциални полета $K \subset \bar{K} \subset K_1$ и $Gal(L_k/\bar{K}) = (G_k)^0$, следователно действието на монодромията на E_1 върху решенията на VE_k е комутативно. Разглеждаме успоредника $\Pi \subset \mathbb{C}$, дефиниран от четирите точки $-\omega_1 - \omega_3$, $3\omega_1 - \omega_3$, $3\omega_1 + 3\omega_3$, $-\omega_1 + 3\omega_3$. Това е фундаментална област за елиптичната крива $E_1 = \mathbb{C}/(4\mathbb{Z}\omega_1 \oplus 4\mathbb{Z}\omega_3)$ и ориентираната граница $\partial\Pi$ на Π, отговаряща на комутатора на двата фундаментални цикъла на E_1.

Ако G_k не е комутативна, то съществува решение на VE_k с разклонение в нулата $(mod(\omega_1, \omega_3)$, с единствена особеност на VE_k $(mod(2\omega_1, 2\omega_3)$. Тогава ако пресметнем решенията на VE_k използвайки израза Σ в решенията на $VE_{k'}$, за $1 \leq k' < k$ и квадратура, забелязваме, че една от скаларните компоненти ζ на изразите за Σ е мероморфна функции на променливата t, с полюс в 0, такъв че отговаря на резидуума a, който не е 0 (ако това не е така, тогава всички решения на VE_k са мероморфни функция на t и G_k

е комутативна). Ако интепретираме ζ като функция (разклонена евентуално) върху E_1 ние получаваме точно четири полюса в 0, $2\omega_1$, $2\omega_2$, $2\omega_1 + 2\omega_2$ (използвайки променливата t, има 4 полюса във фундаменталната област П), съответните резудууми на ζ са a, a, a, a. Следователно действието на цикъла $\partial\Pi$ върху $\int \zeta(t)$ е $\int \zeta(t) + 8ai\pi$ и не е тривиално. Следователно действието на комутатора върху фундаменталните цикли на E_1 на някои частни решения на VE_k не е тривиално, което е противоречие. За случая b) доказателството е по-трудно, защото групата на Галоа на NVE е мултипликативна група, ако предположим, че групата на Галоа не е крайна. Следователно групата на Галоа G_1 е свързана и групите на Галоа от по-висок ред G_k също трябва да са свързани. Това завършва доказателството.

Разглеждайки доказателството ние използвахме факта, че тангенциалните вариационни уравнения попадат точно в случая на Ламе, едното от решенията на което е в полето K от елиптични функции, друго от частните решения се получава чрез диференциране по t на функцията, която е дефинирана върху интегралната крива Г. От друга страна ние получихме, че всички групи на Галоа в този случай не са крайни. Ето защо като следствие получаваме следния логаритмичен критерий за неинтегруемост.

Твърдение 1.0.4. *Предполагаме, че:*

1. Вариациите от първи ред VE_1 се представят като директна сума на две уравнения на Ламе 1.0.11, с цели n_1 и n_2 (тангенциалното и нормалното вариационни уравнения, NVE),

2. Групата на Галоа на NVE не е крайна.

Тогава достатъчно условие за мероморфна неинтегруемост е съществуването на локолен логаритъм за $t = 0$ при частното решение на уравненията от по-високи вариации VE_k, $k > 1$.

1.0.7 Условия за интегруемост на хамилтонови системи с (NVE) от Ламе тип.

В този параграф ще припомним някои добре известни факти, свързани с интегруемостта на хамилтовови системи с две степени на свобода, за които (NVE) е от Ламе тип. Подробности можем да намерим в [40, 65].

Нека разгледаме уравнението на Ламе, записано в класическа форма

$$\ddot{\xi} - [n(n+1)\wp(t) + B]\xi = 0, \tag{1.0.13}$$

където $\wp(t)$ е функцията на Вайершрас с инварианти g_2 и g_3, удовлетворяващи $\dot{v}^2 = 4v^3 - g_2 v - g_3$ с $\Delta = g_2^3 - 27g_3^2 \neq 0$.

Известните (взаимно изключващи се) случаи на решения на уравнението (1.0.13) са:

(i) Решения на Ламе и Ермит . В този случай $n \in \mathbb{Z}$ и g_2, g_3, B са известните от по-горе параметри;

(ii) Решения на Вриоши-Халфен-Крауфорд. Тук $m := n+1/2 \in \mathbb{N}$ и параметрите g_2, g_3, B трябва да удовлетворяват алгебрично уравнение.

(iii) Решения на Балдазари. Сега $n + 1/2 \in \frac{1}{3}\mathbb{Z} \cup \frac{1}{4}\mathbb{Z} \cup \frac{1}{5}\mathbb{Z} \setminus \mathbb{Z}$ с допълнителни алгебрични връзки между другите параметри.

Отбелязваме, че в случая (i) единичната компонента на групата на Галоа G^0 е във вида $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \nu & 1 \end{pmatrix}$, а в случаите (ii) и (iii) $G^0 = id$ (G е крайна). Това са единствените случаи, когато уравнението на Ламе е интегруемо.

Нека да разгледаме Хамилтонова система с две степени на свобода

$$H = \frac{1}{2}(p_1^2 + p_2^2) + V(q_1, q_2), \tag{1.0.14}$$

$q_j(t) \in \mathbb{C}, p_j(t) = \dot{q}_j, j = 1, 2$. Предполагаме, че съществуват фамилия от решения във вида

$$\Gamma_h : q_2 = p_2 = 0, \quad q_1 = q_1(t, h), \quad p_1(t, h) = \dot{q}_1(t, h)$$

и $q_1(t,h)$ е решение на

$$\frac{1}{2}\dot{q}_1^2 + \varphi(q_1) = h, \quad h \in \mathbb{R}.$$

(NVE) спрямо Γ_h е

$$\ddot{\xi} - \alpha(t,h)\xi = 0, \tag{1.0.15}$$

където $\alpha(t,h) = \alpha(q_1(t,h))$ е такова, че (1.0.15) е от вида (1.0.13).

В [40, 65] вида на потенциалите V с това свойство е получен по-скоро като условия за интегруемост на хамилтонова система с хамилтониан (1.0.14). С цел да формулиране на резултат на този параграф, имаме нужда от няколко допълнителни съотношения.

Понеже $\alpha(t,h)$ зависи линейно от $\wp(t)$, то $\dot{\alpha}^2$ е кубичен полином на α, завесещ също и от h, по-точно

$$\dot{\alpha}^2 := P(\alpha,h) = P_1(\alpha) + hP_2(\alpha). \tag{1.0.16}$$

Въвеждаме следните коефициенти

$$P(\alpha,h) = (a_1+ha_2)\alpha^3+(b_1+hb_2)\alpha^2+(c_1+hc_2)\alpha+(d_1+hd_2). \tag{1.0.17}$$

Сега сме готови да формулираме нашият резултат. Отбелязваме, че следната Теорема дава необходимите условия само за анализ на уравнението в първи вариации.

Теорема 16. *(Теорема 6.2 [65]). Предполагаме, че хамилтоновата система притежава (NVE) в Ламе тип, присъединена към фамилията от решения Γ_h, лежаща в равнината $q_2 = 0$ и параметризирана с помощта на енергията h. Тогава, необходимите условия за интегруемост са свързаните полиноми P_1 и P_2 да удовлетворяват $a_2 = 0$, и едно от следните условия:*

1. $a_1 = \frac{4}{n(n+1)}$ за някое $n \in \mathbb{N}$;

2. $a_1 = \frac{16}{4m^2-1}$ за някое $m \in \mathbb{N}$. Тогава, предполагайки, че горните условия са изпълнени, тогава $b_2 = 0$ и са възможни следните случаи:

2.1) $m = 1$ *и* $b_1 = 0$,

2.2) $m = 2$ *и* $c_2 = 0$, $16a_1c_1 + 3b_1^2 = 0$,

2.3) $m = 3$ *и* $16a_1d_2 + 11b_1c_2 = 0$, $1024a_1^2d_1 + 704a_1b_1c_1 + 45b_1^3 = 0$,

2.m) $m > 3$. *Тогава, имаме* $b_1 = 0$ *и освен това или* $c_1 = c_2 = 0$, *ако* m *е сравним с* $1, 2, 4$ *или* 5 *по модул* 6, *или* $d_1 = d_2 = 0$, *ако* m *е нечетно;*

3. $a_1 = \frac{4}{n(n+1)}$ *с* $n + 1/2 \in \frac{1}{3}\mathbb{Z} \cup \frac{1}{4}\mathbb{Z} \cup \frac{1}{5}\mathbb{Z} \setminus \mathbb{Z}$, $b_2 = 0$ *и* $c_2 = 0$, $b_1^2 - 3a_1c_1 = 0$ *или* $c_2b_1 - 3a_1d_2 = 0, 2b_1^3 - 9a_1b_1c_1 + 27a_1^2d_1 = 0$.

Ясно е, че условието 1. в горната Теорема дава решенията на Ламе и Ермит (i), условието 2.– решенията на Вриоши-Халфен-Крауфорд (ii), и условието 3. – решенията на Балтазари (iii).

1.0.8 Самопресичащи се комплексни сепаратриси.

Ще опишем една алгебрична интерпретация на Теорията на Пикар-Весио за резултата на Зиглин за самопресичащи се комплексни сепаратриси на периодични по времето пертурбирани комплексни хамилтонови системи с една степен на свобода. Ще започнем с реалния случай. Нека да имаме реална хамилтонова система с една степен на свобода X_{H_0} и хамилтониан $H_0(x, y)$, и хиперболична точка на равновесие и интегрална крива, отговаряща на частното решение $x_0(t)$, $y_0(t)$, т. е. $\Gamma_0 : (x_0(t), y_0(t))$, асимптотична в точката на равновесие. Например Γ_0 е хомоклинична интегрална крива. Изследваме интегруемастта на тази система, подложена на малка периодична пертурбация. По-конкретно, разглеждаме реалноаналитичен хамилтониан $H(x, y, t, \varepsilon) = H_0(x, y) + \varepsilon H_1(x, y, t) + \ldots$, където ε е малък параметър, а H е периодична по t. Много ефективно средство за изучаване на интегруемостта на пертурбираната система за достатъчно малко ε е така нареченият интеграл

на Поанкаре-Арнолд-Мелников ([78], [5], [61]).

$$\mu(t_0) := \int_{-\infty}^{+\infty} \{H_0,\, H_1\}(x_0(t),\, y_0(t),\, t + t_0)\, dt,$$

където $\{,\}$ са скобките на Поасон, т. е. $\{f,\, g\} = \dfrac{\partial f}{\partial x}\dfrac{\partial g}{\partial y} - \dfrac{\partial f}{\partial y}\dfrac{\partial g}{\partial x}$. Когато функцията $\mu(t_0)$ има прости нули, устойчивите или неустойчиви сепаратриси на пертурбираната хамилтонова система се пресичат трансверзално и това се явява препятствие за пълната интегруемаст в система аналитични първи интеграли. Сега разглеждаме обобщението на системата X_H за комплексни стойности на променливите (включително и времето). Наблюдават се някои прилики между метода на Поанкаре-Арнолд-Мелников и разклоняването на решението на пертурбираната система при комплексно време ([98], [30]]). Грубо казано, Зиглин доказва за пертурбации на хамилтонови системи с една степен на свобода, че ако интеграла на Поанкаре-Арнолд-Мелников, пресметнат по затворен цикъл в равнината на комплексното време, има прости нули, тогава сепаратрисите се пресичат трансверзално. Целта на тази част от изложението е да се даде алгебрична интерпретация на този резултат в контекста на теорията на Пикар-Весио за линейни диференциални уравнения. При някои предположения, може да се покаже, че условията за интеграла на Поанкаре-Арнолд-Мелников, формулирани от Зиглин, могат да се интерпретират като неабелевост на групата на Галоа на пертурбираното уравнение във вариации зеедно с интегралната крива Γ_0. Тук следваме [66] и [67].

Нека M_0 е двумерно комплексно аналитично симплектично многообразие и X_{H_0} е комплексно холоморфно хамилтоново векторно поле върху M_0 с хамилтониан H_0. Локално, в симплектични координати, H_0 е функция на $x,\, y \in \mathbb{C}^2$. Предполагаме, че съответната хамилтонова система

$$\dot{x} = \frac{\partial H_0}{\partial y},\, \dot{y} = -\frac{\partial H_0}{\partial x} \tag{1.0.18}$$

има хиперболична точка на равновесие $(x_0,\, y_0)$, т. е. собствените

стойности $\pm\lambda$ на линейната част на $X_{H_0)}$ в $(x_0,\, y_0)$ имат ненулеви реални части. Тогава системата (1.0.18) има сепаратриса

$$\Gamma_0 \qquad : \qquad \lim_{t\to\infty} x_0(t) = x_0,\, \lim_{t\to\infty} y_0(t) = y_0. \tag{1.0.19}$$

Предполагаме, че функциите $x_0(t)$, $y_0(t)$ са мероморфни по $t \in \mathbb{C}$.

Нека

$$H(x,\, y,\, t,\, \varepsilon) = H_0(x,\, y) + \varepsilon H_1(x,\, y,\, t) + \dots$$

е мероморфна малка (комплексна) пертурбация на H_0. Предполагаме, че H е периодична по t с реален период 2π. Тази функция H е дефинирана над $M = M_0 \times F_{2\pi}$, като $F_{2\pi} = \mathbb{C}/2\pi\mathbb{Z}$ за римановата повърхнина дефинирана, за периода. В общия случай, ще пишем $F_{2\omega} = \mathbb{C}/2\omega\mathbb{Z}$ за римановата повърхнина дефинирана за период $\omega \in \mathbb{C}$. Хамилтоновата система, дефинирана с $H = H(x,\, y,\, \theta)$ над M се дава чрез

$$\dot{x} = \frac{\partial H}{\partial y},\, \dot{y} = -\frac{\partial H}{\partial x},\, \dot{\theta} = 1,\, (x,\, y,\, \theta) \in M. \tag{1.0.20}$$

Удобно е да разглеждаме непертурбираната система (1.0.18), като дефинирана над M, т. е. като директна сума на (1.0.18) $\dot{\theta} = 1$:

$$\dot{x} = \frac{\partial H_0}{\partial y},\, \dot{y} = -\frac{\partial H_0}{\partial x},\, \dot{\theta} = 1,\, (x,\, y,\, \theta) \in M. \tag{1.0.21}$$

Системата (1.0.20) се свежда до системата (1.0.21) за $\epsilon = 0$, тя има хиперболична 2π-периодична орбита, $\Pi_0 \,:\, (x_0,\, y_0,\, \theta = t\,(mod\, 2\pi))$. Известно е, че за малко $|\varepsilon|$, системата (1.0.20) също има 2π- периодично решение $\Pi_\varepsilon \,:\, (x_p(t,\, \varepsilon),\, y_p(t,\, \varepsilon),\, \theta = \theta_0 + t\,(mod\, 2\pi))$, такова че $x_p(t,\, 0),\, y_p(t,\, 0) = (x_0,\, y_0)$. Тагава дефинираме устойчивата комплексна сепаратриса Λ^+_ε на системата (1.0.20) като множесвото от интегралните криви на (1.0.20) клонят към Π_ε, когато $t \to \infty$. За фиксирано ε това е двумерна комплексна повърхнина. Тази сепаратриса трябва да има трансверзално самопресичане.

Да припомним, че в реалния случай, ако сепаратрисите не се самопресичат трансверзално, това може да се случи само между

устойчива и неустойчива сепаратриси. За реални хамилтонови системи, съществуването на такова пресичане на орбити е принос към хаотичното поведение и това е предпоставка за съществуване на допълнителен аналитичен пръв интеграл. Зиглин доказва това за комплексни хамилтонови системи. Съществуването на самопресичане (трансверзално) на сепаратрисите е предпоставка за интегруемост на системата (1.0.20). Пресмятането на интеграла на Поанкаре - Арнолд - Мелников по затворени цикли дава условие за интегруемост на системата.

Непертурбираната сепаратриса се дава чрез $\Lambda_0^+ = \Gamma_0 \times F_{2\pi}$. Това поражда едно-параметрична фамилия интегрални криви

$$\Gamma_{\theta_0} \quad : \quad (x_0(t),\, y_0(t),\, t + \theta_0), \tag{1.0.22}$$

$\theta_0 \in F_{2\pi}$ (параметърът е θ_0).

Нека $\gamma : [0,\, 1] \to \mathbb{C}$ е затворен път в комплексната равнина, като $\gamma(0) = \gamma(1) \in \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$. Дефинираме функция върху $F_{2\pi}$

$$\mu(\theta_0) := \int_\gamma \{H_0, H_1\}(x_0(t), y_0(t), t + \theta_0)dt. \tag{1.0.23}$$

Това е интегралът на Поанкаре-Арнолд-Мелников в този контекст. Тогава

Теорема 17. *(Зиглин) Ако функцията $\mu(\theta_0)$ има проста нула, то за достатъчно малко $|\varepsilon| \neq 0$, сепаратрисата Λ_ε^+ има трансверзално самопресичане и системата (1.0.20) не притежава допълнителен холоморфен пръв интеграл.*

Ако разгледаме системата (1.0.20) като хамилтонова система с две степени на свобода, заключението от теоремата на Зиглин е това, че за $|\varepsilon| \neq 0$ и достатъчно малко, тази система не е напълно интегруема с холоморфни първи интеграли.

Сега ще покажем връзката с теорията на Пикар-Весио. Предполагаме, че мероморфните функции $x_0(t)$, $y_0(t)$ са периодични по имагинерната ос с период $i\omega$. Тогава $x_0(t)$, $y_0(t) \in \mathcal{M}(F_{i\omega})$, т. е.

полето на мероморфните функции над риманова повърхнина, дефинирана за периода $i\omega$. Отбелязваме, че при тези предположения винаги имаме върху Γ_0 хомоклинична орбита. Истина е, че при $t \to \pm\infty$ по реалната права, доминиращата част на $x_0(t)$, $y_0(t)$ се дават от експоненти на периода $\omega = Re(\frac{2\pi}{\lambda})$, където $\pm\lambda$ са собствените стойности на хиперболичната точка на равновесие $(x_0,\, y_0)$ (за подробности [99]).

Методът на Поанкаре-Арнолд-Мелников обикновено се базира на формулата за вариране на константите, приложена върху пертурбираното вариационно уравнение заедно с непертурбираната еднопараметрична фамилия от интегрални криви Γ_{θ_0} ([33]). Ние ще изучим диференциалната група на Галоа за това уравнение.

Пертурбираното вариационно уравнение (PVE) на 1.0.20 за Γ_{θ_0} се дава чрез

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix}\xi\\ \eta\\ \nu\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} H_{0,xy} & H_{0,yy} & H_{1,y} \\ -H_{0,xx} & -H_{0,xy} & -H_{1,x} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix}\xi\\ \eta\\ \nu\end{pmatrix}, \tag{1.0.24}$$

където за простота пишем $H_{0,xy}$, $H_{0,yy}$, $H_{0,xx}$, $H_{1,y}$ и $H_{1,x}$ за рестрикциите на тези функции на Γ_{θ_0}, т. е. $H_{0,xy} = H_{0,xy}(x_0(t),\, y_0(t))$, $H_{0,yy} = H_{0,yy}(x_0(t),\, y_0(t))$, $H_{0,xx} = H_{0,xx}(x_0(t),\, y_0(t))$,

$$H_{1,y} = H_{1,y}(x_0(t),\, y_0(t),\, t),\; H_{1,x} = H_{1,x}(x_0(t),\, y_0(t),\, t+\theta_0).$$

Забелязваме, че уравнението (1.0.24) е хомогенно диференциално уравнение, еквивалентно на нехомогенното диференциално уравнение (също PVE)

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix}\xi\\ \eta\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} H_{0,xy} & H_{0,yy} \\ -H_{0,xx} & -H_{0,xy} \end{pmatrix}\begin{pmatrix}\xi\\ \eta\end{pmatrix} + \begin{pmatrix} H_{1,y} \\ -H_{1,x} \end{pmatrix}, \tag{1.0.25}$$

(вж. [33], [5]). Хомогенната част на (1.0.25) е вариационната част на интегруемата непертурбирана система (1.0.18) над Γ_0.

Ключова точка за приложението на теорията на Пикар-Весио е изборът на поле от коефициенти K. За упростяване на този избор,

ние предполагаме, че функциите $x_0(t)$, $y_0(t)$ лежат в диференциалното поле $\mathbb{C}(e^{\frac{2\pi t}{\omega}})$ и също така, че пертурбацията H_1 зависи от x и y като рационална функция, а t е рационална функция в e^{it}. Най-общо, тези предположения са достатъчни за нашите приложения. При тези предположения ние вземаме за K разширението $\mathbb{C}(e^{\frac{2\pi t}{\omega}}, e^{it})$. Тогава е ясно, че K е диференциално поле, такова че коефициентите на (1.0.24) лежат в това поле.

За фиксирано θ_0, разширението на Пикар-Весио на (1.0.24) се дава чрез $K \subset L_{\theta_0} := K(u_{11}, \ldots u_{33})$, където $U(t) := (u_{ij})$, $i, j = 1, 2, 3$, е фундаменталната матрица на на (1.0.24). Ще означим с $Gal(PVE)$ групата на Галоа на това разширение, т. е. $Gal(PVE) = Gal(L_{\theta_0}/K)$.

Фундаменталната матрица на (1.0.24) се дава с

$$U = \begin{pmatrix} U_0 & U_0 & \int U_0^{-1} \begin{pmatrix} H_{1y} \\ -H_{1x} \end{pmatrix} dt \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \tag{1.0.26}$$

като U_0 е фундаменталната матрица на на хомогенната част от (1.0.25)

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} H_{0,xy} & H_{0,yy} \\ -H_{0,xx} & -H_{0,xy} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} := A\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}. \tag{1.0.27}$$

Коефициентите на това уравнение са в $\mathbb{C}(e^{\frac{2\pi t}{\omega}}) \subset \mathbb{C}(e^{\frac{2\pi t}{\omega}}, e^{it}) = K$.

Фундаменталната матрица на (1.0.27) е

$$U_0 = \begin{pmatrix} H_{0y} & a \\ -H_{0x} & b \end{pmatrix}, \tag{1.0.28}$$

където a и b се дават с квадратури на функции от $\mathbb{C}(e^{\frac{2\pi t}{\omega}})$. Наистина уравнението (1.0.27) е вариационно уравнение на интегруемата система (1.0.18) над Γ_0. Добре известно е, че частното решение на (1.0.27) е хамилтоново поле над Γ_0, $(H_{0y}, -H_{0x})$. Трябва да намерим друго независимо решение в квадратури. По-нататък, матрицата U_0 може да бъде избрана като симплектична, т. е. $det(U_0) = 1$,

за хамилтоновата структура на уравнението (1.0.27) е описана в [67] и [65].

Отбелязваме, че това е много частен случай на процеса на редукция на вариационните уравнения до нормално вариационно уравнение ([67] и [65]). Ние ще дадем експлицитно пресмятанията. Ще направим канонична смяна на променливите (симплектична смяна) $U_0 = PV_0$ (V_0 е друго фундаментално решение на (1.0.27)), като

$$P := \begin{pmatrix} H_{0y} & 0 \\ -H_{0x} & \frac{1}{H_{0y}} \end{pmatrix}.$$

Разглеждаме P като симплектична матрица с коефициенти в K, получихме нова диференциална система, еквивалентна на (1.0.27), и нейното разширение на Пикар-Весио е същото, а групите на Галоа са изоморфни.

Новата матрица на системата се дава чрез

$$P^{-1}(AP - \dot{P}) = \begin{pmatrix} 0 & \frac{H_{0yy}}{H_{0y}^2} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Тогава получаваме

$$\begin{aligned} U_0 &= PV_0 = \begin{pmatrix} H_{0y} & 0 \\ -H_{0x} & \frac{1}{H_{0y}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \delta \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} H_{0y} & H_{0y}\delta \\ -H_{0x} & \frac{1}{H_{0y}} - H_{0x}\delta \end{pmatrix}, \end{aligned} \tag{1.0.29}$$

където $\delta = \delta(t) := \int \frac{H_{0yy}}{H_{0y}^2}(x_0(t), y_0(t))dt$. Както обикновено в диференциалната алгебра, ние пишем $\int \frac{H_{0yy}}{H_{0y}^2}(x_0(t), y_0(t))dt$ за всяка примитивна на функцията $\frac{H_{0yy}}{H_{0y}^2}(x_0(t), y_0(t))$.

Разширението на Пикар-Весио на (1.0.27) се дава чрез квадратура

$$K \subset L_1 = K(\delta).$$

Имаме нужда от още две предположения. Първо, предполагаме, че общото решение на уравнението (1.0.27) не се променя по

t. При предишния анализ това е еквивалентно на непроменяемост на функцията $\delta = \delta(t)$. Това означава, че резидуума на функцията $\frac{H_{0yy}}{H_{0y}^2}(x_0(t),\, y_0(t))$ е нула. Това, както се оказва, е винаги изпълнено. Например, ако общото решение на (1.0.18) е еднакво (защото решението на (1.0.27) е производна на решението на (1.0.27)) или ако хамилтониана H_0 се разглежда като естествена механична система $H_0 = \frac{1}{2}y^2 + V(x)$ (защото $\dfrac{H_{0yy}}{H_{0y}^2}(x_0(t),\, y_0(t)) = \dfrac{1}{y_0^2}$ има за полюси произведението на не повече от точките с нулева скорост). Забелязваме, че в този случай $L_1 \subset \mathcal{M}(\mathbb{C})$, като $\mathcal{M}(\mathbb{C})$ е полето на мероморфните функции над $\mathbb{C}$.

По-нататък предполагаме, че $L_1 \neq K$, т. е. $\delta \notin K$. Тъй като $\dfrac{H_{0yy}}{H_{0y}^2}(x_0(t),\, y_0(t)) \in \mathbb{C}(e^{\frac{2\pi t}{\omega}})$, това условие може да бъде проверено чрез факта, че интегралът около периода $i\omega$ не е нула. Тогава след стандартна експоненциална смяна, задачата се свежда до ненулев резидуум, който вече разгледахме.

След всички тези предположения получаваме, че групата на Галоа на (1.0.27) е адитивната група $Gal(L_1/K) = G_a = (\mathbb{C},\, +)$. Представянето се дава чрез фундаменталната матрица (1.0.29), която записваме като

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 & \lambda \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \,:\, \lambda \in \mathbb{C} \right\}. \tag{1.0.30}$$

Сега (за фиксирано θ_0), използвайки (1.0.28) и че $detU_0 = 1$, квадратурите на третия стълб на фундаменталната матрица (1.0.26) се дават чрез

$$\int U_0^{-1} \begin{pmatrix} H_{1y} \\ -H_{1x} \end{pmatrix} dt = \begin{pmatrix} \int (\frac{H_{1y}}{H_{0y}} - \delta\{H_0,\, H_1\})(x_0(t),\, y_0(t), t + \theta_0)dt \\ \int \{H_0,\, H_1\}(x_0(t),\, y_0(t), t + \theta_0)dt \end{pmatrix}.$$

Означаваме $\mu_{\theta_0} = \mu_{\theta_0}(t) := \int \{H_0,\, H_1\}(x_0(t),\, y_0(t), t + \theta_0)dt$ и $\kappa_{\theta_0} = \kappa_{\theta_0}(t) := \int (\frac{H_{1y}}{H_{0y}} - \delta\{H_0,\, H_1\})(x_0(t),\, y_0(t), t + \theta_0)dt$. Тогава разглеждаме интеграла на Поанкаре-Арнолд-Мелников $\mu(\theta_0)$, който дефинирахме по-горе: Той дава монодромията на функцията μ_{θ_0}

по затворен цикъл γ, т. е. разликата между две стойности на функцията μ_{θ_0}.

Разширението на Пикар-Весио се дава чрез следните квадратури

$$L_1 \subset L_1(\mu_{\theta_0}) := L_2 \subset L_2(\kappa_{\theta_0}) := L_{\theta_0}.$$

Групата на Галоа $Gal(L_2/L_1)$ е нетривиална тогава и само тогава, когато $\mu_{\theta_0} \notin L_1$ и този случай $Gal(L_2/L_1) = G_a = (\mathbb{C}, +)$.

Сега ще имаме нужда от един резултат за унипотентните групи от комплексни матрици с размерност 3, която ще формулираме като

Лема 1.0.4. *Нека*

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & \lambda & \alpha \\ 0 & 1 & \mu \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \; : \; \lambda \in \mathbb{C},\, p_j(\lambda,\, \mu,\, \alpha) = 0,\, p_j \in \mathbb{C}[X,\, Y,\, Z] \right\}$$

е алгебрична подгрупа на на групата U_3 от горно-триъгълните комплексни унипотентни 3×3 матрици. Нека G_1 е група от коефициентите на G, дадени от класа матрици от вида

$$G_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & \lambda & \bullet \\ 0 & 1 & \mu \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Тогава следните твърдения са еквивалентни:

a) G не е абелева.

b) λ и μ са алгебрически независими.

c) $dim G_1 = 2$.

Доказателство. Както обикновено означаваме с G_a адитивната група $(\mathbb{C}, +)$. Ще дефинираме изображение (морфизъм) на алгебрични групи

$$\psi \; : \; G \to G_a^2, \quad \begin{pmatrix} 1 & \lambda & \alpha \\ 0 & 1 & \mu \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mapsto (\lambda,\, \mu).$$

Този морфизъм е добре дефиниран, защото той дава рестрикция върху G, която е морфизъм на U_3. Ако μ зависи от λ, $\mu = \mu(\lambda)$ тогава $\mu(\lambda) = a\lambda$ за фиксирано $a \in \mathbb{C}$, защото $\mu(\lambda_1+\lambda_2) = \mu(\lambda_1)+\mu(\lambda_2)$. В този случай групата G е абелева. Тогава съществуват матрици

$$g = \begin{pmatrix} 1 & \lambda & \alpha \\ 0 & 1 & \mu \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \; g' = \begin{pmatrix} 1 & \lambda' & \alpha' \\ 0 & 1 & \mu' \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

в G, такива че $\lambda\mu' \neq \lambda'\mu$, т. е. матриците g и g' не комутатират. Доказахме еквивалентност на a)и b). Еквивалентността на b) и c) следва от изоморфизма $G_1 = G/ker\psi \cong \psi(G)$, защото алгебричната независимост на μ и λ е еквивалентна на $\psi(G) = G_a^2$.

Забелязваме, че от доказателството на Лема 1.0.4 също така следва, че ако всяко от условията a)-c) е изпълнено, то $G = U_3$, защото ако $ker\psi$ е тривиално, то $G \cong G_a^2$, а това е противоречие с некомутативността на G. Сега ще приложим горната лема за уравнението (1.0.24). В представянето дадено с (1.0.26), групата на Галоа на (1.0.24) се дава чрез групата $Gal(PVE) = G$ и $G_1 = Gal(L_2/K) = Gal(PVE)/Gal(L_{\theta_0}/L_1)$ са същите предположения като в лема 1.0.4. Тогава $L_1 = L_2$ (т. е. $\mu_{\theta_0} \in L_1$) тогава и само тогава, когато групата на Галоа $Gal(PVE)$ на уравнението 1.0.24 е абелева, защото размерността на групата G_1 е равна на степента на трансцендентност на разширението L_2/L_1 и тази размерност е или 1 или 2, точно когато, $L_2 = L_1$ или $L_2 \neq L_1$ съответно.

Връзката между интеграла на Поанкаре-Арнолд-Мелников, заедно със затворения цикъл е изучена от Зиглин. Формулата (1.0.23), следва след проста забележка: за някакво фиксирано θ_0 необходимото условие за $\mu_{\theta_0} \in L_1 \subset \mathcal{M}(\mathbb{C})$ (т. е. за $Gal(PVE)$ да е комутативна) е функцията μ_{θ_0} трябва да е еднаква за $t \in \mathbb{C}$. Тогава функцията μ_{θ_0} трябва да съвпада тъждествено с 0.

Възниква следният въпрос: дали горното условие е достатъчно за $Gal(PVE)$, за да е абелева? Ако отговорът е положителен,

то функцията μ_{θ_0} характеризира групата на Галоа на (PVE) за нейната комутативност. Така имаме:

Теорема 18. *Нека* $K := \mathbb{C}(e^{\frac{2\pi t}{\omega}}, e^{it})$ *е диференциално поле от коефициенти на* (PVE) *(уравнение 1.0.24),* $\delta := \int \frac{H_{0yy}}{H_{0y}^2}(x_0(t), y_0(t))dt$ *и*

$$L_1 := K(\delta),\ \mu(\theta_0) := \int_\gamma \{H_0, H_1\}(x_0(t), y_0(t), t + \theta_0)dt.$$

Тогава предположенията 1)-3) по-долу са необходими и достатъчни за да бъде групата на Галоа на (PVE) *некомутативна , за дадено* $\theta_0 \in F_{2\pi}$ *и* $\mu_{\theta_0} \in L_1$*. Освен това необходимо условие за комутативност на групата на Галоа е интегралът на Поанкаре-Арнолд-Мелников* $\mu(\theta_0)$ *да е тъждествено равен на 0 за* $F_{2\pi}$*.*

Предположение 1. Функциите $x_0(t)$ и $y_0(t)$ лежат в полето $\mathbb{C}(\frac{2\pi t}{\omega})$ и пертурбацията H_1 зависи от x и y като рационална функция с комплексни коефициенти на t или като рационална функция на e^{it}.

Предположение 2. Общото решение на (1.0.27) е еднозначна функция на t, т. е. $\delta \in \mathcal{M}(\mathbb{C})$.

Предположение 3. $\delta \notin K$.

Лема 1.0.4 е доказана от Моралес-Руис в [66]. В статията [10] Бертран изучава унипотентни радикали на групата на Галоа от линейни диференциални оператори, представяни като композиция на t напълно приводими оператори. Обобщение на Лема 1.0.18 може да се види в [10] (Лема 1.1 и доказателството на Теорема 3.2).

Трябва да се отбележи, че е възможно обобщение на интеграла на Поанкаре-Арнолд-Мелников за повече степени на свобода, с използване на някои резултати на Гориели и Табор [30]. Авторите на тази работа изследват отношението между реалните сепаратриси и разцепващите се такива на пертурбираната система, давани обикновено с реалния интеграл на Поанкаре-Арнолд-Мелников, заедно с хомоклинични орбити и разклоняването на решението по комплексното време.

В контекста на Теорема 18 е ясно, че ако функцията $\mu(\theta_0)$ има прости нули, то тя не е тъждествено нула. Обаче, ако функцията $\mu(\theta_0)$ има прости нули, тогава непертурбираната система не е интегруема в холоморфни първи интеграли.

Глава 2

Уравнения на Пенлеве от по-висок ред

Разглеждаме следното диференциално уравнение от четвърти ред

$$w^{(4)} = 5w''(w^2 - w') + 5w(w')^2 - w^5 + (\lambda z + \alpha)w + \gamma,$$

където λ, α, γ са комплексни параметри. Това е уравнение F-XVIII в класификацията, направена от К. Косгроув [22] за всички уравнения от ред четири и пет, със свойство на Пенлеве. Това уравнение е изследвано от В. Громак [31] за други, различни от неинтегруемост свойства.

Както в класическия случай на уравненията на Пенлеве, тези уравнения имат хамилтонова формулировка, Баклунд трансформации и фамилия от рационални решения. Например (вж. [22]):

(i) когато

$\lambda = 0, \gamma \neq 0$ уравнението е решено чрез хиперелиптични функции;

(ii) когато

$\lambda = 0, \gamma = 0$ уравнението е решено с елиптични функции;

(iii) когато

$\gamma = -\lambda/2$, $w(z)$ решението може да се изрази чрез решенията на две Пенлеве I уравнения.

По-нататък предполагаме, че $\lambda \neq 0$.

Уравнението притежава две фамилии рационални решения:

I) $\gamma/\lambda = 3k, k \in \mathbb{Z}$

$$k = 0,\ w = 0; \quad k = 1,\ w = -\frac{3\lambda}{\alpha + \lambda z}; \ldots.$$

II) $\gamma/\lambda = 3k - 1, k \in \mathbb{Z}$

$$k = 0,\ w = \frac{\lambda}{\alpha + \lambda z}; \quad k = 1,\ w = -\frac{2\lambda}{\alpha + \lambda z}; \ldots.$$

Означаваме $q_1(z) := w(z)$, $\varepsilon^2 = 1$. Тогава уравнението на Пенлеве може да се представи като две еквивалентни хамилтонови системи със $2 + 1/2$ степени на свобода с

$$\begin{aligned} H_\varepsilon &= \frac{1}{2}p_2^2 + \frac{7 - 9\varepsilon}{12}q_2^3 + p_1 q_2 - \frac{1 + 3\varepsilon}{4}p_1 q_1^2 \\ &+ \frac{3\varepsilon - 1}{4}q_2(\lambda z + \alpha) + \left(\gamma + \frac{3\varepsilon - 1}{4}\lambda\right) q_1. \end{aligned}$$

Съответната система от уравнения е ($' = d/dz$)

$$\begin{aligned} q_1' &= q_2 - \frac{3\varepsilon + 1}{4}q_1^2, \quad & p_1' &= \frac{1 + 3\varepsilon}{2}p_1 q_1 - \gamma - \frac{3\varepsilon - 1}{4}\lambda \\ q_2' &= p_2, & p_2' &= -p_1 - \frac{7 - 9\varepsilon}{4}q_2^2 - \frac{3\varepsilon - 1}{4}(\lambda z + \alpha). \end{aligned}$$

Съществуват Баклунд трансформации (вж. Громак [32]) T_1, T_2 и $T := T_2 T_1$ за уравнението (0.0.11), действащи на параметрите по следния начин:

$$T_1(\lambda) = \lambda, \quad T_1(\alpha) = \alpha, \quad T_1(\gamma) = -\gamma - \lambda, \tag{2.0.1}$$

$$T_2(\lambda) = \lambda, \quad T_2(\alpha) = \alpha, \quad T_2(\gamma) = -\gamma + 2\lambda, \tag{2.0.2}$$

$$T(\gamma) = \gamma + 3\lambda, \qquad T^{-1}(\gamma) = \gamma - 3\lambda. \tag{2.0.3}$$

Громак показва, че тези Баклунд трансформации са бирационални. Лесно се вижда, че тези трансформации са и канонични.

Разширяваме по естествен начин хамилтоновата система до автономна система с три степени на свобода, означавайки

$$\hat{H}(q_1, q_2, z, p_1, p_2, F) := H_\varepsilon + F.$$

Тогава

$$\begin{aligned}
\frac{dq_1}{ds} &= q_2 - \frac{3\varepsilon+1}{4}q_1^2, \quad & \frac{dp_1}{ds} &= \frac{1+3\varepsilon}{2}p_1q_1 - \gamma - \frac{3\varepsilon-1}{4}\lambda,\\
\frac{dq_2}{ds} &= p_2, & \frac{dp_2}{ds} &= -p_1 - \frac{7-9\varepsilon}{4}q_2^2 - \frac{3\varepsilon-1}{4}(\lambda z+\alpha),\\
\frac{dz}{ds} &= 1, & \frac{dF}{ds} &= -\lambda\frac{3\varepsilon-1}{4}q_2.
\end{aligned}$$

В Параграф (0.0.3) на Увода формулирахме нашият първи основен резултат

Теорема 5. *Хамилтоновата система с параметри* $\gamma/\lambda = 3k, \gamma/\lambda = 3k-1, k \in \mathbb{Z}$ *не е интегруема в смисъл на Лиувил чрез рационални първи интеграли.*

2.1 Доказателство на Теорема 5

Доказателство. Разглеждаме първата фамилия от рационални решения (I).

I) $\gamma/\lambda = 3k, k \in \mathbb{Z}$

$$k=0,\ w=0; \quad k=1,\ w=-\frac{3\lambda}{\alpha+\lambda z};\ \ldots.$$

Избираме $\gamma/\lambda = 0$ или $k = 0$ и $w = 0$. В такъв случай се получава

$$\begin{aligned}
w &= q_1 = 0, \quad q_2 = 0, \quad p_2 = 0,\\
p_1 &= \frac{1-3\varepsilon}{4}(\lambda s+\alpha), \quad z = s, \quad F = F_0 = const, \qquad (2.1.4)
\end{aligned}$$

което е частно решение.

Нека $\xi_j = dq_j, \eta_j = dp_j, j = 1,2, \xi_3 = ds, \eta_3 = dF$ са вариационните променливи. Вариационните уравнения (VE) спрямо частното решение (2.1.4) приемат следния вид

$$\begin{aligned}
\xi_1' &= \xi_2, \qquad \eta_1' = \frac{1+3\varepsilon}{2}p_1\xi_1,\\
\xi_2' &= \eta_2, \qquad \eta_2' = -\eta_1 + \frac{1-3\varepsilon}{4}\lambda\xi_3, \qquad (2.1.5)\\
\xi_3' &= 0, \qquad \eta_3' = -\lambda\frac{3\varepsilon-1}{4}\xi_2.
\end{aligned}$$

Тогава нормалните вариационни уравнения (NVE) са

$$\begin{aligned} \xi_1' &= \xi_2, \quad \eta_1' = \frac{1+3\varepsilon}{2} p_1 \xi_1 \\ \xi_2' &= \eta_2, \quad \eta_2' = -\eta_1 \end{aligned} \tag{2.1.6}$$

Свеждайки системата (2.1.6) до едно уравнение, получаваме

$$\xi_1^{(4)} = (\lambda z + \alpha)\xi_1 \tag{2.1.7}$$

За това уравнение ∞ е иррегулярна сингулярна точка. Правим смяна на независимите променливи $z \to \lambda z + \alpha$ избираме ($\partial = d/dz$)

$$\mathrm{L}_1 \xi_1 = 0, \quad L_1 = \partial^4 + az, \quad a := -1/\lambda^4. \tag{2.1.8}$$

Операторът L_1 обикновено се нарича оператор от *Ейри тип*. Той е неразложим и е очевидно инвариантен при смяната $\partial \to -\partial$. Оттук получаваме, че L_1 е *самодуален*, използвайки терминологията на Кац [44]. В тази статия Кац [44] намира единичната компонента на групата на Галоа на $L_1\xi_1 = 0$ - това е $G^0 = \mathrm{Sp}(4, \mathbb{C})$, която не е комутативна. Тогава, според Теорема 4 хамилтоновата система (0.0.19) не е интегруема в околност на частното решение (2.1.4).

По-нататък разглеждаме втората фамилия рационални решения (II).

II) $\gamma/\lambda = 3k - 1, k \in \mathbb{Z}$

$$k = 0,\ w = \frac{\lambda}{\alpha + \lambda z}; \quad k = 1,\ w = -\frac{2\lambda}{\alpha + \lambda z}; \ldots.$$

Нека $\gamma/\lambda = -1$ или $k = 0$ и $w = \frac{1}{z+\alpha/\lambda}$. Тогава намираме следното частно решение на (0.0.19)

$$\begin{aligned} w = q_1 &= \frac{1}{z + \frac{\alpha}{\lambda}},\ q_2 = \frac{3}{4}\frac{\varepsilon - 1}{(z + \frac{\alpha}{\lambda})^2},\ p_2 = -\frac{3}{2}\frac{\varepsilon - 1}{(z + \frac{\alpha}{\lambda})^3}, \\ p_1 &= \frac{1 - 3\varepsilon}{4}(\lambda z + \alpha),\ z = s,\ F = \frac{3\lambda}{4}\frac{\varepsilon - 1}{z + \frac{\alpha}{\lambda}} + F_0. \end{aligned} \tag{2.1.9}$$

Вариационните уравнения (VE) спрямо това решение са

$$\begin{aligned}
\xi_1' &= \xi_2 - \frac{1+3\varepsilon}{2} q_1\xi_1, \quad \eta_1' = \frac{1+3\varepsilon}{2}(p_1\xi_1 + q_1\eta_1), \\
\xi_2' &= \eta_2, \qquad\qquad \eta_2' = -\eta_1 + \frac{1-3\varepsilon}{4}\lambda\xi_3 + \frac{9\varepsilon-7}{4} q_2\xi_2, \\
\xi_3' &= 0, \qquad\qquad \eta_3' = -\lambda\frac{3\varepsilon-1}{4}\xi_2.
\end{aligned} \tag{2.1.10}$$

Тогава нормалните вариационни уравнения (NVE) приемат вида

$$\begin{aligned}
\xi_1' &= \xi_2 - \frac{1+3\varepsilon}{2} q_1\xi_1, \quad \eta_1' = \frac{1+3\varepsilon}{2}(p_1\xi_1 + q_1\eta_1) \\
\xi_2' &= \eta_2, \quad \eta_2' = -\eta_1 + \frac{9\varepsilon-7}{4} q_2\xi_2
\end{aligned} \tag{2.1.11}$$

Редуцираме отново (2.1.11) до едно уравнение и получаваме

$$\xi_1^{(4)} - \frac{10}{(z+\frac{\alpha}{\lambda})^2}\,\xi_1'' + \frac{20}{(z+\frac{\alpha}{\lambda})^3}\,\xi_1' - \left[\frac{20}{(z+\frac{\alpha}{\lambda})^4} + \lambda\left(z+\frac{\alpha}{\lambda}\right)\right]\,\xi_1 = 0. \tag{2.1.12}$$

Следващата стъпка е да приведем това уравнение в по-подходяща за нашите изследвания форма. Първо ще сменим променливата $z+\frac{\alpha}{\lambda}$ с z. След това правим смяната $x = \frac{\lambda z^5}{5^4}$, която е крайно разклонено накритие, запазващо единичната компонента в групата на Галоа. Като резултат ние получаваме

$$\xi_1^{(4)} + \frac{24}{5x}\,\xi_1^{(3)} + \frac{86}{25x^2}\,\xi_1'' + \frac{4}{125x^3}\,\xi_1' - \left(\frac{4}{125x^4} + \frac{1}{x^3}\right)\,\xi_1 = 0.$$

Накрая вземаме $u := x^{2/5}\xi_1$, откъдето означавайки с $\delta = xd/dx$ получаваме

$$\mathrm{L}_2 u := \delta\left(\delta - \frac{2}{5} - 1\right)\left(\delta + \frac{1}{5} - 1\right)\left(\delta + \frac{2}{5} - 1\right)u - xu = 0. \tag{2.1.13}$$

Операторът L_2 in (2.1.13) е частен случай на така наречения оператор на Клостерман

$$\mathrm{Kl} = \prod_1^n(\delta - a_i) + \lambda x \tag{2.1.14}$$

при $n = 4, \lambda = -1, a_1 = 0, a_2 = 7/5, a_3 = 4/5, a_4 = 3/5$. Кац е доказал, че (вж. [44] Теорема 4.5.3, на стр. 59-60) групата на Галоа на $L_2u = 0$ е изоморфна на $\mathrm{Sp}(4,\mathbb{C}) \rtimes \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$, чиято единична компонента $\mathrm{Sp}(4,\mathbb{C})$ е некомутативна.

Оттук, според Теорема 3, хамилтоновата система (0.0.19) не е интегруема в околност на частното решение (2.1.9).

За да завършим доказателството се връщаме към получената фамилия (I) $\gamma/\lambda = 3k, k \in \mathbb{Z}$ чрез прилагане на канонични трансформации T^k, T^{-k} (0.0.18) за $\gamma/\lambda = 0$ и $w = 0$. Получаваме неинтегруемост на хамилтоновата система, отговаряща на всеки член на фамилията (I).

Използвайки същите аргументи, можем да заключим неинтегруемост на на хамилтоновата система, отговаряща на всеки член на фамилията (II).

Това завършва доказателството на Теорема 5.

2.1.1 Матрици на Стокс

В тази част от настоящата глава ще пресметнем експлицитно диференциалната група на Галоа на (2.1.13), използвайки техника, развита от Дювал и Митши [26, 63, 62], основана на намирането на топологичните генератори на групата на Галоа, които са формални и аналитични инварианти на уравнението. Ще се съсредоточим върху уравнението (2.1.13), защото другото уравнение (2.1.8) след смяна на променливите $x = z^5/(5^4\lambda^4)$ приема вида

$$\delta\left(\delta+\frac{2}{5}-1\right)\left(\delta+\frac{3}{5}-1\right)\left(\delta+\frac{4}{5}-1\right)\xi_1 - x\xi_1 = 0,$$

което е от същия вид като (2.1.13).

Следното уравнение

$$\mathrm{D}_{qp}(y) = \left[(-1)^{q-p}x\prod_{j=1}^{p}(\delta+\mu_j) - \prod_{j=1}^{q}(\delta+\nu_j-1)\right]y = 0, \quad (2.1.15)$$

се нарича обобщено *конфлуентно хипергеометрично уравнение* и е обобщение на класическото конфлуентно уравнение на Кумер. Тук $\delta = xd/dx$, $0 \le p \le q, \mu_j, \nu_j \in \mathbb{C}, \mu_i - \mu_j \notin \mathbb{Z}$. За това уравнение точката 0 се явява регулярна сингулярна точка, а ∞ е нерегулярна сингулярна. За уравнения от този вид локалната група на Галоа

G_0 е подгрупа на G_∞, така че глобалната група на Галоа е $G = G_\infty$. За нашите разглеждания имаме нужда от следните означения:

1) $\underline{\alpha} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{C}^n$;

2) $\langle \underline{\alpha} \rangle_m = \prod_{j=1}^{n} \alpha_j(\alpha_j + 1) \ldots (\alpha_j + m - 1)$;

3) За $a \in \mathbb{C}^p, b \in (\mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}^-)^q$, нека:

$$ {}_pF_q(\underline{a}; \underline{b}\,|z) = \sum_{n \geq 0} \frac{\langle \underline{a} \rangle_n}{\langle \underline{b} \rangle_n} \frac{z^n}{n!} \tag{2.1.16}$$

да е обобщения хипергеометричен ред и нека

$$ G_{p\,q}^{m\,n}\left(z \,\middle|\, \underline{a}\underline{b}\right) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{\prod_{j=1}^{m} \Gamma(b_j - s) \prod_{j=1}^{n} \Gamma(1 - a_j + s)}{\prod_{j=m+1}^{q} \Gamma(1 - b_j + s) \prod_{j=n+1}^{q} \Gamma(a_j - s)} z^s d\, s \tag{2.1.17}$$

е G-функцията на Майер [60], а C е подходящ път в комплексната равнина. Предполагаме, че е изпълнено че $p < q$. Известен факт е, че ${}_pF_q$ може да бъде изразен като G- функцията (вж.[49]).

4) Нека $\widetilde{\mathbb{C}}$ е римановата повърхнина на логаритъма, $l_1, l_2 \in \mathbb{R}$: $l_1 < l_2$. Под сектор ще разбираме следното множеството:

$$\theta(l_1, l_2) := \{x \in \widetilde{\mathbb{C}} | \arg x \in (l_1, l_2)\}.$$

$$5) \quad \sigma = q - p, \quad \zeta = e^{2\pi i/\sigma}, \quad \lambda = \frac{1}{2}(\sigma + 1) + \sum_{j=1}^{p} \mu_j - \sum_{j=1}^{q} \nu_j. \tag{2.1.18}$$

Ако $(\nu_j - \mu_k) \notin \mathbb{Z}$ за $j = 1, \ldots, q$ и $k = 1, \ldots, p$, съществува базис от решения на (2.1.15) около $x = 0$, изразени чрез $G_{p\,q}^{1\,p}$ или ${}_pF_{q-1}$. По аналогичен начин в околност на $x = \infty$ съществува фундаментална система от решения, изразени чрез $G_{p\,q}^{q\,1}$ и $G_{p\,q}^{q\,0}$ (вж. Майер, Люк [60, 49]).

В своите работи [26, 63] Дювал и Митши прилагат техника за пресмятане формалните инварианти (формална монодромия и експоненциален тор) и аналитичните инварианти (матрици на Стокс) за фамилии от уравнения (2.1.15), за които $p \geq 1$. Техните пресмятания могат да се адаптират за случая $p = 0$, в който се намираме.

Очевидно е, че уравненията на Клостерман не са нищо по-различно от уравнения от D_{q0}- тип. Ще извършим детайлните пресмятания за нашия конкретен случай.

Нека напишем отново L_2 от (2.1.13) във формата

$$\mathrm{L}_2 = (\delta+\nu_1-1)(\delta+\nu_2-1)(\delta+\nu_3-1)(\delta+\nu_4-1)-x \quad (2.1.19)$$

който е от тип D_{40} с $\nu_1 = 1, \nu_2 = -2/5, \nu_3 = 1/5, \nu_4 = 2/5$. Фундаменталната система от решения в околност на $x = 0$ на $L_2\xi_1 = 0$ е

$$\left\{ {}_0F_3\left(;-\frac{2}{5},\frac{1}{5},\frac{2}{5}|\, x\right), x^{3/5}{}_0F_3\left(;\frac{1}{5},\frac{4}{5},\frac{8}{5}|\, x\right), \right. \quad (2.1.20)$$
$$\left. x^{4/5}{}_0F_3\left(;\frac{2}{5},\frac{6}{5},\frac{9}{5}|\, x\right), x^{7/5}{}_0F_3\left(;\frac{8}{5},\frac{9}{5},\frac{12}{5}|\, x\right)\right\}.$$

Тогава монодромията M_0 около $x = 0$ е от вида

$$M_0 = \mathrm{diag}(1, e^{2\pi i 2/5}, e^{2\pi i 3/5}, e^{2\pi i 4/5}). \quad (2.1.21)$$

Тъй като 0 е регулярна сингулярна, монодромията генерира локалната група на Галоа G_0. Отбелязваме, че в нашия случай имаме $\sigma = 4, \zeta = i, \lambda = 5/2 - 6/5$. За удобство ще използваме означенията ζ и λ вместо конкретните стойности на тези параметри.

За да дефинираме фундаменталната система около $x = \infty$ се нуждаем от още функции. Нека C е път в комплексната равнина, свързващ $-i\infty$ и $i\infty$ и заграждащ точките $n - \nu_j, j = 1, \ldots, 4$, $n \in \mathbb{N}$. Функцията

$$\mathbb{G}_0(x) := G^{40}_{04}\left(z\,\middle|\,\underline{\nu}\right) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \Gamma(1-\underline{\nu}-s)z^s ds \quad (2.1.22)$$

е решение на $L_2\xi_1 = 0$, което е холоморфно в сектора $\theta(-2\pi, 2\pi)$. Аналитичното продължение на $\mathbb{G}_0(x)$ в сектора $\theta(-5\pi, 5\pi)$ допуска следното асимптотично разширение $x \to \infty$ (Предложение 1.2, 1.3 Дювал, Митши [26] или Люк [49])

$$e^{-4x^{1/4}}x^{\lambda/4}\Theta(x), \quad (2.1.23)$$

където Θ е формален ред. Ясно е, че

$$\mathbb{G}_0(xe^{-2\pi ih}), \quad h \in \mathbb{Z} \tag{2.1.24}$$

са също решения на разглежданото уравнение. За да се получи фундаментално решение в близост до $x = \infty$, е нужно да изберем четири от тях. По-нататък се нуждаем от вариант на Теоремата на Майер, която изразява всяка G-функция като крайна сума на функции $\mathbb{G}_0(xe^{-2\pi ih})$ (вж. [26] Предложение 1.5)

$$\begin{aligned} \mathbb{G}_0(x) &= A_1\mathbb{G}_0(xe^{-2\pi i}) + A_2\mathbb{G}_0(xe^{-4\pi i}) \\ &+ B_0\mathbb{G}_0(xe^{-8\pi i}) + B_1\mathbb{G}_0(xe^{-6\pi i}), \end{aligned} \tag{2.1.25}$$

където

$$\begin{aligned} A_h &= -\frac{d^h}{dx^h}\left(\langle 1 - xe^{-2\pi i\underline{\nu}}\rangle_1\right)_{x=0}, \\ B_h &= e^{2\pi i\lambda}\frac{d^h}{dx^h}\left(\langle 1 - xe^{2\pi i\underline{\nu}}\rangle_1\right)_{x=0}. \end{aligned} \tag{2.1.26}$$

Формалните решения на оператора D_{qp} в ∞ са добре известни [11, 49] и могат да се намерят, с използване например на програмният продукт Maple в нашия конкретен случай. Удобно е да сменим променливите, преминавайки към нова променлива $t = x^{1/4}$. Тогава получаваме (припомняме, че $\zeta = i$)

$$\underline{\Theta}_{-1}(t) = e^{-4\zeta^{-1}t}t^\lambda\underline{\Theta}(\zeta^{-1}t), \quad \underline{\Theta}_0(t) = e^{-4\zeta^0 t}t^\lambda\underline{\Theta}(\zeta^0 t), \tag{2.1.27}$$

$$\underline{\Theta}_1(t) = e^{-4\zeta^1 t}t^\lambda\underline{\Theta}(\zeta^1 t), \qquad \underline{\Theta}_2(t) = e^{-4\zeta^2 t}t^\lambda\underline{\Theta}(\zeta^2 t),$$

където $\underline{\Theta}(t) \in \mathbb{C}[[t^{-1}]]$. Означаваме базиса от формални решения в околност на ∞ чрез

$$\underline{\Sigma}(t) = \{\underline{\Theta}_{-1}(t), \underline{\Theta}_0(t), \underline{\Theta}_1(t), \underline{\Theta}_2(t)\}.$$

В този базис формалната монодромия приема вида $\underline{\Sigma}(it) = \underline{\Sigma}(t)\widehat{M}_\infty$:

$$\widehat{M}_\infty = e^{2\pi i\lambda/4}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{2.1.28}$$

В нашия случай имаме

$$q_{-1}(t) = 4it,\ q_0(t) = -4t,\ q_1(t) = -4it,\ q_2(t) = 4t, \tag{2.1.29}$$

експоненциалният тор е $\mathcal{T} \cong (\mathbb{C}^*)^2$ и може да се изрази в следния вид

$$\mathcal{T} = \{\mathrm{diag}(\tau_1, \tau_2, \tau_1^{-1}, \tau_2^{-1})\} \tag{2.1.30}$$

Лъчите на Стокс могат да бъдат намерени, с използване (2.1.29). Получава се

$$\arg t = n\frac{\pi}{4}, \quad n = 0, \ldots, 7. \tag{2.1.31}$$

Аналогично получаваме сингулярните лъчи d_s: това са лъчите, които разполовяват секторите $\mathrm{Re}(q_i(t) - q_j(t)) < 0$, те се оказват същате като в (2.1.31).

Нека да дефинираме секторите

$$\theta_n = \theta\left(-\frac{\pi}{2} + \frac{n-1}{4}\pi, \frac{\pi}{2} + \frac{n}{4}\pi\right), \quad n = 0, \ldots, 7. \tag{2.1.32}$$

Твърдение 2.1.1. *(Рамис [79]) За всеки сектор $\theta_n, n \in [0, 1, 2, \ldots, 7]$, съществува единствен базис от решения $\Sigma_n(t)$ на L_2 с асимптотично развитие в ∞ и $\underline{\Sigma}_n(t) \in \theta_n$.*

Това решение отговаря на сумиране на $\underline{\Sigma}_n(t)$ по направление на сектор $\theta\left(\frac{n-1}{4}\pi, \frac{n}{4}\pi\right)$.

При направените предположения матриците на Стокс, отговарящи на сингулярните лъчи $\frac{n}{4}\pi, n \in [0, 1, \ldots, 7]$ се определят чрез

$$\Sigma_n(t) = \Sigma_{n+1}(t)S_n, \qquad t \in \theta_n \cap \theta_{n+1} \tag{2.1.33}$$

Твърдение 2.1.2. *Предполагаме, че n и n' принадлежат на $[0, 1, \ldots, 7]$ and $n' - n = 2$. Тогава*

$$\Sigma_{n'}(\zeta t) = \Sigma_n(t)\widehat{M}_\infty.$$

Доказателство: Ако $t \in \theta_n$, то имаме $\zeta t \in \theta_{n'}$ и $\Sigma_{n'}(\zeta t)\widehat{M}_\infty^{-1}$ е базис от решения на L_2 в θ_n, които се изразяват във вида $\underline{\Sigma}_n(t)$. Единствеността според Твърдение 2.1.1 ни води към искания резултат.

Твърдение 2.1.3. *Нека* $n \in [0, 1, \ldots, 7]$ *and* $n = 2m + r$. *Тогава*

$$S_n = \widehat{M}_\infty^{-m} S_r \widehat{M}_\infty^m.$$

Доказателство: От равенството (2.1.33) имаме чрез смяна на променливите $\Sigma_n(it) = \Sigma_{n+1}(it)S_n$. Твърдение 2.1.2 ни дава

$$\Sigma_{n-2}\widehat{M}_\infty = \Sigma_{n+1-2}\widehat{M}_\infty S_n.$$

Тази процедура, приложена m пъти ни води към

$$\Sigma_r \widehat{M}_\infty^m = \Sigma_{r+1}\widehat{M}_\infty^m S_n.$$

Обаче $\Sigma_r(t) = \Sigma_{r+1}(t)S_r$, откъдето получаваме исканото.

Това Твърдение ограничава пресмятането на матриците на Стокс само до S_0 и $S_1 := S_{\pi/4}$.

Твърдение 2.1.4. *Функцията* $V(t) = \mathbb{G}_0(t^4)$ *е асимптотика на* $\underline{\Theta}_0$ *в* $\theta(-\frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4})$, *когато* $t \to \infty$.

Това всъщност е преформулиране на (2.1.22) и (2.1.23) с използване на променливата t.

□

Твърдение 2.1.5. *Ако* $t \in \theta(\frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4})$, *в сила е следното съотношение*

$$\begin{aligned} V(t) &- e^{2\pi i\lambda} V(te^{-2\pi i}) \\ &= A_1 V(t\zeta^{-1}) + A_2 V(t\zeta^{-2}) + B_1 V(te^{-2\pi i}\zeta). \quad (2.1.34) \end{aligned}$$

Това се явява вариант на формула (2.1.25) изразен с променливата t ($B_0 = e^{2\pi i\lambda}, \zeta = e^{2\pi i/4}$).

□

По-нататък намираме фундаментална система от актуални решения около ∞ само за $\theta_0, \theta_1, \theta_2$, тъй като се нуждаем само от S_0 и S_1.

Твърдение 2.1.6. *(Вж. Твърдение 4.8 [26].) Нека* $n = 0, 1, 2$. *Следните множества от решения формират фундаменталната система от актуални решения в* θ_n *:*

$$\Sigma_n(t) := \{Y_{n,j}(t),\, j \in \{-1, 0, 1, 2\}\},$$

където

$$Y_{n,-1}(t) = \zeta^{\lambda} V(t\zeta^{-1}),\ n = 0, 1, 2, \tag{2.1.35}$$

$$Y_{n,0}(t) = V(t), \qquad n = 0, 1, 2, \tag{2.1.36}$$

$$Y_{n,1}(t) = \zeta^{-\lambda} V(t\zeta), \qquad n = 0, 1. \tag{2.1.37}$$

$$Y_{0,2}(t) = \begin{cases} \zeta^{-2\lambda}\big[V(t\zeta^2) - A_1 V(t\zeta)\big], & t \in \theta(-\frac{3\pi}{4}, \frac{\pi}{4}), \\ \zeta^{-2\lambda}\big[e^{2\pi i\lambda} V(te^{-2\pi i}\zeta^2) + A_2 V(t) & \\ +B_1 V(t\zeta^{-1})\big],\ t \in \theta(-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}). & \end{cases} \tag{2.1.38}$$

$$Y_{1,2}(t) = \begin{cases} \zeta^{-2\lambda}\big[V(t\zeta^2) - A_1 V(t\zeta) - A_2 V(t)\big],\ t \in \theta(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4}), \\ \zeta^{-2\lambda}\big[e^{2\pi i\lambda} V(te^{-2\pi i}\zeta^2) + B_1 V(t\zeta^{-1})\big], \\ t \in \theta(-\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}). \end{cases} \tag{2.1.39}$$

$$Y_{2,1}(t) = \begin{cases} \zeta^{-\lambda}\big[V(t\zeta) - A_1 V(t)\big],\ t \in \theta(-\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}), \\ \zeta^{-\lambda}\big[e^{2\pi i\lambda} V(te^{-2\pi i}\zeta) + A_2 V(t\zeta^{-1}) & \\ +B_1 V(t\zeta^{-2})\big],\ t \in \theta(\frac{\pi}{4}, \pi). & \end{cases} \tag{2.1.40}$$

$$Y_{2,2}(t) = \begin{cases} \zeta^{-2\lambda}\big[V(t\zeta^2) - A_1 V(t\zeta) - A_2 V(t) & \\ -B_1 V(t\zeta^{-1})\big],\ t \in \theta(-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}), & \\ \zeta^{-2\lambda} e^{2\pi i\lambda} V(te^{-2\pi i}\zeta^2),\ t \in \theta(-\frac{\pi}{4}, \pi). & \end{cases} \tag{2.1.41}$$

Доказателство: Записването на формулата (2.1.24) с променливата t ни дава решенията на $\underline{L}_2$

$$V(t\zeta^{-h}), h \in \mathbb{Z}.$$

Използвайки Твърдение 2.1.5, ние обединяваме някои от тях по такъв начин, че се получава подходяща асимптотика в θ_n. Остава

да се провери валидността на формулите (2.1.38), (2.1.39), (2.1.40), (2.1.41) в сечението на техните дефиниционни интервали. Проверяваме само (2.1.38), тъй като останалите се разглеждат по аналогичен начин. Тогава се нуждаем от проверка, че

$$V(t\zeta^2) - A_1 V(t\zeta) = e^{2\pi i\lambda} V(te^{-2\pi i}\zeta^2) + A_2 V(t) + B_1 V(t\zeta^{-1})$$

е в сила в $\theta(-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4})$. Използвайки (2.1.34) от Твърдение 2.1.5 ($\zeta^4 = e^{2\pi i}$) и извършвайки смяната $t \to t\zeta^2$, получаваме исканият резултат.

□

Твърдение 2.1.7. *(вж. [26], Теорема 5.2(a)) Матриците на Стокс S_0 и S_1 имат следното представяне*

$$\begin{aligned} S_0 &= \mathbb{I} + \zeta^{-2\lambda} A_2 E_{24}, \\ S_1 &= \mathbb{I} + \zeta^{-\lambda} A_1 E_{23} + e^{-i\pi\lambda}\zeta^{-\lambda} B_1 E_{14}. \end{aligned} \tag{2.1.42}$$

Доказателство.

Според дефиницията $\Sigma_n(t) = \Sigma_{n+1}(t) S_n$, $t \in \theta_n \bigcap \theta_{n+1}$. За $t \in \theta_0 \bigcap \theta_1 = \theta(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ от Твърдение 2.1.6 имаме

$$\begin{aligned} Y_{0,-1}(t) &= Y_{1,-1}(t), \quad Y_{0,0}(t) = Y_{1,0}(t), \\ Y_{0,1}(t) &= Y_{1,1}(t), \quad Y_{0,2}(t) = Y_{1,2}(t) + \zeta^{-2\lambda} A_2 Y_{1,0}(t). \end{aligned}$$

Тогава

$$\{Y_{0,-1}(t), Y_{0,0}(t), Y_{0,1}(t), Y_{0,2}(t)\} = \{Y_{1,-1}(t), Y_{1,0}(t), Y_{1,1}(t), Y_{1,2}(t)\} S_0$$

ни дава S_0. Аналогично, за $t \in \theta_1 \bigcap \theta_2 = \theta(-\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4})$ имаме

$$\begin{aligned} Y_{1,-1}(t) &= Y_{2,-1}(t), & Y_{1,0}(t) &= Y_{2,0}(t), \\ Y_{1,1}(t) &= Y_{2,1}(t) + \zeta^{-\lambda} A_1 Y_{2,0}, & Y_{1,2}(t) &= Y_{2,2}(t) + \zeta^{-2\lambda} B_1 \zeta^{-\lambda} Y_{2,-1}(t). \end{aligned}$$

Тогава

$$\{Y_{1,-1}(t), Y_{1,0}(t), Y_{1,1}(t), Y_{1,2}(t)\} = \{Y_{2,-1}(t), Y_{2,0}(t), Y_{2,1}(t), Y_{2,2}(t)\} S_1$$

ни дава S_1 с отчитане на $\zeta^{-2\lambda} = e^{-\pi i\lambda}$.

В нашия случай пресмятанията дават

$$S_0 = \mathbb{I} + aE_{24}, \quad S_1 = \mathbb{I} + bE_{23} + cE_{14}, \tag{2.1.43}$$

където $a = 2i$, $c = i\zeta^{-\lambda}e^{2\pi i/5}$, $b = ic$.

Можем също така да пресметнем и другите матрици на Стокс, получени от S_0, S_1 :

$$\begin{aligned} S_2 = I + aE_{13},\ S_4 = I + aE_{42}, \\ S_6 = I + aE_{31},\ S_3 = I + cE_{12} + icE_{43}, \\ S_5 = I + cE_{41} + icE_{32},\ S_7 = I + cE_{34} + icE_{21}, \end{aligned} \tag{2.1.44}$$

Сега нека разгледаме свързаната подгрупа, която е топологически породена от матриците на Стокс и експоненциалният тор $G_s = \{S_j, \mathcal{T}\}$, която е нормална подгрупа на групата на Галоа G_∞ [63]. Следователно G_∞ е породена топологически от G_s и $\widehat{M}_\infty$. Нека $\mathcal{G}_s$ е алгебрата на Ли на G_s ($\mathcal{G}_s \subset \mathrm{sl}(4,\mathbb{C})$).

За да пресметнем G_∞ първо определяме алгебрата на Ли $\mathcal{G}_s$,след това определяме съответната свързана подгрупа G_s на G_∞ и след това описваме действието на $\widehat{M}_\infty$ на G_s (вж. [63]).

Ще покажем, че $\mathcal{G}_s \cong \mathrm{sp}(4,\mathbb{C})$. Означаваме с $s_j \in \mathcal{G}_s$, така че $S_j = \exp s_j$. Пресмятаме $[s_2, s_6] = a^2 d_1, d_1 = E_{11} - E_{33}$ и $[s_0, s_4] = a^2 d_2, d_2 = E_{22} - E_{44}$. Тогава алгебрата на Ли $\mathcal{G}_s$ има следния базис:

$$\mathcal{B} := \{s_0, s_2, s_4, s_6, d_1, d_2, s_1, s_3, s_5, s_7\}. \tag{2.1.45}$$

Следователно $\mathcal{G}_s$ се състои от всички матрици V, такива че $V^T J_1 + J_1 V = 0$, където J_1 е следната матрица

$$J_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & i\beta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \beta \\ -i\beta & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\beta & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \beta^4 = -1.$$

Следователно получаваме, че $G_s \cong \mathrm{Sp}(4,\mathbb{C})$ (и $G^0 = \mathrm{Sp}(4,\mathbb{C})$).

Освен това $(\widehat{M}_\infty^k)^T J_1 \widehat{M}_\infty^k \neq J_1, k = 1, 2, 3, 4$, т.е., $\widehat{M}_\infty^k \notin G_s$, но $\widehat{M}_\infty^5$ вече принадлежи на G_s. Следователно формалната монодромия поражда крайна група G_M, изоморфна на $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ действаща нетривиално на G_s. Това означава, че G_∞ (и следователно G) е изоморфна на нетривиално полудиректно произведение $\mathrm{Sp}(4, \mathbb{C}) \rtimes \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$.

2.1.2 Уравнения $\mathrm{P}_{\mathrm{II}}^{(2)}$ и $\mathrm{P}_{\mathrm{II}}^{(3)}$.

Доказахме, че уравнението F-XVIII със свойство на Пенлеве от четвърти ред не е интегруемо в смисъл на Лиувил за фамилия от дискретни стойности на параметрите. Този факт получихме, използвайки, че уравненията във вариации спрямо тези рационални решения, имат за решение добре известните обобщени хипергеометрични функции. Групата на Галоа за получените уравнения може да бъде пресметната експлицитно.

Интересно е да се отбележи, че класическият дилогаритъм

$$\mathrm{Li}_2(z) = -\int_0^z \frac{\ln(1-s)}{s} ds,$$

който играе важна роля в изследването на нетривиалната монодромия и доказването на неинтегруемост на някои случаи на уравнението на Пенлеве VI, изследвани от Хорозов и Стоянова [37], е свързан с обобщената хипергеометрична функция чрез следното съотношение

$$\mathrm{Li}_2(z) = z\, {}_3F_2(1, 1, 1; 2, 2|z).$$

Нека спомена накратко още една интересна връзка между линейните уравнения, която се появява тук. Нека X е гладко комплексно проективно многообразие на Фано. Можем да дефинираме квантови диференциални уравнения върху X (вж. също така и [34, 23] и литературата, цитирана там). В случая, когато квантовото диференциално уравнение е линейно обикновено диференциално уравнение, Ж. Моралес и М. ван дер Пут [23] потвърждават хипотезата на Дубровин, че матрицата на Грам на X съвпада с

матриците на Стокс на квантовото диференциално уравнение (с точност до еквивалентност). Изглежда, че за $X = \mathbb{P}^{n-1}$ квантовият диференциален оператор е оператор от Ейри-тип $\delta^n - z$ и за всяко проективно пространство с тегло $\mathbb{P}(w_0, \ldots, w_n)$ квантовият диференциален оператор е от тип на Клостерман или D_{q0} за определено q. Класическите матрици на Стокс се пресмятат за тези оператори с използване на „мултисумиране“ и също така „тъждеството за монодромията“ (вж. [23] за подробности).

Забележка. Не е трудно да се забележи, че хамилтоновата система, отговаряща на уравнението (0.0.11), притежава само един пръв интеграл - функцията на Хамилтон. Да допуснем, че съществуват два независими първи интеграли, т. е., $\hat{H}$ е единиият от тях. Тогава (NVE) може да се редуцира, но нашият случай не е такъв.

Разглеждаме $\mathrm{P_{II}}$-йерархия, формулирана чрез

$$\mathrm{P}_{\mathrm{II}}^{(n)} \quad : \quad \left(\frac{d}{dz} + 2w\right) \mathcal{L}_n[w' - w^2] + \sum_{l=1}^{n-1} \beta_l \left(\frac{d}{dz} + 2w\right) \mathcal{L}_l[w' - w^2] = zw + \alpha_n, \quad n \geq 1, \tag{2.1.46}$$

където $\mathcal{L}_n$ е операторът, дефиниран с рекурентното съотношение

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dz}\mathcal{L}_{n+1} = \left[\frac{d^3}{dz^3} + 4(w' - w^2)\frac{d}{dz} + 2(w' - w^2)_z\right] \mathcal{L}_n; \\ &\mathcal{L}_0[w' - w^2] = \frac{1}{2}, \end{aligned} \tag{2.1.47}$$

а β_l и α_n са комплексни параметри. Специално внимание обръщаме на (2.1.46), което е нелинейно обикновено диференциално уравнение от ред $2n$, $n \geq 1$. Повечето автори разглеждат всички β_l

тривиални. Първите три члена на тази $\mathrm{P_{II}}$-йерархия са:

$$\begin{aligned}
\mathrm{P_{II}^{(1)}}: w'' &- 2w^3 = zw + \alpha_1, && (2.1.48)\\
\mathrm{P_{II}^{(2)}}: w^{(4)} &- 10w(ww'' + w'^2) + 6w^5 + \beta_1(w'' - 2w^3)\\
&= zw + \alpha_2, && (2.1.49)\\
\mathrm{P_{II}^{(3)}}: w^{(6)} &- 14w^{(4)}w^2 - 56w^{(3)}w'w + 70w''(w^4 - w'^2) && (2.1.50)\\
&+ 140w^3w'^2 - 42w(w'')^2 - 20w^7 + \beta_1[w'' - 2w^3]\\
&+ \beta_2[w^{(4)} - 10w(ww'' + w'^2) + 6w^5] = zw + \alpha_3.
\end{aligned}$$

Уравненията $\mathrm{P_{II}^{(2)}}$ са известни като F-XVII, ([22]) според класификацията на Косгроув.

Ние се интересуваме от интегруемостта на хамилтоновата система, отговаряща на тези уравнения. Хамилтониана на тези уравнения $\mathrm{P_{II}^{(1)}}$ е известен отдавна от работата на Окамото [72] (и за други класически уравнения на Пенлеве). Хамилтоновата структура за $\mathrm{P_{II}}$-йерархия е открита от Мазоко и Мо [59]. Ние изучаваме интегруемостта в смисъл на Лиувил на Хамилтоновата система, отговаряща на първите три члена на $\mathrm{P_{II}}$-йерархия, които са по-лесни за изследване.

Разглеждаме първия хамилтониан на $\mathrm{P_{II}^{(1)}}$, по-конкретно

$$H^{(1)} = 4p^2 + \frac{1}{4}q + \frac{1}{4}pq^2 + 2pz - \frac{1}{2}q\alpha_1, \qquad (2.1.51)$$

където $q = 4w$, $p = \frac{1}{2}(w' - w^2 - \frac{z}{2})$. Разширяваме (2.1.51) по естествен начин до автономна хамилтонова система с две степени на свобода $\hat{H}_1 = H^{(1)} + F$. Можем да намерим съответните диференциални уравнения (тук $(' = d/ds)$)

$$\begin{aligned}
q' &= 8p + \frac{1}{4}q^2 + 2z, \qquad z' = 1, && (2.1.52)\\
p' &= -\frac{1}{4} - \frac{1}{2}pq + \frac{1}{2}\alpha_1, \quad F' = -2p.
\end{aligned}$$

Система (2.1.52) притежава следните частни решения за $\alpha_1 = 0$

$$q = 0, \quad p = -\frac{1}{4}s, \quad z = s, \quad F = \frac{s^2}{4} + F_0. \qquad (2.1.53)$$

Нормалните уравнения във вариации (NVE) според (2.1.53) са

$$\xi_1'' = z\xi_1. \tag{2.1.54}$$

Това е уравнение на Ейри, чиято група на Галоа е изучена, тя е $G = \mathrm{SL}(2,\mathbb{C}) \cong \mathrm{Sp}(2,\mathbb{C})$. Тогава хамилтоновата система (2.1.52) не е интегруема с рационални първи интеграли, но това е известен факт от работата на Моралес-Руис [66].

По-нататък, ще разгледаме хамилтониана за $\mathrm{P}_{\mathrm{II}}^{(2)}$:

$$\begin{aligned} H^{(2)} &= \frac{q_2}{16} + 2zp_2 - 16p_1^2p_2 + 16p_2^2 + \frac{q_1q_2p_2}{8} \\ &+ \frac{p_1p_2q_2^2}{16} + \frac{\alpha_2(p_1q_2 - q_1)}{8} + t_1(8p_1 - t_1)p_2, \end{aligned} \tag{2.1.55}$$

където $q_j, p_j, j = 1, 2$ се изразяват чрез w и техните производни. Разширявайки както обикновено до автономна хамилтонова система с три степени на свобода $\hat{H}_2 = H^{(2)} + F$, получаваме

$$\begin{aligned} q_1' &= -32p_1p_2 + \frac{1}{16}p_2q_2^2 + \frac{1}{8}q_2\alpha_2 + 8\beta_1p_2, \\ q_2' &= 2z - 16p_1^2 + 32p_2 + \frac{1}{8}q_1q_2 + \frac{1}{16}p_1q_2^2 + \beta_1(8p_1 - t_1), \\ p_1' &= -\frac{1}{8}p_2q_2 + \frac{1}{8}\alpha_2, \\ p_2' &= -\frac{1}{16} - \frac{1}{8}p_2q_1 - \frac{1}{8}p_1p_2q_2 - \frac{1}{8}\alpha_2p_1, \\ z' &= 1, \qquad F' = -2p_2. \end{aligned} \tag{2.1.56}$$

Системата (2.1.56) притежава следното частно решение, когато $\alpha_2 = 0$:

$$q_1 = q_2 = 0, \quad p_1 = \frac{\beta_1}{4}, \quad p_2 = -\frac{s}{16}, \quad z = s, \quad F = \frac{s^2}{16} + F_0. \tag{2.1.57}$$

Нормалните вариационни уравнения (NVE), получени според решението (2.1.57), се редуцират до единствено линейно уравнение

$$\xi_1^{(4)} - \frac{5}{s}\xi_1^{(3)} + \left(\frac{12}{s^2} - \frac{\beta_1 s}{16}\right)\xi_1'' + \left(\frac{\beta_1}{16} - \frac{12}{s^3}\right)\xi_1' - \frac{s^3}{256}\xi_1 = 0. \tag{2.1.58}$$

Тук ние разглеждаме случая $\beta_1 = 0$, който е най-лесен. Правим смяна на променливите $z = s^7/(2^8 7^4)$ и горните уравнения приемат

вида

$$\delta\left(\delta+\frac{2}{7}-1\right)\left(\delta+\frac{3}{7}-1\right)\left(\delta+\frac{5}{7}-1\right)\xi_1 - z\xi_1 = 0, \qquad (2.1.59)$$

което у уравнение от типа $D_{4\,0}\,\xi_1 = 0$ с параметри $\nu_1 = 1, \nu_2 = 2/7, \nu_3 = 3/7, \nu_4 = 5/7$. По аналогичен начин (или използвайки резултата на Кац [44]) ние можем да получим, че единичната компонента на групата на Галоа на уравнението (2.1.59) е $G^0 = \mathrm{Sp}(4,\mathbb{C})$, която не е комутативна група. Следователно хамилтоновата система, отговаряща на уравнението на Пенлеве от по-висок ред $\mathrm{P}_{\mathrm{II}}^{(2)}$ не е интегруема в смисъл на Лиувил.

Накрая, нека да напишем хамилтониана за $\mathrm{P}_{\mathrm{II}}^{(3)}$:

$$\begin{aligned} H^{(3)} &= 64p_1^4 - 192p_1^2p_2 + 128p_1p_3 + \frac{1}{64}p_3q_3^2 - \frac{1}{64}p_1q_2^2 + 64p_2^2 \\ &- \frac{1}{32}q_1q_2 + 2zp_1 + \frac{q_3}{64} - \frac{1}{32}\alpha_3q_3 + 8\beta_1(p_1^2 - p_2) \qquad (2.1.60) \\ &+ \beta_2(4p_1^2\beta_2 - 4p_2\beta_2 - 32p_1^3 + 64p_1p_2 - 2p_1\beta_1). \end{aligned}$$

Разширяваме до автономна хамилтонова система с четири степени на свобода $\hat{H}_3 = H^{(3)} + F$. Получава се

$$\begin{aligned} q_1' &= 256p_1^3 - 384p_1p_2 + 128p_3 - \frac{q_2^2}{64} + 2z + 16p_1\beta_1 \qquad (2.1.61) \\ &+ 8p_1\beta_2^2 - 96t_2p_1^2 + 64p_2\beta_2 - 2\beta_1\beta_2, \\ q_2' &= -192p_1^2 + 128p_2 - 8\beta_1 - 4\beta_2^2 + 64p_1\beta_2, \\ q_3' &= 128p_1 + \frac{1}{64}q_3^2, \\ p_1' &= \frac{1}{32}q_2, \qquad (2.1.62) \\ p_2' &= \frac{1}{32}p_1q_2 + \frac{1}{32}q_1 \\ p_3' &= -\frac{1}{32}p_3q_3 - \frac{1}{64} + \frac{1}{32}\alpha_3 \\ z' &= 1, \quad F' = -2p_1. \end{aligned}$$

Тук разглеждаме единствено случая $\beta_1 = \beta_2 = 0$. Тогава, ако $\alpha_3 = 0$, системата (2.1.61) притежава следното частно решение

$$\begin{aligned} q_1 = q_2 = q_3 = 0, \quad p_1 = p_2 = 0, \\ p_3 = -\frac{s}{64}, \quad z = s, \quad F = F_0 = const. \qquad (2.1.63) \end{aligned}$$

Нормалните вариационни уравнения (NVE), според частното решение (2.1.63), придобиват следния вид на линейно диференциално уравнение от шести ред

$$\xi_1^{(6)} - \frac{4}{s}\xi_1^{(5)} + \frac{12}{s^2}\xi_1^{(4)} - \frac{18}{s^3}\xi_1^{(3)} + \frac{18}{s^4}\xi_1'' - s\xi_1 = 0. \tag{2.1.64}$$

Аналогично, както и в предните случаи, сменяме променливите със $z = s^7/7^6$ и получаваме

$$\delta\left(\delta+\frac{1}{7}-1\right)\left(\delta+\frac{2}{7}-1\right)\left(\delta+\frac{3}{7}-1\right)\times \\ \times\left(\delta+\frac{4}{7}-1\right)\left(\delta+\frac{6}{7}-1\right)\xi_1 - z\xi_1 = 0, \tag{2.1.65}$$

което е уравнение от тип $D_{60}\,\xi_1 = 0$ с $\nu_1 = 1, \nu_2 = 1/7, \nu_3 = 2/7, \nu_4 = 3/7, \nu_5 = 4/7, \nu_6 = 6/7$. Тук имаме

$$\sigma = q - p = 6, \quad \zeta = e^{2\pi i/6}, \quad \lambda = \frac{1}{2} - \frac{2}{7}. \tag{2.1.66}$$

Локалната монодромия в 0 е ясна. Удобно е да използваме нова променлива $t = x^{1/6}$. Базисът от формалните решения е (вж. например [11, 26]) и формалната монодромия е

$$\widehat{M}_\infty = e^{2\pi i\lambda/6}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{2.1.67}$$

Експоненциалния тор е отново $\mathcal{T} \cong (\mathbb{C}^*)^2$

$$\mathcal{T} = \{\mathrm{diag}(t_1, t_2, t_1^{-1}t_2, t_1^{-1}, t_2^{-1}, t_2^{-1}t_1)\}, \quad t_1, t_2 \in \mathbb{C}^*. \tag{2.1.68}$$

Сингулярните лъчи на Стокс са

$$\arg t = n\frac{\pi}{6}, \quad n = 0, \ldots, 11.$$

Дефинираме секторите $\theta_n = \theta\left(-\frac{\pi}{2} + \frac{n-1}{6}\pi, \frac{\pi}{2} + \frac{n}{6}\pi\right), \quad n = 0, \ldots, 11.$ Отново имаме нужда само от S_0 и $S_1 := S_{\pi/6}$ за да получим всички

матрици на Стокс. Матриците на Стокс S_0 и S_1 са (вж. Теорема 5.2 [26])

$$S_0 = \mathbb{I} + aE_{45} + bE_{36} + cE_{21}, \quad S_1 = \mathbb{I} + dE_{35} + fE_{26}, \qquad (2.1.69)$$

където $a = \zeta^{-\lambda}A_1, b = \zeta^{-3\lambda}A_3\, c = \zeta^{\lambda}e^{-2\pi i\lambda}B_1$, $d = \zeta^{-2\lambda}A_2, f = \zeta^{-\lambda}e^{-\pi i\lambda}B_2$. Използвайки (2.1.66) and (2.1.26) получаваме

$$f = i\zeta^{-\lambda}e^{2\pi i 2/7},\ d = f^2,\ c = \frac{i}{f},\ b = i,\ a = if\ (f^3 = -1).$$

Матриците S_0 и S_1 заедно с Твърдение 2.1.3 за $n = 0, \ldots, 11$ дават останалите матрици на Стокс

$$\begin{aligned}
S_2 &= \mathbb{I} + ifE_{34} + iE_{25} + \frac{i}{f}E_{16},\ S_3 = \mathbb{I} + f^2E_{24} + fE_{15},\\
S_4 &= \mathbb{I} + ifE_{23} + iE_{14} + \frac{i}{f}E_{65},\ S_5 = \mathbb{I} + f^2E_{13} + fE_{64},\\
S_6 &= \mathbb{I} + ifE_{12} + iE_{63} + \frac{i}{f}E_{54},\ S_7 = \mathbb{I} + f^2E_{62} + fE_{53},\\
S_8 &= \mathbb{I} + ifE_{61} + iE_{52} + \frac{i}{f}E_{43},\ S_9 = \mathbb{I} + f^2E_{51} + fE_{42}, \qquad (2.1.70)\\
S_{10} &= \mathbb{I} + ifE_{56} + iE_{41} + \frac{i}{f}E_{32},\ S_{11} = \mathbb{I} + f^2E_{46} + fE_{31}.
\end{aligned}$$

Сега разглеждаме отново (свързаната) подгрупа, топологически генерирана чрез матриците на Стокс и експоненциалният тор $G_s = \{S_j, \mathcal{T}\}$. Нека $\mathcal{G}_s$ е алгебрата на Ли на G_s ($\mathcal{G}_s \subset \mathrm{sl}(6, \mathbb{C})$.

Твърдение 2.1.8. $\mathcal{G}_s \cong \mathrm{sp}(6, \mathbb{C})$.

Доказателство:

Означаваме отново $s_j \in \mathcal{G}_s$ така, че $S_j = \exp s_j, j = 0, \ldots, 11$ и $\tau_1 = E_{11} - E_{33} - E_{44} + E_{66}$ и $\tau_2 = E_{22} + E_{33} - E_{55} - E_{66}$, които принадлежат на $\mathcal{T}$. Директните пресмятания дават

$$[s_0, s_3] = 2iE_{25}, \quad [s_0, s_9] = -2iE_{41}, \quad [s_6, s_9] = 2iE_{52},$$

$$[s_2, s_{11}] = -2iE_{36}, \quad [s_2, s_5] = 2iE_{14}, \quad [s_4, s_7] = 2iE_{63},$$

и следователно, $E_{14}, E_{41}, E_{25}, E_{52}, E_{36}, E_{63} \in \mathcal{G}_s$.

В допълнение имаме нужда от елементите

$$B_1 := E_{11} - E_{44} = [s_8, s_2] - \tau_2,\ B_2 := E_{22} - E_{55} = [s_9, s_3] - B_1,$$

и

$$B_3 := E_{33} - E_{66} = B_1 - \tau_1,$$
$$B_4 := \frac{1}{f}E_{12} - E_{54} = \frac{i}{f^2}\left([s_6, \tau_2] - 2iE_{63}\right),$$
$$B_5 := \frac{1}{f}E_{23} - E_{65} = -if^2\left([\tau_1, s_4] - 2iE_{14}\right),$$
$$B_6 := fE_{21} - E_{45} = -if^2\left([\tau_2, s_0] - 2iE_{36}\right),$$
$$B_7 := fE_{32} - E_{56} = -if^2\left([s_{10}, \tau_1] - 2iE_{41}\right),$$
$$B_8 := \frac{1}{f^2}E_{16} + E_{34} = \frac{i}{f}\left([\tau_2, s_2] - 2iE_{25}\right),$$
$$B_9 := \frac{1}{f^2}E_{61} + E_{43} = -if\left([s_8, \tau_2] - 2iE_{52}\right)$$

също принадлежат на $\mathcal{G}_s$.

Тогава алгебрата на Ли $\mathcal{G}_s$ има следният базис:

$$\mathcal{B} := \{E_{14}, E_{41}, E_{25}, E_{52}, E_{36}, E_{63}, s_1, s_3, s_5, s_7, s_9, s_{11}, B_j, j = 1, \ldots, 9\}. \tag{2.1.71}$$

Следователно, $\mathcal{G}_s$ се състои от всички матрици V, такива че $V^T J_1 + J_1 V = 0$, където J_1 е следната матрица

$$J_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & f^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & f & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -f^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -f & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

и получаваме, че $G_s \cong \mathrm{Sp}(6, \mathbb{C})$ (и $G^0 \cong \mathrm{Sp}(6, \mathbb{C})$). Използвайки $(\widehat{M}_\infty^k)^T J_1 \widehat{M}_\infty^k \neq J_1, k = 1, \ldots, 6$, получаваме $\widehat{M}_\infty^k \notin G_s$, но $\widehat{M}_\infty^7$ принадлежи на G_s. Следователно формалната монодромия поражда крайна група G_M, изоморфна на $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$, действаща нетривиално на

G_s. От тук излиза, че G_∞ (и следователно G) е изоморфна на на нетривиално полудиректно произведение $\mathrm{Sp}(6,\mathbb{C}) \rtimes \mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$. От тези данни можем да заключим, че хамилтоновата система, съответстваща на уравнението на Пенлеве от шести ред $\mathrm{P}_{\mathrm{II}}^{(3)}$, е неинтегруема в смисъл на Лиувил. Така доказахме следната

Теорема 19. *Да разгледаме следните случаи:*

(i) за $\beta_1 = \alpha_2 = 0$, *хамилтоновата система, отговаряща на* $\mathrm{P}_{\mathrm{II}}^{(2)}$, *не е интегруема в смисъл на Лиувил чрез рационални първи интеграли;*

(ii) за $\beta_1 = \beta_2 = \alpha_3 = 0$, *хамилтоновата система отговаряща на* $\mathrm{P}_{\mathrm{II}}^{(3)}$, *не е интегруема в смисъл на Лиувил чрез рационални първи интеграли.*

Изучаването на други членове от йерархията P_{II} е технически доста трудно. Въпреки това, може да се предположи, че нормалните вариационни уравнения (NVE), получени за определени нетривиални решения, се свеждат до диференциални уравнения от типа $D_{q\,0}\,\xi = 0$ с q-четно. Единичните компоненти в съответните групи на Галоа са грубо казано $\mathrm{Sp(q,\mathbb{C})}$ и в общия случай тези уравнения са неразложими, откъдето следва, че автономните хамилтонови системи, отговарящи на тези уравнения, притежават само един първи интеграл - функцията на Хамилтон.

Резултата на Теорема 19 може да бъде разширен, използвайки трансформацията на Баклунд и други специални решения, открити от Сака в [80, 81].

Глава 3

Бозе–Ферми смеси (BFM) в едномерна оптична решетка

Да преминем към другата задача, която разглеждаме в тази работа - изследване на интегруемостта на системата, получена от стационарните решения на уравненията, описващи Бозе–Ферми смеси (BFM) в едномерна оптична решетка. Хамилтонианът на тази задача е както вече отбелязяхме във Въведение параграф 0.0.3:

$$\begin{aligned} H &= \frac{p_0^2}{2} + \frac{1}{2}\sum_1^{N_f} p_j^2 + \omega_0 q_0^2 + \sum_1^{N_f} \omega_j q_j^2 \\ &- g_{\mathrm{BF}} q_0^2 \sum_1^{N_f} q_j^2 - \frac{q_0^4}{2} + \frac{C_0^2}{2q_0^2} + \frac{1}{2}\sum_1^{N_f} \frac{C_j^2}{q_j^2}. \end{aligned}$$

За Хамилтоновата система с горния хамилтониан разглеждаме следните случаи:

1) $C_0 = 0, C_j \neq 0, \omega_j = \omega^2/2, j = 1, \ldots, N_f$;

2) $C_0 \neq 0, C_j = 0, j = 1, \ldots, N_f$, $g_{\mathrm{BF}} = n(n+1)/2, n \notin \mathbb{Z}$;

3) $C_0 \neq 0, C_1 \neq 0, N_f = 1$, за достатъчно малко g_{BF} .

Теорема 6. *За горните случаи, хамилтоновата система с така написания хамилтониан е интегруема точно тогава, когато* $g_{\mathrm{BF}} = 0$.

Доказателството на този факт се базира на резултатите на Теорията на Зиглин-Моралес-Рамис-Симо. Този метод е прилаган за изследване на интегруемостта на системи с хомогенни потенциали, [65, 69, 68].

3.1 Доказателство на Теорема 6

Доказатеството ще направим по следния начин. За първите два случая ще намерим подходящи частни решения. След това ще разгледаме вариационните уравнения на системата (VE) на тези решения. Първият случай се получава по-лесно, затова започваме с него. Уравненията във вариации (VE) се трансформират във вариант на двойно конфлуентното уравнение на Хойн, за чиято група на Галоа знаем, че не е абелева.

Вторият случай се състои от следните стъпки: първо намираме единичната компонента на групата на Галоа на (VE), която си оказва некомутативна с изключение на някои дискретни стойности на g_{BF}: след това изучаваме вариациите от по-висок ред, като намираме ненулев логаритмичен член в решението на (VE_3), където $g_{\mathrm{BF}} \neq 0$, което води до некомутативност на единичната компонента на $Gal(L_3/K)$, а това показва, че разглежданата хамилтонова система е неитегруема в смисъл на Лиувил.

За третия случай ще използваме теорията, на Поанкаре-Арнолд-Мелников-Зиглин. Ние изследваме интеграла на Поанкаре-Арнолд-Мелников, показвайки, че той не е тъдествено нула, т. е. комплексните сепаратриси се самопресичат. Това води до липсата на допълнителен мероморфен пръв интеграл и системата е неинтегруема.

3.2 Случай $C_0 = 0, C_j \neq 0$.

Хамилтонианът в този случай приема вида

$$\begin{aligned} H &= \frac{p_0^2}{2} + \frac{1}{2}\sum_1^{N_f} p_j^2 + \omega_0 q_0^2 + \sum_1^{N_f} \omega_j q_j^2 \\ &- g_{\mathrm{BF}} q_0^2 \sum_1^{N_f} q_j^2 - \frac{q_0^4}{2} + \frac{1}{2}\sum_1^{N_f} \frac{C_j^2}{q_j^2}. \end{aligned} \tag{3.2.1}$$

Уравненията, отговарящи на този хамилтониан (3.2.1) са

$$\begin{aligned} \dot{q_0} &= p_0, \\ \dot{p_0} &= -2\omega_0 q_0 + 2q_0^3 + 2g_{\mathrm{BF}} q_0 \sum_1^{N_f} {q_j}^2, \\ \dot{q_j} &= p_j, \\ \dot{p_j} &= -2\omega_j q_j + 2g_{\mathrm{BF}} q_0^2 q_j + \frac{C_j^2}{q_j^3}, \quad j = 1, \ldots, N_f. \end{aligned} \tag{3.2.2}$$

Твърдение 3.2.1. *Системата (3.2.2) притежава частно решение във вида*

$$\begin{aligned} q_0 &= p_0 = 0, \\ {q_j}^2 &= \frac{C_j}{\sqrt{2\omega_j}} \sinh(2i\sqrt{2\omega_j}t), \\ p_j &= \dot{q_j}, \quad j = 1, \ldots, N_f. \end{aligned} \tag{3.2.3}$$

Доказателство. Да вземем $q_0 = p_0 = 0$ в (3.2.2). Общото решение на системата спрямо $(q_j, p_j), j = 1, \ldots, N_f$ е

$$\begin{aligned} {q_j}^2 &= \frac{h_j}{2\omega_j} + \sqrt{\frac{C_j^2}{2\omega_j} - \frac{h_j^2}{4\omega_j^2}} \sinh 2i\sqrt{2\omega_j}(t - t_0), \\ p_j &= \dot{q_j}, \quad j = 1, \ldots, N_f, \end{aligned} \tag{3.2.4}$$

където h_j са подходящи константи. Тогава вземайки $h_j = 0$ и $t_0 = 0$ получаваме нашето частно решение.

Означаваме променливите $\xi_0 = dq_0$ и $\eta_0 = dp_0$. Не е трудно да се получи (NVE), записано в променливите ξ_0, η_0, по-точно

$$\dot{\xi}_0 = \eta_0, \qquad \dot{\eta}_0 = \left[-2\omega_0 + 2g_{\mathrm{BF}} \sum_1^{N_f} {q_j}^2 \right] \xi_0. \tag{3.2.5}$$

Ще напишем (3.2.5) като уравнение от втори ред

$$\ddot{\xi}_0 + \left[2\omega_0 - 2g_{\rm BF}\sum_1^{N_f}\frac{C_j}{\sqrt{2\omega_j}}\sinh(2i\sqrt{2\omega_j}t)\right]\xi_0 = 0. \qquad (3.2.6)$$

Да се изучи единичната компонента на групата на Галоа на уравнението (3.2.6) не е лесна задача. Затова предполагаме, че всички ω_j са равни. Тогава полагайки $\omega_j = \dfrac{\omega^2}{2}$, $j = 1, \ldots, N_f$ получаваме вариант на добре известното уравнение на Матио

$$\ddot{\xi}_0 + [A_1 + B_1\sinh(2i\omega t)]\,\xi_0 = 0, \qquad (3.2.7)$$

където

$$A_1 = 2\omega_0, \qquad B_1 = -\frac{2}{\omega}g_{\rm BF}\sum_1^{N_f} C_j. \qquad (3.2.8)$$

Тъй като C_j са константи, получени при интегриране, без ограничение можем да предполагаме, че $\sum C_j \neq 0$.

По-нататък, със смяна на независимите променливи $x = e^{2i\omega t}$ ние получаваме алгебричен вариант на (3.2.7)

$$\xi_0'' + \frac{1}{x}\xi_0' + \left[\frac{B}{x} + \frac{A}{x^2} - \frac{B}{x^3}\right]\xi_0 = 0, \qquad (3.2.9)$$

където $' = \dfrac{d}{dx}$, $A = -\dfrac{A_1}{4\omega^2}$, $B = -\dfrac{B_1}{8\omega^2}$. Лесно се вижда, че когато $B = 0$, уравнението се преобразува в уравнение на Ойлер, което е разрешимо. След това редуцираме (3.2.9) до стандартна форма, полагайки $y = \sqrt{x}\xi_0$,

$$y'' = r(x)y, \qquad r(x) = -\frac{B}{x} - \frac{A + \frac{1}{4}}{x^2} + \frac{B}{x^3}. \qquad (3.2.10)$$

Уравнението (3.2.10) се явява конкретен случай на двойно конфлуентното уравнение на Хойн. За това уравнение точките 0 и ∞ са нерегулярни особени точки и естествения начин за изучаването на групата на Галоа е алгоритъма на Ковачич. Това е направено от А. Дувал и М. Лоде-Ришо [25] стр.237. Ние просто прилагаме

техния резултат, който най-просто казва, че ако $B \neq 0$ групата на Галоа на (3.2.10) е $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$. В нашия случай

$$B = \frac{g_{\mathrm{BF}}}{4\omega^3}\sum_1^{N_f} C_j.$$

Ако предположим $\sum_1^{N_f} C_j \neq 0$, то

$$B = 0 \Leftrightarrow g_{\mathrm{BF}} = 0,$$

тогава, единичната компонента на групата на Галоа не е комутативна, за $g_{\mathrm{BF}} \neq 0$. Тогава хамилтоновата система с хамилтониан (3.2.1) е неинтегруема, с изключение на случая $g_{\mathrm{BF}} = 0$.

С това тази част от Теорема 6 е доказана.

3.3 Случай $C_0 \neq 0, C_j = 0$.

Функцията на Хамилтон в този случай е

$$H = \frac{p_0^2}{2} + \frac{1}{2}\sum_1^{N_f} p_j^2 + \omega_0 q_0^2 + \sum_1^{N_f} \omega_j q_j^2 - g_{\mathrm{BF}} q_0^2 \sum_1^{N_f} q_j^2 - \frac{q_0^4}{2} + \frac{C_0^2}{2q_0^2}. \quad (3.3.1)$$

Намираме частно решение:

Твърдение 3.3.1. *Хамилтоновата система породена, от хамилтониан (3.3.1) има частно решение във вида*

$$\begin{aligned} \bar{q}_0^2(t) &= \frac{2}{3}\omega_0 + \wp(t; g_2, g_3), \\ \bar{p}_0(t) &= \dot{\bar{q}}_0(t), \quad q_j = p_j = 0, \quad j = 1, \ldots, N_f, \end{aligned} \quad (3.3.2)$$

където $\wp(t; g_2, g_3)$ е елиптичната $\wp$ функция на Вайершрас удовлетворяваща

$$\Gamma : \dot{v}^2 = 4v^3 - g_2 v - g_3 \quad (3.3.3)$$

където $g_2 = \frac{16}{3}\omega_0^2 - 4h$, $g_3 = 4C_0^2 - \frac{8}{3}\omega_0 h + \frac{64}{27}\omega_0^3$ и h е линията на ниво на хамилтониана (3.0.1), избран така, че $\Delta = g_2^3 - 27g_3^2 \neq 0$.

Доказателство. Нека $q_j = p_j = 0$, $j = 1, \ldots, N_f$ (напомняме, че $C_j = 0$) в (3.0.1) и получаваме

$$H = \frac{p_0^2}{2} + \omega_0 q_0^2 - \frac{q_0^4}{2} + \frac{C_0^2}{2q_0^2} = \frac{h}{2}. \tag{3.3.4}$$

Ще напишем този израз във вида

$$\dot{q}_0^2 = -2\omega_0 q_0^2 + q_0^4 - \frac{C_0^2}{q_0^2} + h. \tag{3.3.5}$$

Тогава отбелязвайки $u = q_0^2$ както и $u = v + \frac{2}{3}\omega_0$, получаваме общото решение на (3.3.5)

$$\bar{q}_0^2(t) = \frac{2}{3}\omega_0 + \wp(t - t_0; g_2, g_3), \quad \bar{p}_0(t) = \dot{\bar{q}}_0(t). \tag{3.3.6}$$

Вземаме $t_0 = 0$, за да получим желания резултат.

□

Забележка 1. Отбелязваме, че $-\frac{2}{3}\omega_0$ не е корен на уравнението $4v^3 - g_2 v - g_3 = 0$ при $C_0 \neq 0$.

След това записваме уравненията във вариации (VE) около частното решение (3.3.2). Означаваме $\xi_0 = dq_0$, $\eta_0 = dp_0$, $\xi_j = dq_j$, $\eta_j = dp_j$. Тогава уравнението във вариации (VE) може да се запише във вида

$$\begin{aligned}
\dot{\xi}_0 &= \eta_0, \\
\dot{\eta}_0 &= \left(-2\omega_0 + 6\bar{q}_0^2(t) - \frac{3C_0^2}{\bar{q}_0^4(t)}\right)\xi_0, \qquad (3.3.7) \\
\dot{\xi}_j &= \eta_j, \\
\dot{\eta}_j &= \left(-2\omega_j + 2g_{\mathrm{BF}}\bar{q}_0^2(t)\right)\xi_j,\ j = 1, \ldots, N_f. \qquad (3.3.8)
\end{aligned}$$

Уравнението (3.3.7) формира тангенциалната част на уравненията във вариации (VE) и уравненията (3.3.8) съставят нормалната част от (VE),която означаваме с (NVE). Както се вижда от (3.3.8), (NVE) се разделя на система от N_f независими уравнения (NVE_j), $j = 1, \ldots, N_f$. Тук (NVE) е интегруема тогава и само тогава, когато всяко от (NVE_j) е интегруемо. С други думи, единичната компонента на групата на Галоа на (NVE) е разрешима (комутативна)

тогава и само тогава, когато всяка единична компонента в групите на Галоа на (NVE$_j$) е разрешима (комутативна). Достатъчно е да ограничим нашите изследвания до тях. Нека запишем (NVE$_j$) за фиксирано j като уравнение от втори ред

$$\ddot{\xi}_j + \left(2\omega_j - 2g_{\mathrm{BF}}\bar{q}_0^2(t)\right)\xi_j = 0. \tag{3.3.9}$$

Вземайки предвид частното решение (3.3.2), уравнението (3.3.9) е уравнение на Ламе

$$\ddot{\xi}_j + \left(2\omega_j - \frac{4}{3}g_{\mathrm{BF}}\omega_0 - 2g_{\mathrm{BF}}\wp(t)\right)\xi_j = 0. \tag{3.3.10}$$

Ще докажем, че ако $g_{\mathrm{BF}} \neq \frac{n(n+1)}{2}$, $n \in \mathbb{Z}$, то групата на монодромия на уравнението (3.3.10) не е абелева (вж. например [65] или [15]).

Уравнението (3.3.10) е фуксово, групата на монодромия поражда диференциалната група на Галоа, от което следва, че групата на Галоа не е комутативна. Тогава прилагаме Теорема 15 за хамилтоновата система с хамилнониан (3.3.1). Тази система не е интегруема в лиувилов смисъл.

Твърдение 3.3.2. *Комутаторът* $[g_1,\, g_2] = g_1 g_2 g_1^{-1} g_2^{-1}$ *на групата на монодромия на уравнението на Ламе* $\ddot{\xi} = (A\wp(t) + B)\,\xi$ *има собствени стойности* $\exp\left(\pi\left(1 \pm \sqrt{1+4A}\right)\right)$.

Доказателство. Ще следваме доказателството в [15]. Ще използваме развитието на $\wp(t)$ около регулярната особена точка $t = 0$. Имаме $\wp(t) = \dfrac{1}{t^2} + \cdots + O(1)$, заместваме го в уравнението на Ламе $\ddot{\xi} = \left(A\dfrac{1}{t^2} + \cdots + B\right)\xi$. Записваме определящото уравнение за $t = 0$: $\rho\,(\rho - 1) - A = 0$. Корените на това уравнение са $\rho_{1;2} = \dfrac{\left(1 \pm \sqrt{1+4A}\right)}{2}$. Тогава собствената стойност на трансформацията, отговаряща на комутатора на цикъла около $t = 0$ е $\exp\left(2\pi\rho_{1;2}\right)$. Ако $\exp\left(2\pi\rho_{1;2}\right)$ не е корен на единицата, групата на Галоа не е Абелева. Случаят, когато тази стойност е корен на единицата, се получава за $A = n(n+1)$.

Нека се съредочим върху случая, когато

$$g_{\mathrm{BF}} = \frac{n(n+1)}{2}, \qquad n \in \mathbb{Z}. \tag{3.3.11}$$

Както вече отбелязахме, в този случай (NVE) не може да бъде използвано за да се докаже неинтегруемост. Преминаваме към изучаване на тангенциалната част (VE) - равенство (3.3.7). Теорията казва, че в този случай групата на Галоа е разрешима. Наистина, имаме

Твърдение 3.3.3. *Групата на Галоа на (3.3.7) е комутативна.*

Доказателство. Известно е, че системата (3.3.7) има частно решение $(\xi_{0,1}, \dot{\xi}_{0,1}) = (\bar{p_0}(t), \dot{\bar{p_0}}(t))$. Другите решения могат да се получат чрез формулата на Даламбер

$$\xi_{0,2} = \xi_{0,1} \int_0^t \frac{d\tau}{(\xi_{0,2})^2}.$$

Отбелязваме коефициентите на полето на (3.3.7) с $K = \mathbb{C}\left(\wp(t), \wp'(t)\right)$. Това поле е изоморфно на полето на мероморфните функции $\mathcal{M}(\Gamma)$ върху Γ.

Лесно се вижда, че получените решения принадлежат на това поле, една част от тези решения лежат в квадратично разширение на полето K а другата част е получена чрез проста квадратура на елементите на това разширение. Следователно групата на Галоа на (3.3.7) действа по следният начин: $\sigma \in Gal(L/K)$, $\sigma(\xi_{0,1}) = \xi_{0,1}$ и $\sigma(\xi_{0,2}) = \xi_{0,2} + \alpha_0 \xi_{0,1}$, $\alpha_0 \in \mathbb{C}$. Нека $\Xi(t)$ е фундаментална матрица на (3.3.7)

$$\Xi = \begin{pmatrix} \xi_{0,2} & \xi_{0,1} \\ \dot{\xi}_{0,2} & \dot{\xi}_{0,1} \end{pmatrix}.$$

Тогава $\sigma \in Gal(L/K)$ може да бъде представена чрез матрицата R_{α_0}, $\sigma\Xi(t) = \Xi(t) R_{\alpha_0}$, където $R_{\alpha_0} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \alpha_0 & 1 \end{pmatrix}$. Ясно е, че групата $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \alpha_0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$ е абелева.

□

Понататък ще покажем, че ако $g_{\mathrm{BF}} \neq \frac{n(n+1)}{2}, n \in \mathbb{Z}$, то единичната компонента на групата на Галоа на (NVE) не е абелева. От това следва, че разглежданата хамилтонова система е неинтегруема. Добре известно е, че когато $g_{\mathrm{BF}} = \frac{n(n+1)}{2}$ групата на Галоа на всяко от уравненията (NVE_j) (3.3.8) е породена от матрици от вида $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \alpha_j & 1 \end{pmatrix}$. В такъв случай, с използване на резултата от Твърдение 3.3.1 получаваме, че единичната компонента на групата на Галоа на системата (VE) се представя като блоково - диагонална матрица от вида

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & & 0 & 0 \\ \alpha_0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & & \cdots & & \cdots & \cdots & \\ 0 & 0 & 1 & 0 & & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_j & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & & \cdots & & \cdots & \cdots & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \alpha_{N_f} & 1 \end{pmatrix}$$

и е напълно комутативна.

Интегруемостта на хамилтонови системи с две степени на свобода, чиято (NVE) са уравнения на Ламе е изследвана в [40, 65]. В Параграф 1.0.7 на Глава 1 ние формулирахме Теорема 16,която дава необходимите условия за интегруимост. В нашият случай (NVE) се свежда до система от N_f уравнения, т.е. можем да приложим тази теорема.

Потенциалът $\varphi(q_0)$ е получен от (3.3.5). Означаваме $\alpha(t,h) := n(n+1)\wp(t) + B_j$. Пресмятаме коефициентите на полинома $P(\alpha, h)$.

$$P(\alpha,h) = (a_1 + ha_2)\alpha^3 + (b_1 + hb_2)\alpha^2 + (c_1 + hc_2)\alpha + (d_1 + hd_2).$$

В нашият случай те сае:

$$\begin{aligned} a_1 &= \tfrac{4}{n(n+1)}, \quad a_2 = 0, \quad b_1 = -\tfrac{12B_j}{n(n+1)}, \quad b_2 = 0 \\ c_1 &= \tfrac{12B_j^2}{n(n+1)} - \tfrac{16}{3}\omega_0^2 n(n+1), \quad c_2 = 4n(n+1), \\ d_1 &= \tfrac{16}{3} b_j \omega_0^2 n(n+1) - \tfrac{4}{n(n+1)} B_j^3 - n^2(n+1)^2 \left(4C_0^2 + \tfrac{64}{27}\omega_0^3\right), \quad d_2 = 8n(n+1)\omega_j. \end{aligned} \tag{3.3.12}$$

Сега сме готови да приложим Теорема 16.

Условието 3 не е изпълнено: $c_2 \neq 0$ и $c_2 b_1 - 3a_1 d_2 = -32\omega_0 n(n+1)$, не е нула при предположение, че ω_0, ω_j са положителни, от предположенията при формулиране на задачата. По-точно няма решения на Балтазари.

Продължаваме със случаите на Условие 2. В случая 2.1, $m = 1$, $b_1 = 0$ е еквивалентно на

$$B_j = 0, \quad \text{or}, \quad \omega_j = \omega_0/4, \quad j = 1, \ldots, N_f. \tag{3.3.13}$$

Ако за някое j, $B_j \neq 0$ тогава системата не е интегруема за това m. Да разгледаме случая, когато всички $B_j = 0$.

В случая 2.2 $m = 2$ не е възможен, тъй като $c_2 \neq 0$.

В случая 2.3, $m = 3$ необходимите условия

$$16a_1 d_2 + 11 b_1 c_2 = 0, \quad 1024 a_1^2 d_1 + 704 a_1 b_1 c_1 + 45 b_1^3 = 0$$

са съответно

$$B_j = \frac{32}{33}\omega_j, \quad (55\omega_0 = 28\omega_j), \quad 7^3 C_0^2 = 72\omega_0^3. \tag{3.3.14}$$

Ако някое от горните условия не е изпълнено, тогава системата и неинтегруема за това m. Ще разгледаме случая, когато условията (3.3.14) са в сила за всички j.

Накрая, случая 2.m, $m > 3$ не е изпълнен, когато $c_2 \neq 0$ и $d_2 \neq 0$.

За да изследваме случаите $g_{\mathrm{BF}} = \frac{n(n+1)}{2}, n \in \mathbb{Z}$, ще изучим групите на Галоа на уравненията от по-високи вариации и да приложим Теорема 8. За да пресметнем вариациите от по-висок ред,

прилагаме стандартната процедура

$$\begin{aligned} q_0 &= \bar{q}_0 + \varepsilon\xi_0^{(1)} + \varepsilon^2\xi_0^{(2)} + \varepsilon^3\xi_0^{(3)} + \ldots, \\ p_0 &= \bar{p}_0 + \varepsilon\eta_0^{(1)} + \varepsilon^2\eta_0^{(2)} + \varepsilon^3\eta_0^{(3)} + \ldots, \\ q_j &= 0 \ + \varepsilon\xi_j^{(1)} + \varepsilon^2\xi_j^{(2)} + \varepsilon^3\xi_j^{(3)} + \ldots, \\ p_j &= 0 \ + \varepsilon\eta_j^{(1)} + \varepsilon^2\eta_j^{(2)} + \varepsilon^3\eta_j^{(3)} + \ldots, \ j = 1, \ldots, N_f. \end{aligned} \tag{3.3.15}$$

като заместим тези изрази в първоначалната хамилтонова система за този случай. Сравнявайки коефициентите пред равните степени на ε, за нашите цели е достатъчно да се ограничим до уравнения във вариации до степен 3.

Първото вариационно уравнение е

$$\begin{aligned} \dot{\xi}_0^{(1)} &= \eta_0^{(1)}, \\ \dot{\eta}_0^{(1)} &= \left(-2\omega_0 + 6\bar{q}_0^2 - \frac{3C_0^2}{\bar{q}_0^4}\right)\xi_0^{(1)}, \end{aligned} \tag{3.3.16}$$

$$\begin{aligned} \dot{\xi}_j^{(1)} &= \eta_j^{(1)}, \\ \dot{\eta}_j^{(1)} &= (-2\omega_j + 2g_{\mathrm{BF}}\bar{q}_0^2)\xi_j^{(1)}, \ j = 1, \ldots, N_f. \end{aligned} \tag{3.3.17}$$

ние всъщност го знаем от преди (вж. (3.3.7, (3.3.8)). За второто вариационно уравнение имаме

$$\begin{aligned} \dot{\xi}_0^{(2)} &= \eta_0^{(2)}, \\ \dot{\eta}_0^{(2)} &= \left(-2\omega_0 + 6\bar{q}_0^2 - \frac{3C_0^2}{\bar{q}_0^4}\right)\xi_0^{(2)} + K_0^{(2)}, \end{aligned} \tag{3.3.18}$$

$$\begin{aligned} \dot{\xi}_j^{(2)} &= \eta_j^{(2)}, \\ \dot{\eta}_j^{(2)} &= (-2\omega_j + 2g_{\mathrm{BF}}\bar{q}_0^2)\xi_j^{(2)} + K_j^{(2)}, \ j = 1, \ldots, N_f. \end{aligned} \tag{3.3.19}$$

Третото уравнение във вариации е

$$\begin{aligned} \dot{\xi}_0^{(3)} &= \eta_0^{(3)}, \\ \dot{\eta}_0^{(3)} &= \left(-2\omega_0 + 6\bar{q}_0^2 - \frac{3C_0^2}{\bar{q}_0^4}\right)\xi_0^{(3)} + K_0^{(3)}, \end{aligned} \tag{3.3.20}$$

$$\begin{aligned} \dot{\xi}_j^{(3)} &= \eta_j^{(3)}, \\ \dot{\eta}_j^{(3)} &= (-2\omega_j + 2g_{\mathrm{BF}}\bar{q}_0^2)\xi_j^{(3)} + K_j^{(3)}, \ j = 1, \ldots, N_f. \end{aligned} \tag{3.3.21}$$

Тук

$$\begin{aligned}
K_0^{(2)} &= 2g_{\rm BF}\bar{q}_0\sum(\xi_j^{(1)})^2 + 6\bar{q}_0(\xi_0^{(1)})^2 + 6C_0^2\frac{(\xi_0^{(1)})^2}{\bar{q}_0^5},\\
K_j^{(2)} &= 4g_{\rm BF}\bar{q}_0\xi_0^{(1)}\xi_j^{(1)},\ j=1,\ldots,N_f,\\
K_0^{(3)} &= 2g_{\rm BF}\left[2\bar{q}_0\sum\xi_j^{(1)}\xi_j^{(2)} + \xi_0^{(1)}\sum(\xi_j^{(1)})^2\right] + 2(\xi_0^{(1)})^3 + 12\bar{q}_0\xi_0^{(1)}\xi_0^{(2)}\\
&- \frac{C_0^2}{\bar{q}_0^6}\left[10(\xi_0^{(1)})^3 - 12\bar{q}_0\xi_0^{(1)}\xi_0^{(2)}\right], \qquad (3.3.22)\\
K_j^{(3)} &= 2g_{\rm BF}\left[(\xi_0^{(1)})^2\xi_j^{(1)} + 2\bar{q}_0\left(\xi_0^{(1)}\xi_j^{(2)} + \xi_0^{(2)}\xi_j^{(1)}\right)\right],\quad j=1,\ldots,N_f.
\end{aligned}$$

По-нататък имаме

$$\begin{aligned}
f_2 &= \left[0, K_0^{(2)}, 0, K_1^{(2)}, \ldots, 0, K_{N_f}^{(2)}\right]^T,\\
f_3 &= \left[0, K_0^{(3)}, 0, K_1^{(3)}, \ldots, 0, K_{N_f}^{(3)}\right]^T. \qquad (3.3.23)
\end{aligned}$$

Първо решаваме (VE_1). Нека $\xi_{0,1}^{(1)}, \xi_{0,2}^{(1)}$ са две линейно независими решения на (3.3.16) с вронскиан равен на едно, т. е., $\xi_{0,1}^{(1)}\dot{\xi}_{0,2}^{(1)} - \dot{\xi}_{0,1}^{(1)}\xi_{0,2}^{(1)} = 1$. Аналогично, $\xi_{j,1}^{(1)}, \xi_{j,2}^{(1)}$ са линейно независими решения на (3.3.17) с единичен вронскиан. Тогава фундаменталната матрица $X(t)$ на (3.3.16), (3.3.17) и нейната обратна са в блоково-диагонална форма

$$X(t) = \begin{pmatrix}
\xi_{0,1}^{(1)} & \xi_{0,2}^{(1)} & 0 & 0 & & 0 & 0\\
\dot{\xi}_{0,1}^{(1)} & \dot{\xi}_{0,2}^{(1)} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0\\
\cdots & & \cdots & & \cdots & \cdots & \\
0 & 0 & \xi_{j,1}^{(1)} & \xi_{j,2}^{(1)} & & 0 & 0\\
0 & 0 & \dot{\xi}_{j,1}^{(1)} & \dot{\xi}_{j,2}^{(1)} & \cdots & 0 & 0\\
\cdots & & \cdots & & \cdots & \cdots & \\
0 & 0 & 0 & 0 & & \xi_{N_f,1}^{(1)} & \xi_{N_f,2}^{(1)}\\
0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \dot{\xi}_{N_f,1}^{(1)} & \dot{\xi}_{N_f,2}^{(1)}
\end{pmatrix}, \qquad (3.3.24)$$

$$X^{-1}(t) = \begin{pmatrix} \dot{\xi}^{(1)}_{0,2} & -\xi^{(1)}_{0,2} & 0 & 0 & & 0 & 0 \\ -\dot{\xi}^{(1)}_{0,1} & \xi^{(1)}_{0,1} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & & \cdots & & \cdots & \cdots & \\ 0 & 0 & \dot{\xi}^{(1)}_{j,2} & -\xi^{(1)}_{j,2} & & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\dot{\xi}^{(1)}_{j,1} & \xi^{(1)}_{j,1} & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & & \cdots & & \cdots & \cdots & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & & \dot{\xi}^{(1)}_{N_f,2} & -\xi^{(1)}_{N_f,2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & -\dot{\xi}^{(1)}_{N_f,1} & \xi^{(1)}_{N_f,1} \end{pmatrix} \tag{3.3.25}$$

Първите вариационни уравнения (VE_1) (3.3.16), 3.3.17) имат особеност в точка $t = 0$ (полюс на $\wp(t)$). Пресмятаме развитието в ред на Лоран на решенията на вариационните уравнения в околност на точка $t = 0$. Отбелязваме, че

$$\bar{q}_0(t) = \frac{1}{t} + \frac{\omega_0}{3}t + \left(\frac{g_2}{40} - \frac{\omega_0^2}{18}\right)t^3 + \ldots. \tag{3.3.26}$$

Тук и нататък точките означават членове от по-висок ред по променливата t. В околност на точката $t = 0$ получаваме следните изрази за решенията на тангенциалната част на (VE_1) системата (3.3.16)

$$\begin{aligned} \xi^{(1)}_{0,1} &= \frac{1}{t^2} - \frac{\omega_0}{3} + \left(\frac{g_2}{40} - \frac{\omega_0^2}{18}\right)t^2 + \ldots, \\ \xi^{(1)}_{0,2} &= \frac{t^3}{5} + \frac{\omega_0}{35}t^5 + \ldots. \end{aligned} \tag{3.3.27}$$

Сега предполагаме, че $g_{\mathrm{BF}} = \frac{n(n+1)}{2} \neq 0$. За да покажем пресмятанията в общия случай, ще разгледаме два конкретни случая: $n = 1$ и $n = 2$. Нека първо вземем $n = 1$, ще използваме и стойността, която се получава за g_{BF}: тя е 1. В околност до точката $t = 0$ ние получаваме следните изрази за решенията $\xi^{(1)}_{j,1}, \xi^{(1)}_{j,2}$ of (3.3.17) ($n = 1$)

$$\begin{aligned} \xi^{(1)}_{j,1} &= \frac{1}{t} + \frac{a_j}{2}t + \left(\frac{g_2}{40} - \frac{a_j^2}{8}\right)t^3 + \ldots, \\ \xi^{(1)}_{j,2} &= \frac{t^2}{3} - \frac{a_j}{30}t^4 + \ldots, \end{aligned} \tag{3.3.28}$$

като $a_j = 2\omega_j - 4\omega_0/3$.

Няма логаритмични изрази в околност на $t = 0$ на локалното решение на втората вариация (VE_2). Ние търсим всъщност ненулеви коефициенти пред $\frac{1}{t}$ в изразите, които се получават от $X^{-1}f_2$ с получените локални решения. Такива няма за втората вариация (това е смисълът на понятието - "няма логаритмични членове").

Ще покажем, че логаритмични членове се появяват за локалните решения на (VE_3). За тази цел е достатъчно да покажем, че компонентата на $X^{-1}f_3$ има различен от нула резидуум за $t = 0$, вж. формули (1.0.9), (1.0.10). Пресмятаме j-тата компонента $j = 1, \ldots, N_f$ на $X^{-1}f_3$, която има вида

$$(-\xi^{(1)}_{j,2}K^{(3)}_j, \xi^{(1)}_{j,1}K^{(3)}_j)^T. \tag{3.3.29}$$

Избираме

$$\xi^{(1)}_0 = \xi^{(1)}_{0,2}, \quad \xi^{(1)}_j = \xi^{(1)}_{j,1}. \tag{3.3.30}$$

При този избор намираме

$$\begin{aligned} \xi^{(2)}_{0,1} &= \frac{1}{t^2} + \frac{g_{\mathrm{BF}}N_f}{2}\frac{1}{t} - \frac{\omega_0}{3} + \ldots, \\ \xi^{(2)}_{0,2} &= \frac{g_{\mathrm{BF}}N_f}{2}\frac{1}{t} + \ldots \end{aligned} \tag{3.3.31}$$

и

$$\xi^{(2)}_{j,1} = \frac{1}{t} + \frac{a_j}{2}t + \ldots, \quad \xi^{(2)}_{j,2} = \frac{t^2}{3} + \ldots. \tag{3.3.32}$$

Вземайки първия член (3.3.29), а именно

$$\mu = -\xi^{(1)}_{j,2}K^{(3)}_j = -\xi^{(1)}_{j,2}2g_{\mathrm{BF}}\left[(\xi^{(1)}_0)^2\xi^{(1)}_j + 2\bar{q}_0\left(\xi^{(1)}_0\xi^{(2)}_j + \xi^{(2)}_0\xi^{(1)}_j\right)\right]$$

при избора (3.3.30) и $\xi^{(2)}_0 = \xi^{(2)}_{0,2}$ и $\xi^{(2)}_j = \xi^{(2)}_{j,1}$ забелязваме, че μ има прост полюс при $t = 0$ с резидуум $-2g^2_{\mathrm{BF}}N_f/3$, който е ненулев.

Следователно единичната компонента в групата на Галоа на (VE_3) не е комутативна и в този случай хамилтоновата система (3.0.1) не е интегруема според Теорема 4.

Аналогично за $n = 2$ и $g_{\mathrm{BF}} = 3$ получаваме следните изрази за решенията $\xi_{j,1}^{(1)}, \xi_{j,2}^{(1)}$ of (3.3.17)

$$\xi_{j,1}^{(1)} = \frac{1}{t^2} - \frac{B_j}{6} + O(t^2), \quad \xi_{j,2}^{(1)} = \frac{t^3}{5} + \frac{B_j t^5}{70} + \dots, \tag{3.3.33}$$

където $B_j = 4\omega_0 - 2\omega_j (n = 2)$. Нека разгледаме първите изрази за локалните решения за (VE_2) в околност на $t = 0$. Пресмятанията за $\mu_2 = \xi_{j,1}^{(1)} K_j^{(2)}$ с $\xi_0^{(1)} = \xi_{0,1}^{(1)}, \xi_j^{(1)} = \xi_{j,1}^{(1)}$ дават

$$\mu_2 = \frac{12}{t^7} - \frac{4B_j}{t^5} + \frac{\frac{4}{3}B_j^2 - \frac{12}{5}g_2}{t^3} + \frac{B_j(g_2 - \frac{1}{3}B_j^2)}{t} + O(t).$$

Тъй като g_2 зависи от h, която е произволна, при условие $\Delta = g_2^3 - 27g_3^2 \neq 0$, единствената възможност за резидуума в μ_2 да е нула е $B_j = 0$ или $\omega_j = 2\omega_0$. Ако съществува поне един ω_j, такъв, че $B_j \neq 0$, тогава логаритмичен член може да се появи в решението на (VE_2) в околност $t = 0$.

Ние пристъпваме към случая, когато всички $B_j = 0$, или еквивалентното, $\omega_j = 2\omega_0, j = 1, \dots, N_f$. Избираме

$$\xi_0^{(1)} = \xi_{0,1}^{(1)} = \frac{1}{t^2} - \frac{\omega_0}{3} + \dots, \quad \xi_j^{(1)} = \xi_{j,2}^{(1)} = \frac{t^3}{5} + \dots. \tag{3.3.34}$$

първо намираме, че

$$\xi_{0,1}^{(2)} = \frac{1}{t^3} + \frac{1}{t^2} - \frac{\omega_0}{5t} - \frac{\omega_0}{3} + \dots, \qquad \xi_{0,2}^{(2)} = \frac{1}{t^3} - \frac{\omega_0}{5t} + \dots$$

и

$$\xi_{j,1}^{(2)} = \frac{1}{t^2} + \dots, \qquad \xi_{j,2}^{(2)} = -\frac{3}{5}t^2 + \frac{t^3}{5} + \dots.$$

Вземаме вторият член във (3.3.29) $\mu_3 = \xi_{j,1}^{(1)} K_j^{(3)}$ заедно с (3.3.34) и $\xi_0^{(2)} = \xi_{0,2}^{(2)}, \xi_j^{(2)} = \xi_{j,2}^{(2)}$ може да се види, че μ_3 има прост полюс с резидуум $-\omega_0 72/25$, който е ненулев $\omega_0 \neq 0$ по предположение.

В разгледаните случаи единичната компонента на групата на Галоа на of (VE_2) или (VE_3) не е комутативна и хамилтоновата система, която разглеждаме не е интегруема.

Продължаваме с разглеждането на случая 2.1 с (3.3.13). Тук $n = \frac{1}{2}$ и $g_{\mathrm{BF}} = \frac{3}{8}$. Вземаме

$$\xi_0^{(1)} = \xi_{0,1}^{(1)}, \quad \xi_j^{(1)} = \xi_{j,2}^{(1)}.$$

Няма логаритмични членове в развитието в околност на $t = 0$ на локалните решения на второто вариационно уравнение (VE_2) поради (3.3.13). След горният избор, имаме

$$\xi_0^{(2)} = \xi_{0,2}^{(2)} = \frac{1}{t^3} + O(t), \quad \xi_j^{(2)} = \xi_{j,1}^{(2)} = \frac{1}{\sqrt{t}} - \frac{3}{4}\sqrt{t} + O(t^{3/2}).$$

Тогава първият член в (3.3.29) има следното развитие в околност на $t = 0$

$$\mu_3 = -\xi_{j,2}^{(1)} K_j^{(3)} = -\frac{3}{8}\left[\frac{2}{t^2} - \frac{2\omega_0}{3t} + \dots\right],$$

ето защо μ_3 има полюс в $t = 0$ с ненулев резидуум $\frac{\omega_0}{4}$. Следователно единичната компонента на групата на Галоа на (VE_3) не е абелева в този случай което води до това, че и хамилтоновата система не е интегруема.

Накрая разглеждаме случая 2.3 с (3.3.14). Тук $n = \frac{5}{2}$ и $g_{\mathrm{BF}} = \frac{35}{8}$. Вземаме

$$\xi_0^{(1)} = \xi_{0,1}^{(1)}, \quad \xi_j^{(1)} = \xi_{j,1}^{(1)}.$$

Няма логаритмични членове в развитието около $t = 0$ на локалните решения пре вторите вариации (VE_2) поради (3.3.14). Както преди, намираме, че

$$\xi_0^{(2)} = \xi_{0,2}^{(2)} = \frac{5N_f}{144t^4} + \frac{1}{t^3} - \frac{N_f\omega_0}{224t^2} - \frac{\omega_0}{5t} + O(t^0),$$

$$\xi_j^{(2)} = \xi_{j,2}^{(2)} = t^{7/2}(1 + O(t^2) + t^{-7/2}\left(\frac{5}{12} - \frac{\omega_j}{99}t^2 + \dots\right).$$

Отново първият член в (3.3.29) има развитие около $t = 0$

$$\mu_3 = -\xi_{j,2}^{(1)} K_j^{(3)} = -\frac{175N_f}{1728t^4} - \frac{35}{3t^3} - \frac{5N_f\omega_0}{576t^2} + \frac{7\omega_0}{12t} + O(t^0),$$

такар че, μ_3 има ненулев резидуум $\frac{7}{12}\omega_0$ в $t = 0$. Следователно, единичната компонента на групата на Галоа на (VE_3) не е абелева в този случай и хамилтоновата система не е интегруема.

Забележка. За всяко $n \in \mathbb{Z}$ и $g_{\mathrm{BF}} = \frac{n(n+1)}{2}$ е нужно да се знаят точните коефициенти в изразите за решенията на уравнението на Ламе (3.3.17) и евентуалните изрази за вариациите от по-висок ред. Тези формули са твърде сложни за пресмятане (технически).

Това завършва доказателството на тази част от Теорема 6.

3.4 Случай $C_0 \neq 0, C_1 \neq 0$.

Тук ще разглеждаме хамилтониана само за две степени на свобода

$$H = \frac{p_0^2}{2} + \omega_0 q_0^2 - \frac{q_0^4}{2} + \frac{C_0^2}{2q_0^2} + \frac{p_1^2}{2} + \omega_1 q_1^2 + \frac{C_1^2}{2q_1^2} - g_{\mathrm{BF}} q_0^2 q_1^2. \quad (3.4.1)$$

Ако означим $\varepsilon := g_{\mathrm{BF}}$ и предположим, че ε е достатъчно малко, можем да напишем (3.4.1) като

$$H = H_0 + \varepsilon H_1, \quad (3.4.2)$$

където

$$H_0 = \frac{p_0^2}{2} + \omega_0 q_0^2 - \frac{q_0^4}{2} + \frac{C_0^2}{2q_0^2} + \frac{p_1^2}{2} + \omega_1 q_1^2 + \frac{C_1^2}{2q_1^2}, \quad H_1 = -q_0^2 q_1^2. \quad (3.4.3)$$

Непертурбираната система ($\varepsilon = 0$) е с разделени променливи - интегруема.

$$\dot{q}_0 = p_0, \quad \dot{p}_0 = -2\omega_0 q_0 + 2q_0^3 + \frac{C_0^2}{q_0^3}, \quad (3.4.4)$$

$$\dot{q}_1 = p_1, \qquad \dot{p}_1 = -2\omega_1 q_1 + \frac{C_1^2}{q_1^3} \quad (3.4.5)$$

В доказателството на Твърдение 3.3.1 общото решение на (3.4.4) е намерено в (3.3.6). От доказателството на Твърдение 3.3.1 общото решение на (3.4.5) е

$$q_1^2 = \frac{h_1}{2\omega_1} + \sqrt{\frac{C_1^2}{2\omega_1} - \frac{h_1^2}{4\omega_1^2}} \sinh 2i\sqrt{2\omega_1}(t - t_0), \quad p_1 = \dot{q}_1. \quad (3.4.6)$$

Първо ще разгледаме хамилтониана H в контекста на теорията на Поанкаре-Арнолд-Мелников-Зиглин. Това предполага, че в този случай променливите са реални. Въвеждаме променливите действие-ъгъл (I, φ), така че $H_0 = H_0(q_0, p_0, I)$. За да продължим, имаме нужда от пораждаща функция $S(I, q_1)$:

$$(p_1, q_1) \overset{S(I,q_1)}{\longrightarrow} (I, \varphi), \quad p_1 = \frac{\partial S}{\partial q_1}, \quad \varphi = \frac{\partial S}{\partial I},$$

където

$$\frac{p_1^2}{2} + \omega_1 q_1^2 + \frac{C_0^2}{2q_0^2} = h_1 \to h_1(I) := I. \tag{3.4.7}$$

Забелязваме, че реални овали на кривата (p_1, q_1) в (3.4.7) съществуват за $h_1 > \dfrac{C_1^2\sqrt{2\omega_1}}{\sqrt{C_1^2}}$. Тогава формулата (3.4.6) приема вида

$$q_1^2 = \frac{h_1}{2\omega_1} - \sqrt{\frac{h_1^2}{4\omega_1^2} - \frac{C_1^2}{2\omega_1}}\sin 2\sqrt{2\omega_1}(t - t_0). \tag{3.4.8}$$

Пораждащата функция S може да бъде намерена експлицитно, но това не ни е нужно, ние просто вземаме

$$I := \frac{p_1^2}{2} + \omega_1 q_1^2 + \frac{C_0^2}{2q_0^2}, \quad \varphi := \int \frac{dq_1}{p_1}. \tag{3.4.9}$$

Забелязваме, че $dI \wedge d\varphi = dp_1 \wedge dq_1$, φ е многозначна, но $\dot{\varphi} = 1$, ето защо, t и φ са равнозначни.

По-нататък фиксираме I да е по-голяма от $\dfrac{C_1^2\sqrt{2\omega_1}}{\sqrt{C_1^2}}$ и разглеждаме отново $t, q_0(t), p_0(t)$ като комплексни променливи. Нашата система е с една и половина степени на свобода с хамилтониан $H = H_0 + \varepsilon H_1$, където

$$H_0 = \frac{p_0^2}{2} + \omega_0 q_0^2 - \frac{q_0^4}{2} + \frac{C_0^2}{2q_0^2} + I, \tag{3.4.10}$$

$$H_1 = -q_0^2\left(\frac{I}{2\omega_1} - \sqrt{\frac{I^2}{4\omega_1^2} - \frac{C_1^2}{2\omega_1}}\sin 2\sqrt{2\omega_1}(t - t_0)\right). \tag{3.4.11}$$

Ще намерим сепаратрисите в динамиката на (q_0, p_0). Нека h^* е най-големият реален корен на (h зависи неявно от I, c_0 и c_1)

$$\begin{aligned}\Delta(h) &= g_2^3 - 27g_3^2 \\ &= -64\left(h^3 - \omega_0^2 h^2 - 9C_0^2\omega_0 h + 8C_0^2\omega_0^3 + \frac{27}{4}C_0^4\right) = 0.\end{aligned}$$

Предполагаме, че $4\omega_0^2 - 3h^* > 0$. Това не ограничава общността – както вече видяхме ω_0, C_0 ω_1 и C_1 не влияят на интегруемостта на нашата система. По-нататък да означим

$$a := \frac{\sqrt{4\omega_0^2 - 3h^*}}{3} > 0.$$

Тогава системата (3.4.4) има сепаратриса

$$\Gamma_0 : q_0^2(t) = \frac{2}{3}\omega_0 + a + \frac{3a}{\sinh^2(\sqrt{3a}t)}, \quad p_0(t) = \dot{q}_0(t). \tag{3.4.12}$$

Пертурбираните уравнения във вариации (PVE) на (3.4.10) върху Γ_{t_0} се дават чрез (вж. [33, 66])

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix}\xi\\ \eta\\ \nu\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} H_{0,q_0p_0} & H_{0,p_0p_0} & H_{1,p_0}\\ -H_{0,q_0q_0} & -H_{0,q_0p_0} & -H_{1,q_0}\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\xi\\ \eta\\ \nu\end{pmatrix}, \tag{3.4.13}$$

където всички коефициенти са ограничени върху Γ_{t_0}. За да изучим групата на Галоа на (PVE) трябва да фиксираме полето от коефициентите K в (3.4.13). От израза за сепаратрисата (3.4.12) и пертурбацията H_1 (3.4.10) имаме

$$K := \mathbb{C}(e^{\sqrt{3a}t}, e^{2\sqrt{2\omega_1}it}).$$

Тогава, за фундаменталната матрица на (3.4.13) в квадратури, е нужно $\delta = \delta(t) = \int \frac{H_{0,p_0p_0}}{H_{0,p_0}^2}_{|\Gamma_0} dt$ (вж. [66] за подробности). В нашия случай за $\delta = \int \frac{dt}{p_0^2(t)}$ имаме

$$\begin{aligned}\delta &= \frac{1}{(3a)^3}\Big(\frac{2\omega_0+3a}{12\sqrt{3a}}\sinh(\sqrt{3a}t)\cosh^3(\sqrt{3a}t)\\ &+ \frac{10\omega_0+27a}{8\sqrt{3a}}\sinh(\sqrt{3a}t)\cosh(\sqrt{3a}t)\\ &+ \frac{2\omega_0+12a}{3\sqrt{3a}}\tanh(\sqrt{3a}t) + \frac{26\omega_0+99a}{8}t\Big).\end{aligned}$$

Ясно е, че $\delta = \delta(t)$ и $\delta \notin K$. Тогава разширението на Пикар-Весио на (3.4.13) е $L_1 = K(\delta) = \mathbb{C}(e^{\sqrt{3a}t}, e^{2\sqrt{2\omega_1}it}, t)$. Остава да намерим $d(t_0)$. Нека γ е гладка крива около полюса $t = 0$.

Пресмятаме последователно $\frac{\partial H_0}{\partial p_0} = p_0$,

$$\frac{\partial H_1}{\partial q_0} = -2q_0\left(\frac{I}{2\omega_1} - \sqrt{\frac{I^2}{4\omega_1^2} - \frac{C_1^2}{2\omega_1}}\sin 2\sqrt{2\omega_1}(t-t_0)\right),$$

$\frac{\partial H_0}{\partial q_0} = 2\omega_0 q_0 - 2q_0^3 - \frac{C_0^2}{q_0^3}$ и $\frac{\partial H_1}{\partial p_0} = 0$. След това получаваме

$$\{H_0,\, H_1\} = -2p_0 q_0 \left(\frac{I}{2\omega_1} - \sqrt{\frac{I^2}{4\omega_1^2} - \frac{C_1^2}{2\omega_1}} \sin 2\sqrt{2\omega_1}(t - t_0) \right),$$

а като имаме предвид, че $p_0 = \dot{q_0}$ и $2q_0 p_0 = \frac{-6a\sqrt{3a}t\cosh(\sqrt{3a}t)}{(\sinh(\sqrt{3a}t))^3}$, получаваме интеграла на Поанкаре-Арнолд-Мелников

$$\begin{aligned}
d(t_0) &= \int_\gamma \{H_0, H_1\}(q_0(t), p_0(t), t - t_0)dt \\
&= \int_\gamma \frac{-6a\sqrt{3a}\cosh(\sqrt{3a}t)}{(\sinh(\sqrt{3a}t))^3} \left(\frac{I}{2\omega_1} - \sqrt{\frac{I^2}{4\omega_1^2} - \frac{C_1^2}{2\omega_1}} \sin 2\sqrt{2\omega_1}(t - t_0) \right) dt \\
&= \int_\gamma 6a \left(\frac{I}{2\omega_1} - \sqrt{\frac{I^2}{4\omega_1^2} - \frac{C_1^2}{2\omega_1}} \sin 2\sqrt{2\omega_1}(t - t_0) \right) d\left(\frac{1}{(\sinh(\sqrt{3a}t))^2} \right) \\
&= \int_\gamma 6a \left(\sqrt{\frac{I^2}{4\omega_1^2} - \frac{C_1^2}{2\omega_1}} \sin 2\sqrt{2\omega_1}(t - t_0) \right) \left(\frac{1}{(\sinh(\sqrt{3a}t))^2} \right) dt \\
&= 12\pi i a\sqrt{2\omega_1} \sqrt{\frac{I^2}{4\omega_1^2} - \frac{C_1^2}{2\omega_1}} \sin 2\sqrt{2\omega_1} t_0.
\end{aligned}$$

Окончателно получаваме

$$\begin{aligned}
d(t_0) &= \int_\gamma \{H_0, H_1\}(q_0(t), p_0(t), t - t_0)dt \\
&= 12\pi i a\sqrt{2\omega_1} \sqrt{\frac{I^2}{4\omega_1^2} - \frac{C_1^2}{2\omega_1}} \sin 2\sqrt{2\omega_1} t_0.
\end{aligned}$$

Забелязваме, че $d(t_0)$ има само прости нули и според Теорема 18 пертурбираната сепаратриса се самопресича трансверзално. Също така, тъй като $d(t_0)$ не е тъждествено нула, групата на Галоа на пертурбираната система във вариации не е абелева според [66]. Следователно, когато $\varepsilon = g_{\mathrm{BF}} \neq 0$ системата няма допълнителен мероморфен пръв интеграл.

Това завършва доказателството на този случай и доказва Теорема 6.

Доказаните по-горе резултати ни водят до извода, че системата (3.0.1) не е интегруема с изключение на случая $g_{\mathrm{BF}} = 0$.

Формулите (3.2.4) и (3.3.6) дават общото решение, когато системата е с разделени променливи при ($g_{\mathrm{BF}} = 0$).

Приложение А

G-функция на Майер

Мотивация за това изложение е, че G се явява естествено обобщение на хипергеометричната функция ${}_pF_q$ при $p > q+1$. Започваме с уравнението

$$\left[\prod_{j=1}^{p}(D+a_j-1) - x\prod_{j=1}^{q}(D+b_j)\right] v(x) = 0. \tag{A.0.1}$$

Тук $D = xd/dx$, $0 \leq p \leq q, \mu_j, \nu_j \in \mathbb{C}, \mu_i - \mu_j \notin \mathbb{Z}$. За това уравнение точката 0 се явява регулярна сингулярна точка, а ∞ е иррегулярна сингулярна.

1) $\underline{\alpha} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{C}^n$;

2) $\langle \underline{\alpha} \rangle_m = \prod_{j=1}^{n} \alpha_j(\alpha_j+1)\ldots(\alpha_j+m-1)$;

3) За $a \in \mathbb{C}^p, b \in (\mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}^-)^q$, нека:

$$ {}_pF_q(\underline{a};\underline{b}\,|z) = \sum_{n\geq 0} \frac{\langle \underline{a} \rangle_n}{\langle \underline{b} \rangle_n} \frac{z^n}{n!} \tag{A.0.2}$$

да е обобщеният хипергеометричен ред и

$$G_{pq}^{m\,n}\left(x \,\middle|\, \underline{ab}\right) = \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\prod_{j=1}^{m}\Gamma(b_j-s)\prod_{j=1}^{n}\Gamma(1-a_j+s)}{\prod_{j=m+1}^{q}\Gamma(1-b_j+s)\prod_{j=n+1}^{q}\Gamma(a_j-s)} x^s d\,s, \tag{A.0.3}$$

е G-функцията на Майер [60], а L е подходящ път в комплексната равнина. Предполагаме, че е изпълнено че $p < q$. Известен факт

е, че ${}_pF_q$ може да бъде изразен като G- функцията (вж.[49, 8]). В изложението от тук нататък ще следваме [8].

G-функцята на Майер е една забележителна фамилия $\mathfrak{G}$ от функции на една променлива, като всяка функция от тази фамилия зависи от краен брой индекси. Въпреки че всяка една от функциите от тази фамилия може да се представи чрез определени специални функции от стандартен тип, те не са много популярни в математическите среди. Причините за нашето изложение (освен използването на G-функции в основния текст) са следните:

*) G-функциите играят съществена роля в определени математически изразявания.

*) Като се погледнат концептуално, те са естествени и доста атрактивни.

*) Много специални функции и доста резултати от действия със специални функции са G-функции или се изразяват като резултат от действия с G-функции и някои елементарни функции.

Например експонентата се представя по следния начин

$$e^x = G_{1\,0}^{0,1}\left(x\,\middle|\,1\right),$$

а функциата на Бесел се представя така

$$J_\nu(2x) = x^{-\nu} G_{1,0}^{0,2}\left(x^2\,\middle|\,\nu 0\right).$$

*) Фамилията $\mathfrak{G}$ от G-функции има забележително затварящо свойство: затворено е относно отраженията $x \to -x$ и $x \to 1/x$, умножаване на редове, диференциране, интегриране, трансформация на Лаплас, трансформация на Ойлер и мултипликативна конволюция . Имайки предвид, че ако G, G_1 и G_2 принадлежат на $\mathfrak{G}$ и различните трансформации включително и инволюцията $G_1 * G_2$ съществуват, тогава на $\mathfrak{G}$принадлежат и:

$$G(-x),\ G(1/x),\ x^a G(x),\ G'(x); \tag{A.0.4}$$

$$\int_c^x G(y)dy; \tag{A.0.5}$$

$$LG(x) \equiv \int_0^\infty e^{-xy} G(y) dy; \tag{A.0.6}$$

$$\mathfrak{L}_{a,b} G(x) \equiv \int_0^1 t^{a-1} (1-t)^{b-1} G(ty) dy; \tag{A.0.7}$$

$$[G_1 * G_2](x) \equiv \int_0^\infty G_1(x/y) G_2(y)/y dy; \tag{A.0.8}$$

*) Фамилията е минимална по отношение на тези свойства.

Затвореността по отношение на инволюцията (A.0.8) се оказва доста атрактивна за математическите изразявания.

За концептуалното разбиране на смисъла на G-функцията винаги се започва с диференциалното уравнение, което тя удовлетворява, а това е обобщеното хипергеометрично уравнение.

Нека $D = x\frac{d}{dx}$. Действието на D на степените на x става по следния начин:

$$D[x^s] = sx^s. \tag{A.0.9}$$

Линейното хомогенно диференциално уравниние от n-ред

$$a_n(x)\frac{d^n(u)}{dx^n}(x) + a_{n-1}(x)\frac{d^{n-1}(u)}{dx^{n-1}}(x) + \cdots + a_0(x)u(x) = 0$$

след умножаване с x^n може да бъде записано във вида

$$b_n(x)D^n u(x) + \cdots + b_0(x)u(x) = 0. \tag{A.0.10}$$

Предполагаме, че коефициентите са аналитични функции в околност на $x = 0$ и разглеждаме стандартния за степенни редове метод: определяне на решението във вид на формален степенен ред $\sum_0^\infty u_n x^n$, замествайки в (A.0.10) и после сравняваме коефициентите пред равните степени на x.

Възниква въпроса кога линейните уравнения за коефициентите u_n притежават двучленна рекурсия от вида $c_n u_n = d_n u_{n-1}$?

Не е трудно да се покаже, че необходимо подходящо условие за коефициентите b_n е например всеки от тях да е във вида $(\alpha_n x + \beta_n)x^k$ за фиксирано k. Тогава (A.0.10) приема вида

$$Q(D)u(x) - \alpha x P(D)u(x) = 0,$$

където Q и P са единични полиноми. От гледна точка на (A.0.9) рекурсията на коефициентите на формалния ред на решението е

$$Q(n)u_n = \alpha P(n-1)u_{n-1}. \tag{A.0.11}$$

Случаят $\alpha = 0$ е тривиален, тогава b_j са различни и всяко решение е линейна комбинация на x^{1-b_j}. За случая $\alpha \neq 0$ без да ограничаваме общността можем да считаме, че $\alpha = 1$. Накрая, решението е тривиално, освен ако $Q(0) = 0$. Оттук получаваме, че с изключение на тривиалните случаи и при горната нормализация, отговорът на зададения по-горе въпрос е, че уравнението (A.0.10) е обобщеното хипергеометрично уравниние, първи вариант:

$$\left[D\prod_{j=1}^{q-1}(D+b_j-1) - x\prod_{j=1}^{p}(D+a_j) \right] u(x) = 0, \tag{A.0.12}$$

За уравнението (A.0.12) рекурсията (A.0.11) е

$$n\prod_{j=1}^{q-1}(n+b_j-1)u_n = \prod_{j=1}^{p}(n+a_j-1)u_{n-1}. \tag{A.0.13}$$

(Тук предполагаме, че величината $b_j - 1$ е цяла отрицателна). Решението във вид на формален степенен ред с константен член 1 е

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a_1)_n(a_2)_n\dots(a_p)_n}{(b_1)_n(b_2)_n\dots(b_{q-1})_n}\frac{x^n}{n!}, \tag{A.0.14}$$

където обобщеният факториел $(a)_n$ е дефиниран чрез

$$(a)_0 = 1,$$

$$(a)_n = a(a)(a+1)\dots(a+n-1) = \frac{\Gamma(n+a)}{\Gamma(a)},\ n \geq 1.$$

Редът (A.0.14) е разходящ за $x \neq 0$ при $p > q$, има радиус на сходимост 1 при $p = q$ и е сходящ за всяко x, при $p < q$.

За $p \leq q$ дефинираме чрез така написаните степенни редове обобщената хипергеометрична функция, която обичайно се означава чрез

$${}_pF_{q-1}\left(\begin{matrix} a_1,\dots,a_p \\ b_1,\dots,b_{q-1} \end{matrix} \middle| x \right)$$

Тъй като уравнението е от ред q, то трябва да има още $q-1$ линейно независими решения.

Да разгледаме още едно обобщение на (A.0.12), множителят D е заменен с $D + b_q - 1$:

$$\left[\prod_{j=1}^{q}(D + b_j - 1) - x\prod_{j=1}^{p}(D + a_j)\right] u(x) = 0. \tag{A.0.15}$$

Можем да отбележим някои интересни свойства на (A.0.15). Първо, D е инвариантнен относно $x \to -x$ ето какво се получава при тази смяна

$$\left[\prod_{j=1}^{q}(D + b_j - 1) + x\prod_{j=1}^{p}(D + a_j)\right] u(x) = 0. \tag{A.0.16}$$

Второ, при смяната на променливите $y = \frac{1}{x}$, D преминава в $-D$. Тогава уравнението се преобразува в друга форма на (A.0.16), зависеща от знака на $(-1)^{q-p}$, но q параметъра b_j се преобразуват в p параметъра $1 - a_j$, а p параметъра a_j се преобразуват в q параметъра $1 - b_j$. Това ни кара да предполагаме винаги, че $p \leq q$, без ограничение на общността. Тъй като D диагонализира степените на x, докато умножаването със x опростява ръста на степените, ние можем да търсим решение във вида на крайна сума от следните изрази

$$u(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_L \Phi(s)x^s ds, \tag{A.0.17}$$

където L е подходящ път (затворен контур) от комплексната равнина (или Римановата сфера). Отбелязваме, че интегралното представяне има някои предимства пред редовете, особено при големи стойности на x или на параметрите.

Заместваики (A.0.17) в (A.0.15) получаваме

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{1}{2\pi i}\int_L \Phi(s) \\ &\times \left[\prod_{j=1}^{q}(b_j-1+s)x^s - x\prod_{j=1}^{p}(a_j+s)x^{s+1}\right]ds \\ &= \frac{1}{2\pi i}\int_L \Phi(s)\prod_{j=1}^{q}(b_j-1+s)x^s ds \\ &- \frac{1}{2\pi i}\int_{L+1} \Phi(s-1)\prod_{j=1}^{p}(a_j-1+s)x^s ds \end{aligned}$$

Ако контурът L притежава свойството, че $L+1$ може да се деформира до L без да преминава през особености на подинтегралната функция, то се получава продължение на рекурсията (A.0.13):

$$\Phi(s)\prod_{j=1}^{q}(b_j-1+s) = \Phi(s-1)\prod_{j=1}^{p}(a_j-1+s) \qquad \text{(A.0.18)}$$

Ще наричаме последното равенство условие за транслация.

За всеки случай на уравнение (A.0.15), функцията Φ е такава, че удовлетворява рекурсивното уравнение (A.0.18) и може да се разглежда като произведение от гама-функции от вида $\Gamma(-c_j+s)$ или $\Gamma(d_j-s)$. Следователно полюсите на Φ, ако има такива, се съдържат в редица от точки:

$$(\mathbf{a}),\ c_j,\ c_j-1,\ c_j-2,\ \ldots\ (\mathbf{b}),\ d_j,\ d_j-1,\ d_j-2,\ \ldots$$

Условието за транслация изисква всяка една от тези редици да бъде от едната страна на контура L. Контурът L винаги се избира така, че да разделя редицата от полюсите (**a**) - отляво, а редицата от (**b**)-отдясно. (Забележка: Не е нужно да се използва условието за транслация, за да заключим, че тези решения на (A.0.18) дават ръста на решенията на обобщеното хипергеометрично уравнение; условието, че L разделя редицата от полюсите е по този начин е достатъчно.)

Разглеждаме три типа контури L:

$L = L_I$: започва в $-i\infty$ и завършва в $+i\infty$;

$L = L_\infty$: започва и завършва в $+\infty$, по посока на часовниковата стрелка;

$L = L_{-\infty}$: започва и завършва в $-\infty$, по посока обратна на часовниковата стрелка.

За това, кой точно от така описаните контури трябва да изберем в нашия случай, трябва да дадем някаква информация, касаеща асимптотиката.

Първо, формулата на Стърлинг,

$$\Gamma(z) = \sqrt{\frac{2\pi}{z}} \left(\frac{z}{e}\right)^z \left[1 + O\left(\frac{1}{z}\right)\right], z \to \infty \tag{A.0.19}$$

е валидна за дясната полуравнина $Rez \geq 0$. Това предполага, че Γ расте по-бързо от експонентата от дясната страна на хоризонталната линия и се разпада експоненциално по двете направления по всяка вертикална линия на дясната полуравнина.

Второ, формулата на Ойлер за отражението

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin(\pi z)}, \tag{A.0.20}$$

комбинирана с (A.0.19), дава асимптотичното поведение в лявата полуравнина $Rez \leq 0$. Γ се разпада с ръст на експонента в двете направления на вертикалните лини в тази полуравнина. Тези факти ни водят към това, че за фиксирани a и b

$$\frac{\Gamma(a+s)}{\Gamma(b+s)} \sim s^{a-b}, s \to \infty \tag{A.0.21}$$

по дължината на лъч, който избягва нулите и полюсите на коефициента.

Тук ние разглеждаме обобщеното хипергеометрично уравнение (A.0.15), но за разлика от стандартната индексация индексите b_j и a_j са заменени с отраженията $1 - b_j$ и $1 - a_j$:

$$\left[\prod_{j=1}^{q}(D - b_j) - x\prod_{j=1}^{p}(D + 1 - a_j)\right] u(x) = 0. \tag{A.0.22}$$

Отново предполагаме, че $p \leq q$. Решенията се изразяват с G-функцията на Майер $G_{p,q}^{0,p}$.

$$G_{p,q}^{0,p}\left(\begin{array}{c} a_1, \ldots, a_p \\ b_1, \ldots, b_q \end{array} \middle| x \right) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\prod_{j=1}^{p} \Gamma(1 - a_j + s)}{\prod_{j=1}^{q} \Gamma(1 - b_j + s)} x^s ds. \quad \text{(A.0.23)}$$

Майер въвежда фамилия от решения на (A.0.22), означени с

$$G_{p,q}^{m,n}\left(\begin{array}{c} a_1^{'}, \ldots, a_p^{'} \\ b_1^{'}, \ldots, b_q^{'} \end{array} \middle| (-1)^{m+n+p} x \right),$$
$$0 \leq m \leq q,\ 0 \leq n \leq p$$

където $a_j^{'}$ и $b_j^{'}$ са пермутации на индексите a_j и b_j съответно. Горният индекс m означава, че първите m множители на знаменателя ще се сменят със коефициент $\Gamma(b_j - s)$ в числителя и последните $p - n$ множителя се сменят с множител $\Gamma(a_j - s)$ от знаменателя. Резултатът е общо $m+n$ множителя в числителя. Отчитайки инвариантността на подинтегралната функция относно пермутации на индексите a_j и b_j (поотделно) в числителя и знаменателя, намираме 2^{p+q} решения на (A.0.22). Тези решения не винаги са различни. При $p < q$, точно 2^p решения при $m = 0$ са нули тъждествено. Изборът на контура зависи първо от p и от q. Ако $p < q$ (респективно $p > q$), Φ се разпада по-бързо с експоненциален ръст отдясно (респективно отляво) по хоризонтални линии. Тогава избираме контура $L = L_\infty$ при $p < q$; за $p > q$ за контур избираме $L = L_{-\infty}$; в останалите случаи за контур избираме кривата от $-\infty$ до $+\infty$, която разделя редицата от полюсите. Има повече гама-фактори в числителя спрямо знаменателя, т. е. $m + n > (p + q)/2$. Тогава Φ се разпада с ръст на експонента по вертикалните линии и контурът се деформира в L_I от $-\infty$ до $+\infty$. Ако $m + n = (p + q)/2$, то Φ има алгебрично поведение в ∞ както (A.0.21) и отново контурът се деформира, но това може да се интерпретира като интегрално разпределение. Когато $p = q$, ядрото Φ има алгебрично поведение

при $s \to \infty$ както в случая $p = q = 1$. Тогава изборът на контур се различава от това дали $0 < |x| < 1$ или $|x| > 1$. Явното предимство на този метод е, че получаваме решения с известно поведение при $x \to 0$ или $x \to \infty$, Предполагайки отново $p \leq q$, стандартните решения получаваме във вида ${x^{b_j}}_p F_{q-1}$. Те са $x^{b_j}\left[1 + O(x)\right]$ и когато $x \to 0$ са произведения на G-функции с $m = 1$. Решенията $x^{a_j - 1}\left[1 + O(x^{-1})\right]$ когато $x \to \infty$ са произведения на G- функции с $n = 1$ и $m + 1 > (p + q)/2$.

Резултати, включени в дисертацията, са докладвани на:

1. Семинар Динамични системи и Теория на числата - 2014 г.

2. Семинар на Лабораторията по Солитони, Кохерентност и Геометрия - 2015 г.

Част от резултатите са представени на следните конференции:

1. 39-та Конференция "Приложения на математиката в техниката и икономиката"(AMIEE'13), Созопол, България, 2013;

2. The 10-th AIMS Conference of Dynamical Systems, Differential Equations and Applications, Madrid, Spain, 2014;

3. Втора научна конференция с международно участие "Комуникации, Електроенергетика и Информатика в Транспорта - КЕИТ-2014, с. Баня, общ. Разлог, България;

4. International Conference of Algebric Methods In Dynamical Systems, AMDS 2014, Barraquilla, Colombia.

Списък на публикациите по дисертацията

1. *Non- integrability of a system describing the stationary solutions in Bose- Fermi mixtures*, *AIP Conf. Proc.*, **1570, 313**, 2013, (съвместно с Огнян Христов).

2. *On the integrability of a system describing the stationary solutions in Bose- Fermi mixtures*, *Chaos, Solitons and Fractals*, **77**, 2015/8, p. 138-148 (съвместно с Огнян Христов).

3. *Computation of non-integrability of a system describing the stationary solutions in Bose-Fermi mixtures* ($C_o \neq 0, C_j = 0$), *Mech. Trans. Comm.*, **3**, 2014.

4. *Non-integrability of some higher-order Painlevé equation in Liouville sense*, *Symmetry, Integrability and Geometry: Methods and Applications (SIGMA)*, 2015(11), (съвместно с Огнян Христов).

Литература

[1] В. Голубев. *Лекции по Аналитической Теории Дифференциальных Уравнений.* Государственное издательство технико-теоретической литературы, Москва, Ленинград, 1950.

[2] В. Арнолд. *Математически методи на класическата механика.* Наука и изкуство, София, 1985.

[3] Цв. Стоянова. *Върху неинтегруемостта на шестото уравнение на Пенлеве в Лиувилов смисъл.* Дисертация, за присъждане на оразувателна и научна степен доктор, 2009.

[4] V. Arnold and A. Krylov. Uniform distribution of points on s sphere and some ergodic properties of solutions of linear ordinary diffrential equations in a complex region. *Dokl. Akad. Nauk*, 148:9–12, 1963.

[5] V. I. Arnold. Instability of dynamical systems with several degree of freedom. *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, 156:581–585, 1964.

[6] M. Arribas and A. Elipe. Non-integrability of the motion of a particle around a massive straight segment. *Physics Letters A*, 281:142–148, 2001.

[7] M. Audin. La réduction symplectique appliquée á la non-intégrabilité du probléme du satellite. *Ann. Fac. Sci. Toulouse Math.*, 12:25–46, 2003.

[8] R. Beals and J. Szmigielski. Meijer G-Functions: A Gentle Introduction. *Notices of the AMS*, 60,7:866–872, 2013.

[9] J. Belmonte-Beitia, V.M. Perez-Garcia, and V. Vekslerchik. Modulational instability, solitons and periodic waves in models of quantum degenerate boson-fermion mixtures. *Chaos Solitons Fractals*, 32:1268–1277, 2007.

[10] D. Bertrand. Unipotent radicals of differential Galois groups. *Mathematische Annalen*, 321:645–666, 2001.

[11] F. Beukers, D. Brownawell, and G. Heckmann. Siegel normality. *Ann. of Math.*, 127:279–308, 1988.

[12] Yu.V. Bludov, J. Santhanam, V.M. Kenkre, and V.V. Konotop. Matter waves of Bose–Fermi mixtures in one-dimensional optical lattices. *Phys. Rev.A*, 74, 2006.

[13] A. Bolibruch. Fuchsian systems with reducible monodromy and the Riemann-Hilbert problem. *V, Lecture Notes in Math.*, 1520:139–155, 1992.

[14] D. Boucher. Sur la non-intégrabilité du probléme plan des trois corps de masses égales á un le long de la solution de Lagrange. *C.R. Acad. Sci. Paris*, 331, S. I:391–394, 2000.

[15] P. Braynova and O. Christov. Non-integrability of a Hamiltonian system, based on a problem of nonlinear vibration of an elastic string. *Ann. Univ. Sofia, Fac. Math. Inf*, 99:91–107, 2008.

[16] S. Cantat and F. Loray. Holomorphic dynamics, Painlevé VI equation and character varietis. *Universite de Rennes*, 59,7:p. 2927–2978, 2009.

[17] G. Casel. The Galois groupod of Picard - Painlevé VI equation, In: Algebraic, analytic and geometric aspects of complex differential equations and their deformations. Painlevé

hierarchies. *RIMS Kokyuroki Bessatsu, B2, Res. Inst. Math. Sci. (RIMS)*, pages 15–20, 2007.

[18] G. Casel. Le groupoide de Galois de $\mathbb{P}^1$ et son irréductibilité. *Comment. Math. Helv.*, 83:471–519, 2008.

[19] J. Chazy. Sur les équations différentielles du troisiéme orde et d'ordre supérieur, dont l'intégrale ses points critiques fixes (Thése). *Acta Math.*, 34:317–385, 1911.

[20] R. Churchill and D. Rod. On the determination of Ziglin monodromy Groups. *SIAM J. Math. Anal.*, 22:1790–1802, 1991.

[21] L. Coelho, J. Skea, and T. Stuchi. On the integrabilitu of Friedmann - Robertson - Walker models with conformally coupled massive scalar fields. *J. Phys. A*, 41:1–15, 2008.

[22] C. Cosgrove. Highrer-Order Painlevé Equations in Polynomial class I. Bureu Symbol P2. *Stud. in Appl. Math.*, 104:1–65, 2000.

[23] J. Cruz-Morales and M. van der Put. Stokes matrices for the quantum differential equations of some Fano varieties. *arXiv:*, 1211.5266v2[math.CA], 2014.

[24] B. Dubrovin and M. Mazzocco. Monodromy of certain Painlevé VI transcendents and Refflection Groups. *Invent. Math.*, 141:55–147, 2000.

[25] A. Duval and M. Loday-Richaud. Kovacic Algorithm and Its Application to Some Families of Special Functions. *Applicable Algebra in Engineering, Communication and Computing 3*, 1992.

[26] A. Duval and Cl. Mitschi. Matrices de Stokes et Groupe de Galois des Equations Hypergeometriques Confluentes Generalisees. *Pacific J. Math.*, 138,1:25–56, 1989.

[27] R. Fuchs. Sur quelques équations différentielles linéaires du second ordre. *C.R. Acad. Sc. Paris*, 141:555–558, 1905.

[28] B. Gambier. Sur les équations différentielles du second orde du premier degré dont l'intégrale générale est á points critiques fixes . *Acta. Math. Ann.*, 33:1–55, 1909.

[29] R. Garnier. Sur les équations différentielles du troisiéme ordre dont l'integarle générale est uniforme et sur une classe d'équations nouvelles d'ordre superieur dont l'integrale générale á ses points critiques fixés. *Ann. Ecole Norm. Sup.*, 29:1–126, 1912.

[30] A. Goriely and M. Tabor. The singularity analysis for nearly integrable systems: homoclinic intersections and lokal multivaluedness. *Phisica D*, 85:93–125, 1995.

[31] V. Gromak. On the nonlinear differential equations of fourth order with Painlevé property. *Differential Equations*, 42,8:1017–1026, 2006.

[32] V.I. Gromak. Single-parameter families of solutions of Painlevé equations. *Diff. Eqns.*, 14:1510–1513, 1978.

[33] J. Guckenheimer and P. Holmes. *Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems, and Bifurcations of Vector Fields.* Springer, New York, 1983.

[34] M. Guest. From Quantum Cohomology to Integrable Systems. *Oxford Graduate Texts in Mathematics*, 15, 2008.

[35] A. Hone. Non-autonomous Hénon–Heiles systems. *Physica D*, 118:1–16, 1998.

[36] E. Horozov. On the non-integrability of the Gross - Neweu models. *Annals of Physics*, 174:430–441, 1987.

[37] E. Horozov and Ts. Stoyanova. Non-integrability of some Painleve VI-equations and dilogarithms. *Regular and Chaotic Dynamics*, 12:620–627, 2007.

[38] M. Irigoyen and C. Simó. Non-integrability of the J_2 Problem. *Cel. Mech. and Dynam. Astr.*, 55, 1993.

[39] H. Ito. Non-intefrability of the Hénon - Heilse system and a theorem of Ziglin. *Koday Math. J.*, 8:129–138, 1985.

[40] Morales-Ruiz J. and Simó C. Non-integrability Criteria for Hamiltonians in the case of Lamé Normal Variational Equations. *J Diff Eq*, 129:111–135, 1996.

[41] N. Joshi and M.D. Kruskal. A simple proof that solutions of the six Painlevé equations have no movable singularities exept poles. *CMA-R06-90, Centre for Mathematical Analysis*, 1990.

[42] I. Kaplansky. *An introduction to Differential Algebra.* Hermann, Paris, 1957.

[43] T. Karpiuk, M. Brewczyk, S. Ospelkaus-Schwarzer, K. Bongs, M. Gajda, and K. Rzazewski. Soliton trains in Bose-Fermi mixtures. *Phys. Rev. Lett.*, 93, 2004.

[44] N. Katz. On the calculation of some differential galois groups. *Invent. Math.*, 87:13–61, 1987.

[45] N. Kostov, V. Gerdjikov, and T. Valchev. Exact Solutions for Equations of Bose–Fermi Mixtures in One-Dimensional Optical Lattice. *SIGMA*, 3, 2007.

[46] J.J. Kovacic. An Algorithm for Solving Second Order Linear Homogeneous Diffrential Equations. *J. Symb. Comput.*, 2:3–43, 1986.

[47] S. Kowalevski. Sur le probleme de la rotation d'un corps solide autour d'un poin fixe. *Acta Math.*, 12:177–232, 1889.

[48] N. Kudryashov. Nonlinear fourth-order differntial equations with solutions in the form of transcendents. *Theor. and Math. Phys.*, 122, 1:58–71, 2000.

[49] Y. Luke. *The Special functions and their approximations*, volume I. Academic Press, Inc., 1969.

[50] A. Lyapounov. On a certain property of the differential equations of the problem of motion of a heavy rigid body having a fixed point. *Soobshch. Kharkov Math. Obshch. Ser. 2*, 4,1894:123–140, 1954.

[51] A. Maciejewski. *Non-integrability of certain Hamiltonian systems. Applications of Morales - Ramis differential Galois extension of Ziglin theory. Differential Galois Theory*, volume 58. Banach Center Publication, Warsaw, 2002.

[52] A. Maciejewski and M. Przybylska. All meromorphically integrable $2D$ Hamiltonian systems with homogeneous potential of degree 3. *Physics Letters A*, 327:461–473, 2004.

[53] A. Maciejewski and M. Przybylska. Non-integrability of the Suslov problem. *J. Math. Phys.*, 45:1065–1078, 2004.

[54] A. Maciejewski and M. Przybylska. Differential Galois Approach to the Non-integrability of the Heavy Top Problem. *Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse*, 2005.

[55] A. Maciejewski, M. Przybylska, and J. A. Wei. Non-integrability of the generalized spring-pendulum problem. *J. Phys. A : Math. Gen.*, 37:2579–2597, 2004.

[56] A. Maciejewski, J. Strelcyn, and M. Szydlowski. Non-integrability of Bianchi VIII Hamiltonian System. *J. Phys. A : Math. Gen.*, 37:2579–2597, 2004.

[57] B. Malgrange. Le groupoide de Galois d'un feuilletage, In: Essays on geometry and related topics. *Enseign. Math., Enseignement Math.*, 1,2, 48:465–501, 2001.

[58] J . Martinet and J-P. Ramis. Thérie de Galois différentielle et resummation. *Computer Algebra and Differential Equations*, pages 117–214, 1989.

[59] M. Mazzocco and Mo M. Yue. The Hamiltonian Structure of the Second Painlevé Hierarchy. *Nonlinearity*, 20,12:2845–2882, 2007.

[60] C. Meijer. *On the G–functions*, volume 8. Indag. Math., 1946.

[61] V. K. Melnikov. On the stability of the center for time periodic perturbations. *Tans. Mosc. Soc.*, 12:3–52, 1963.

[62] Cl. Mitschi. Differential Galois Groups and G-functions. *Computer Algebra and Differential Equations, M. Singer editor*, pages 149–180, 1991.

[63] Cl. Mitschi. Differntial Galois Groups of Confluent Generalized Hypergeometric Equations: An Approach Using Stokes Multipliers. *Pacific J. Math.*, 176,no.2:365–405, 1996.

[64] C. Morales-Ruiz, J. Simó and S. Simon. Algebraic proof of the non-integrability of Hill's Problem. *Ergodic Theory Dynam. Systems*, 25,no.4:1237–1256, 2005.

[65] J. Morales-Ruiz. *Differential Galois Theory and Non integrability of Hamiltonian Systems*, volume 179. Birkhäuser, 1999.

[66] J. Morales-Ruiz. A note on a connection between the Poincaré-Arnold-Melnikov integral and the Picard-Vessiot Theory. *Banach Center Publications*, 58:165–175, 2002.

[67] J. Morales-Ruiz and J. Ramis. Galoisian obstructions to integrability of Hamiltonian systems. *Methods and Applications of Analysis*, 8:33–96, 2001.

[68] J. Morales-Ruiz and J-P. Ramis. *Integrability of Dynamical systems through Differential Galois Theory: practical guide*, volume 509. Contemporary Math., 2010.

[69] J. Morales-Ruiz, J-P. Ramis, and C. Simó. Integrability of Hamiltonian Systems and Differential Galois Group of Higher Variational Equations. *Ann. Scient. Éc. Norm. Sup.*, 40,6:845–884, 2007.

[70] J. Morales-Ruiz and C. Simo. Picard - Vessiot Theory and Ziglin's Theorem. *J. Diff. Eq.*, 107:140–162, 1994.

[71] K. Nishioka. A note on the transcedency of Painlevé first transcendent. *Nagoya Math. J.*, 109:p. 63–67, 1988.

[72] K. Okamoto. Studies on Painlevé equations. III. Second and fourth Painlevé equations. *Math. Ann.*, 275,no. 2:221–255, 1986.

[73] P. Painlevé. Sur les lignes singuliéres des fonctions analytiques. *Ann. de la Fac. de Sc. de Toulouse*, 1888.

[74] P. Painlevé. Leçons sur la théorie analytique des équations différentielles. *Professés á Stockholm*, 1896.

[75] P. Painlevé. Sur les équations différentielles du second orde et d'ordre supérieur dont l'intégrale est uniforme. *Acta Math.*, 25:1–85, 1902.

[76] A. Perelomov. *Integrable Systems of Classical Mechanics and Lie Algebras*, volume I. Birkhäuser, Basel, 1990.

[77] H. Poincaré. *Les Méthodes Nouvelles de la Mécanique Céleste*, volume I. Gauthier- Villars, Paris, 1892.

[78] H. Poincaré. *Les methodes novelles de ls mechanique celeste, Tome III.* Gauthier- Villars, Paris, 1899.

[79] J.-P. Ramis. Filtration Gevrey sur le groupe de Picard Vessiot d'une equation differentielle irreguliere. *Informes de Mathematica Serie A-045/85*, 1985.

[80] A. Sakka. Bäcklund Transformations for First and Second Painlevé Hierarchies. *SIGMA*, 5, 024:11–11, 2009.

[81] A. Sakka. On special solutions of Second and Fourth Painlevé Hierarchies. *Phys. Lett. A*, 373, no. 6:611–615, 2009.

[82] M. Salerno. Matter-wave quantum dots and antidots in ultracold atomic Bose–Fermi mixtures. *Phys. Rev. A*, 72, 2005.

[83] L. Schlesinger. *Handbuch der Theorie der linearen Differentialgleichungen*. Teubner, Leipzig, 1897.

[84] M. Singer. *Introduction to the Galois Theory of Linear Differential Equations*. Cambridge University Press, 2009.

[85] M. Singer and M. van der Put. *Galois Theory of Linear Differential Equations*, volume 328. Springer, 2003.

[86] Ts. Stoyanova. Non-integrability of Painlevé VI in the Liouville sense. *Nonlinearity*, 22:2201–2230, 2009.

[87] Ts. Stoyanova. Non-integrability of Painlevé V in the Liouville sense and Stokes Phenomenon. *Advances in Pure Mathematics*, 1:170–183, 2011.

[88] Ts. Stoyanova and O. Christov. Non-Integrability of the Second Painlevé Equation as a Hamiltonian System. *Compte Rendu de l'academie bulgare des sciences*, 60,1:13–18, 2007.

[89] A. Tsygvintsev. La non-integrabilité méromorphe du probléme plan des trois corps. *C.R. Acad. Sci. Paris Série I*, 331:241–244, 2000.

[90] H. Turrittin. Convergent solutions of ordinary differential equations in the neighbourhood of an irregular singular point. *Acta Math.*, 93:22–66, 1955.

[91] H. Umemura. Irreducebility of the First Differential Equation of Painlevé. *Nagoya Math. J.*, 117:p. 231–252, 1990.

[92] H. Umemura. Second proof of the irreducebility of the First Differential Equation of Painlevé. *Nagoya Math. J.*, 117:p. 125–171, 1990.

[93] H. Watanabe. Birational Canonical Transformations and Classical Solutions of the Sixth Painlevé Equation. *Ann. Scuola Norm. Sup. Cl. Sci.*, 27, no. 3-4:379–425, 1998.

[94] S. Wojciechowski. Integrability of one particle in a perturbed central quartic potential. *Physica Scripta*, 31:433–438, 1985.

[95] H. Yoshida. Existence of exponentially unstable periodic solutions and the non-integrability of homogeneous hamiltonian systems. *Physika D*, 21:163–170, 1986.

[96] H. Yoshida. A criterion for the non-existence of an additional integral in hamiltonian systems with a homogeneous potential. *Physika D*, 29:128–142, 1987.

[97] S. Ziglin. Branching of solutions and non-existence of first integrals in Hamiltonian mechanics *I*. *Functional Anal. Appl.*, 16:181–189, 1982.

[98] S. Ziglin. Self-intersection of the complex separatrices and the non-existence of integrals in the Hamiltonian systems with one-and-half degrees of freedom. *J. Appl. Math. Mech.*, 45:411–413, 1982.

[99] S. Ziglin. Splitting of separateces, branching of solutions and nonexistence of an integral in the dynamics of a solid body. *Tans. Moscow Math. Soc.*, 1:283–298, 1982.

[100] S. Ziglin. Branching of solutions and non-existence of first integrals in Hamiltonian mechanics *II*. *Functional Anal. Appl.*, 17:6–17, 1983.

[101] H. Zoladek. *The Monodromy Group*. Birkhäuser, Basel, 2006.

[102] H. Zoladek and G. Filipuk. Penlevé equations, elliptic integrals and elementary functions. *Jurnal of Differential Equations*, 258,4:1303–1355, 2015.