СОФИЙСКИ УНИВЕРСИТЕТ „СВ. КЛИМЕНТ ОХРИДСКИ“

Писмен конкурсен изпит по Математика

3 април 2022 г.

Тема №1.

ОТГОВОРИ И ПРИМЕРНИ РЕШЕНИЯ НА ЗАДАЧИТЕ

- Отбелязан е правилният отговор на всяка задача от 1. до 10.

1.	А	~~Б~~	В	Г
2.	А	Б	В	~~Г~~
3.	~~А~~	Б	В	Г
4.	А	Б	~~В~~	Г
5.	А	~~Б~~	В	Г
6.	А	Б	В	~~Г~~
7.	А	Б	~~В~~	Г
8.	~~А~~	Б	В	Г
9.	А	Б	В	~~Г~~
10.	А	~~Б~~	В	Г

- Отговори на задачи 11. и 12.

11.	$x = 7$
12.	$AC = 6$ или $AC = 12$

- Примерни решения на задачи от 13. до 16.

Задача 13. Да се реши уравнението

$$|\sqrt{x+1}-1|+|\sqrt{x+1}+1|=4.$$

Решение: Полагаме $y=\sqrt{x+1}\geq 0$ и даденото уравнение придобива вида

$$|y-1|+|y+1|=4. \tag{1}$$

<u>*Случай 1:*</u> $y\in(-\infty,-1)$. Уравнението (1) е еквивалентно на

$$(1-y)+(-1-y)=4, \qquad -2y=4, \qquad y=-2.$$

Тъй като $-2\in(-\infty,-1)$, $y=-2$ е решение на (1).

<u>*Случай 2:*</u> $y\in[-1,1]$. Уравнененението (1) е еквивалентно на

$$(1-y)+(y+1)=4, \qquad 0y=2$$

и в този случай няма решение.

<u>*Случай 3:*</u> $y\in(1,\infty)$. Уравнението (1) е еквивалентно на

$$(y-1)+(y+1)=4, \qquad 2y=4, \qquad y=2.$$

Понеже $2\in(1,\infty)$, решението на (1) в този случай е $y=2$.

Така получаваме, че

$$\sqrt{x+1}=-2 \qquad \text{или} \qquad \sqrt{x+1}=2.$$

Само второто уравнение има решение, което е $x=3$.

Задача 14. Геометрична прогресия a_1, a_2, a_3, a_4 има сбор, равен на 65. Да се намери прогресията, ако $a_1 - a_2 + a_3 - a_4 = -13$.

Решение: Нека частното на прогресията е q и $a_1 = a$. Тогава

$$\begin{aligned} a + aq + aq^2 + aq^3 &= 65, \\ a - aq + aq^2 - aq^3 &= -13. \end{aligned}$$

С почленно събиране и след това с почленно изваждане на тези две уравнения получаваме съответно

$$\begin{aligned} 2a + 2aq^2 &= 65 + (-13), \\ 2aq + 2aq^3 &= 65 - (-13), \end{aligned} \qquad \text{т.е.} \qquad \begin{aligned} 2a(1+q^2) &= 52, \\ 2a(1+q^2)\,q &= 78. \end{aligned}$$

Замествайки $2a(1+q^2)$ с 52 в последното уравнение намираме частното на прогресията:

$$52q = 78, \qquad q = \frac{3}{2}.$$

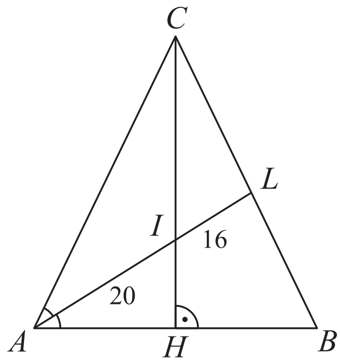
Сега намираме първия член на прогресията:

$$2a\left[1 + \left(\frac{3}{2}\right)^2\right] = 52, \qquad \frac{13a}{4} = 26, \qquad a = 8.$$

За членовете на геометричната прогресия получаваме

$$a_1 = 8, \qquad a_2 = 8 \cdot \frac{3}{2} = 12, \qquad a_3 = 12 \cdot \frac{3}{2} = 18, \qquad a_4 = 18 \cdot \frac{3}{2} = 27.$$

Задача 15. В равнобедрения $\triangle ABC$ $(AC = BC)$, I е центърът на вписаната окръжност и AL $(L \in BC)$ е ъглополовящата на $\sphericalangle BAC$. Да се намерят страните и лицето на $\triangle ABC$, ако $AI = 20$ и $IL = 16$.



Решение: Ще използваме стандартните означения $AC = BC = a$ и $AB = c$ за равнобедрения $\triangle ABC$. Височината CH $(H \in AB)$ към основата AB е и ъглополовяща на $\sphericalangle ACB$, като $AL \cap CH = I$.
От свойството на ъглополовящата в $\triangle ALC$ имаме

$$\frac{AC}{CL} = \frac{AI}{IL} = \frac{20}{16}.$$

Тогава

$$a = BC = AC = 20x, \qquad CL = 16x, \qquad BL = BC - CL = 20x - 16x = 4x.$$

Отново от свойството на ъглополовящата в $\triangle ABC$ имаме

$$\frac{AB}{AC} = \frac{BL}{CL}, \qquad \frac{c}{20x} = \frac{4x}{16x}, \qquad c = 5x.$$

Прилагаме формулата за ъглополовящата $AL^2 = AB\,.\,AC - BL\,.\,CL$ и последователно получаваме

$$(20+16)^2 = ac - BL\,.\,CL, \qquad 36^2 = 20x\,.\,5x - 4x\,.\,16x, \qquad 36^2 = 36x^2, \qquad x = 6.$$

За страните на триъгълника ABC получаваме

$$AC = BC = a = 20\,.\,6 = 120, \qquad AB = c = 5\,.\,6 = 30.$$

От теоремата на Питагор за правоъгълния $\triangle AHC$ имаме

$$CH^2 = AC^2 - AH^2 = 120^2 - 15^2 = 15^2(8^2-1) = 15^2\,.\,3^2\,.\,7, \qquad CH = 45\sqrt{7}.$$

Тогава

$$S_{\triangle ABC} = \frac{AB\,.\,CH}{2} = \frac{30\,.\,45\sqrt{7}}{2} = 675\sqrt{7}.$$

Задача 16. Четириъгълна пирамида $EABCD$ има за основа квадрат $ABCD$ с диагонал $AC = 4$. Околният ръб EA е перпендикулярен на равнината на основата и има дължина 5. Точката P е от ръба EA. Намерете най-голямата стойност на лицето на сечението на пирамидата с равнината, определена от точките P, B и C.

Решение: От $EA \perp BC$ и $AB \perp BC$ следва, че BC е перпендикулярна на равнината (ABE). Тогава $PB \perp BC$.

Нека точката $Q \in ED$ е такава, че $PQ \| BC$. Тогава сечението на пирамидата с равнината (PBC) е правоъгълният трапец $BCQP$.

Нека $AP = x \in [0, 5]$. В равнобедрения правоъгълен $\triangle ABC$ имаме $BC = \dfrac{AC}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}$. От $EP = 5 - x$ и подобието на $\triangle PQE$ и $\triangle ADE$ получаваме

$$PQ = \frac{5-x}{5}\, AD = \frac{5-x}{5} \cdot 2\sqrt{2}.$$

От питагорова теорема за $\triangle ABP$ намираме $BP = \sqrt{x^2+8}$. Тогава за лицето на правоъгълния трапец $BCQP$ имаме

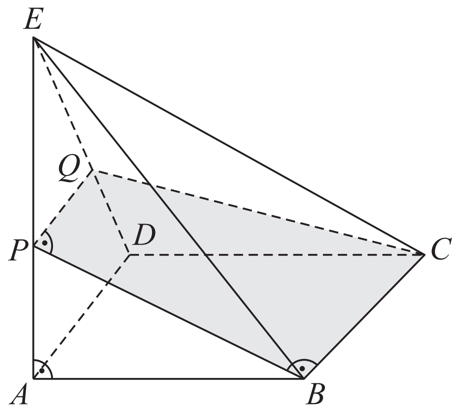
$$S_{BCQP} = S(x) = \frac{BC + PQ}{2}\, BP = \frac{2\sqrt{2} + \frac{5-x}{5} \,.\, 2\sqrt{2}}{2}\, \sqrt{x^2+8},$$

т.е.

$$S(x) = \frac{\sqrt{2}}{5}\,(10-x)\sqrt{x^2+8}.$$

Пресмятаме производната на $S(x)$ и преобразуваме

$$\begin{aligned} S'(x) &= \frac{\sqrt{2}}{5}\Big(-\sqrt{x^2+8} + \frac{10-x}{2\sqrt{x^2+8}}\,2x \Big) \\ &= \frac{\sqrt{2}}{5}\Big(\frac{10x - x^2}{\sqrt{x^2+8}} - \sqrt{x^2+8} \Big) \\ &= \frac{\sqrt{2}}{5\sqrt{x^2+8}}(-2x^2 + 10x - 8) \\ &= -\frac{2\sqrt{2}}{5\sqrt{x^2+8}}(x-1)(x-4). \end{aligned}$$



Това означава, че $S'(x) < 0$ за $x \in [0,1) \cup (4,5]$ и $S'(x) > 0$ за $x \in (1,4)$. Така функцията $S(x)$ намалява за $x \in [0,1)$, расте за $x \in (1,4)$ и намалява за $x \in (4,5]$. Тогава за най-голямата стойност на лицето $S(x)$ за $x \in [0,5]$ имаме

$$S_{max} = \max\{S(0)\,;\, S(4)\} = \max\Big\{8\,;\, \frac{24\sqrt{3}}{5}\Big\} = \frac{24\sqrt{3}}{5} = S(4).$$