СОФИЙСКИ УНИВЕРСИТЕТ „СВ. КЛИМЕНТ ОХРИДСКИ“

Писмен конкурсен изпит по Математика

3 април 2022 г.

Тема №1.

Отговорите на задачите от 1. до 10. включително отбелязвайте в листа за отговори!

Задача 1. Средноаритметичното на числата $a_1, a_2, \ldots, a_{2000}$ е равно на $\dfrac{31}{16}$, а средноаритметичното на числата $a_{2001}, a_{2002}, \ldots, a_{2022}$ е равно на 23. Средноаритметичното на всички 2022 числа $a_1, a_2, \ldots, a_{2022}$ е равно на:

А) 2 ***Б)*** $\dfrac{13}{6}$ ***В)*** $\dfrac{399}{2}$ ***Г)*** $\dfrac{133}{674}$

Задача 2. Изразът $A = \dfrac{2}{3-\sqrt{5}} + \dfrac{2}{\sqrt{5}-1} - \dfrac{1}{\sqrt{5}-2}$ е равен на:

А) 3 ***Б)*** 2 ***В)*** 1 ***Г)*** 0

Задача 3. Решенията на неравенството $\dfrac{3x^2-8x-1}{x^2-4x+4} < 2$ са:

А) $x \in (-3;2) \cup (2;3)$ ***Б)*** $x \in (-3;2) \cup (3;\infty)$ ***В)*** $x \in (-\infty;9)$ ***Г)*** $x \in (-\infty;2) \cup (2;3)$

Задача 4. Числото $x = 2$ е корен на уравнението $ax^2 + bx + 8 = 0$ и $a + b = 3$. Тогава за квадратния тричлен $y(x) = ax^2 + bx + 8$ имаме:

А) $y_{\text{минимум}} = y\left(\dfrac{7}{5}\right)$ ***Б)*** $y_{\text{максимум}} = y\left(\dfrac{2}{3}\right)$ ***В)*** $y_{\text{максимум}} = y\left(\dfrac{5}{7}\right)$ ***Г)*** $y_{\text{минимум}} = y\left(\dfrac{-1}{2}\right)$

Задача 5. Ако $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{2}{3}$, тогава изразът $B = \dfrac{3\sin 2\alpha}{2\cos^2\alpha - \sin^2\alpha}$ е равен на:

А) 2 ***Б)*** $\dfrac{18}{7}$ ***В)*** 3 ***Г)*** $\dfrac{10}{3}$

Задача 6. В трапеца $ABCD$ $(AB \| CD)$ е вписана окръжност и $AD = 16$, $BC = 17$, $CD = 8$. Радиусът на окръжността има дължина:

А) 5 ***Б)*** $\dfrac{11}{2}$ ***В)*** 6 ***Г)*** $\dfrac{120}{17}$

Задача 7. В успоредника $ABCD$, $\cos\sphericalangle BAD = \dfrac{12}{13}$ и диагоналите се пресичат в точка O. От точката O към страните AB и AD са спуснати перпендикуляри с дължини 2 и 3, съответно. Периметърът на успоредника е равен на:

А) 39 ***Б)*** 48 ***В)*** 52 ***Г)*** 56

Задача 8. В $\triangle ABC$, $\sphericalangle BAC = 45^\circ$ и CH е височината през върха C $(H \in AB)$. Точка D лежи върху височината CH, като $AD = 2\sqrt{3}$, $BD = 2$ и $\sphericalangle ADB = 90^\circ$. Радиусът на описаната окръжност около $\triangle ABC$ е равен на:

А) $\sqrt{5}$ ***Б)*** 3 ***В)*** $3\sqrt{2}$ ***Г)*** 5

Задача 9. В равнината е въведена правоъгълна координатна система. Дадена е точка $P(10, 22)$, а правите $g : 2x - y + 9 = 0$ и $h : x + 3y + 1 = 0$ се пресичат в точка M. Координатите на точка Q, деляща отсечката MP в отношение $MQ : QP = 3 : 4$, са:

А) $(3, 5)$ ***Б)*** $(4, 7)$ ***В)*** $(9, 6)$ ***Г)*** $(2, 10)$

Задача 10. В кутия има 7 сини и 5 червени топки. Вероятността три случайно извадени топки от кутията да бъдат с еднакъв цвят е равна на:

А) $\dfrac{1}{6}$ ***Б)*** $\dfrac{9}{44}$ ***В)*** $\dfrac{1}{4}$ ***Г)*** $\dfrac{7}{22}$

Отговорите на задачите от 11. до 12. включително запишете в листа за отговори!

Задача 11. Да се намерят решенията на уравнението

$$2 \cdot \lg(x-3) - \lg(x+1) + \lg 5 = 1.$$

Задача 12. В $\triangle ABC$ е дадено $BC = 6\sqrt{7}$ и $\sphericalangle BAC = 60^\circ$. Окръжност минава през върха A, допира се до правата BC в точката C и пресича страната AB в точка D, като $AD = 4$. Да се намери дължината на страната AC.

Пълните решения на задачи 13., 14., 15. и 16. запишете в свитъка за решения!

Задача 13. Да се реши уравнението

$$|\sqrt{x+1} - 1| + |\sqrt{x+1} + 1| = 4.$$

Задача 14. Геометрична прогресия a_1, a_2, a_3, a_4 има сбор, равен на 65. Да се намери прогресията, ако $a_1 - a_2 + a_3 - a_4 = -13$.

Задача 15. В равнобедрения $\triangle ABC$ $(AC = BC)$, I е центърът на вписаната окръжност и AL $(L \in BC)$ е ъглополовящата на $\sphericalangle BAC$. Да се намерят страните и лицето на $\triangle ABC$, ако $AI = 20$ и $IL = 16$.

Задача 16. Четириъгълна пирамида $EABCD$ има за основа квадрат $ABCD$ с диагонал $AC = 4$. Околният ръб EA е перпендикулярен на равнината на основата и има дължина 5. Точката P е от ръба EA. Намерете най-голямата стойност на лицето на сечението на пирамидата с равнината, определена от точките P, B и C.

Време за работа 4 часа.

Драги кандидат-студенти,

- *номерирайте всички страници на беловата си;*
- *означавайте ясно началото и края на решението на всяка от задачите от 13. до 16., включително;*
- *решението на всяка от задачите от 13. до 16., включително, трябва да започва на нова страница;*
- *не смесвайте белова и чернова;*
- *черновата не се проверява и не се оценява.*

Изпитната комисия ви пожелава успешна работа!