СОФИЙСКИ УНИВЕРСИТЕТ „СВ. КЛИМЕНТ ОХРИДСКИ“

Писмен конкурсен изпит по Математика I

24 март 2019 г.

Тема №2.

ОТГОВОРИ И ПРИМЕРНИ РЕШЕНИЯ НА ЗАДАЧИТЕ

- **Максималният брой точки** от трите части на изпита е **100**
- Правилно отбелязаният отговор на всяка задача от 1. до 20. се оценява както следва:

задачи от 1. до 10. – 2 точки **задачи от 11. до 20. – 3 точки**

1.	А	~~Б~~	В	Г	11.	А	Б	В	~~Г~~
2.	~~А~~	Б	В	Г	12.	А	~~Б~~	В	Г
3.	А	Б	В	~~Г~~	13.	А	Б	~~В~~	Г
4.	А	Б	~~В~~	Г	14.	А	Б	В	~~Г~~
5.	А	Б	~~В~~	Г	15.	~~А~~	Б	В	Г
6.	~~А~~	Б	В	Г	16.	А	~~Б~~	В	Г
7.	А	~~Б~~	В	Г	17.	~~А~~	Б	В	Г
8.	~~А~~	Б	В	Г	18.	А	Б	В	~~Г~~
9.	А	Б	В	~~Г~~	19.	А	Б	~~В~~	Г
10.	А	~~Б~~	В	Г	20.	А	Б	~~В~~	Г

- Правилно попълненият отговор на **всяка задача от 21. до 25.** се оценява с **4 точки**

21.	$A = \dfrac{4}{3}$
22.	$x = 6$
23.	$n = 5$
24.	21
25.	$\sin \sphericalangle BAC = \dfrac{4}{5}$

• **Пълното решение на всяка задача от 26. до 28. се оценява с 10 точки.**

Задача 26. Да се реши системата: $\left|\begin{array}{l} x^3 - 8y^3 = 37 \\ x - 2y = 1 \end{array}\right.$.

Решение: От второто уравнение на системата имаме $x = 2y + 1$. Заместваме в първото уравенение и последователно получаваме: $(2y+1)^3 - 8y^3 = 37$, $8y^3 + 12y^2 + 6y + 1 - 8y^3 = 37$, $12y^2 + 6y - 36 = 0$, $2y^2 + y - 6 = 0$. Последното квадратно уравнение има корени

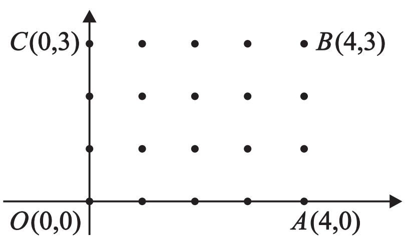
$$y_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4\,.\,2\,.\,(-6)}}{2\,.\,2} = \frac{-1 \pm 7}{4},$$

т.е. $y_1 = \dfrac{3}{2}$ и $y_2 = -2$. Тогава $x_1 = 2y_1 + 1 = 4$ и $x_2 = 2y_2 + 1 = -3$.

Решенията на системата са: $(x_1; y_1) = (4; \dfrac{3}{2})$ и $(x_2; y_2) = (-3; -2)$.

....

Задача 27. В равнината е даден правоъгълник $OABC$, с координати на върховете $O(0,0)$, $A(4,0)$, $B(4,3)$ и $C(0,3)$. Да се намери броят на отсечките, чиито краища са точки от правоъгълника и координатите им са цели числа. Да се намери вероятността, произволно избрана такава отсечка да има дължина по-малка от $\sqrt{3}$.



Решение: Броят на точките от правоъгълника $OABC$ с целочислени координати е равен на $5\,.\,4 = 20$. Тогава броят всички отсечки, чиито краища са точки от правоъгълника и координатите им са цели числа, е равен на броя на комбинациите с които можем да изберем краищата на тези отсечки: $C_{20}^2 = \dfrac{20\,.\,19}{1\,.\,2} = 190$.

Всяка от отсечките, която е страна или диагонал в квадрат с координати на върховете:

$$(i,j),\ (i+1,j),\ (i+1,j+1),\ (i,j+1), \quad i = 1,2,3,4,\ j = 1,2,3,$$

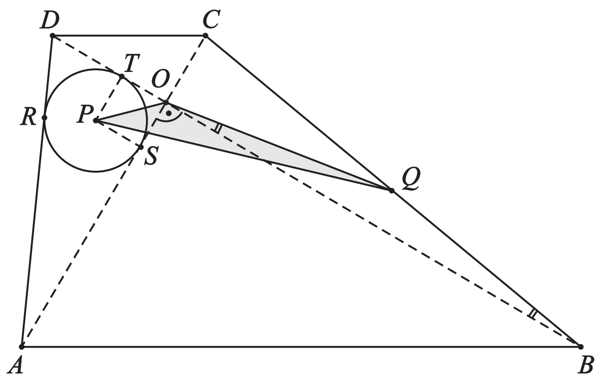
има дължина 1 или $\sqrt{2}$ и изпълнява условието да е с дължина по-малка от $< \sqrt{3}$. Всяка друга от разглежданите отсечки има дължина поне 2, като $2 > \sqrt{3}$.

Броят на отсечките с дължина 1 е равен на $4\,.\,4 + 5\,.\,3 = 31$. Броят на отсечките с дължина $\sqrt{2}$ е равен на удвоения брой квадрати от посочените по-горе, т.е. $2\,.\,4\,.\,3 = 24$.

Тогава за търсената вероятност, произволно избрана (от разглежданите) отсечка да има дължина по-малка от $\sqrt{3}$, получаваме $P = \dfrac{31 + 24}{C_{20}^2} = \dfrac{55}{190} = \dfrac{11}{38}$.

Задача 28. Трапец $ABCD$ има основи AB и CD. Диагоналите на трапеца са перпендикулярни и се пресичат в точка O. В $\triangle ADO$ е вписана окръжност с център P и радиус $r = 2$, а около $\triangle BCO$ е описана окръжност с център Q. Да се намери дължината на отсечката PQ, ако $BC = 10$ и $CO = 6$.

Решение: Триъгълниците AOD и BOC са правоъгълни с прав ъгъл при върха O, тъй като $AC \perp BD$. Нека окръжността с център P, вписана в $\triangle AOD$, се допира до страните AD, AO и DO, съответно в точките R, S и T. Тогава четириъгълникът $OTPS$ е квадрат със страна равна на радиуса на вписаната окръжност. Следователно $OP = r\sqrt{2} = 2\sqrt{2}$. Центърът Q на описаната около $\triangle BOC$ окръжност е среда на хипотенузата му и $OQ = \dfrac{1}{2}BC = 5$.



Да означим $\sphericalangle OBQ = \varphi$. От $OQ = BQ$ следва, че $\sphericalangle BOQ = \varphi$. Тогава $\sphericalangle POQ = 135^\circ + \varphi$. От косинусовата теорема за $\triangle POQ$ имаме

$$\begin{aligned}PQ^2 &= OP^2 + OQ^2 - 2\,OP\,.\,OQ\,\cos\sphericalangle POQ = (2\sqrt{2})^2 + 5^2 - 2\,.\,2\sqrt{2}\,.\,5\,\cos(135^\circ + \varphi)\\ &= 33 - 20\sqrt{2}\,(\cos 135^\circ \cos\varphi - \sin 135^\circ \sin\varphi) = 33 - 20\sqrt{2}\,.\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\varphi - \frac{\sqrt{2}}{2}\sin\varphi\right)\\ &= 33 + 20\,.\,(\cos\varphi + \sin\varphi).\end{aligned}$$

От правоъгълния триъгълник OBC имаме:

$$\sin\varphi = \frac{OC}{BC} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}, \qquad \cos\varphi = \frac{OB}{BC} = \frac{\sqrt{10^2 - 6^2}}{10} = \frac{4}{5}.$$

Следователно, $PQ^2 = 33 + 20\left(\dfrac{4}{5} + \dfrac{3}{5}\right) = 33 + 28 = 61$. Тогава $PQ = \sqrt{61}$.