СОФИЙСКИ УНИВЕРСИТЕТ „СВ. КЛИМЕНТ ОХРИДСКИ“

Писмен конкурсен изпит по Математика

11 юни 2022 г.

Тема №1.

ОТГОВОРИ И ПРИМЕРНИ РЕШЕНИЯ НА ЗАДАЧИТЕ

- Отбелязан е правилният отговор на всяка задача от 1. до 10.

1.	А	~~Б~~	В	Г
2.	~~А~~	Б	В	Г
3.	А	Б	В	~~Г~~
4.	~~А~~	Б	В	Г
5.	А	Б	~~В~~	Г
6.	А	~~Б~~	В	Г
7.	А	Б	В	~~Г~~
8.	А	Б	~~В~~	Г
9.	А	~~Б~~	В	Г
10.	А	Б	В	~~Г~~

- Отговори на задачи 11. и 12.

11.	$(x_1, y_1) = (8, -5)$ и $(x_2, y_2) = (5, -8)$
12.	28

- Примерни решения на задачи от 13. до 16.

Задача 13. Да се реши уравнението

$$4^x - 3^{2x+1} = 2\,.\,6^x.$$

Решение: Преобразуваме даденото уравнение:

$$2^{2x} - 3\,.\,3^{2x} - 2\,.\,6^x = 0, \qquad \frac{2^{2x}}{6^x} - 3\cdot\frac{3^{2x}}{6^x} - 2 = 0, \qquad \left(\frac{2}{3}\right)^x - 3\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^x - 2 = 0.$$

Полагаме $t = \left(\frac{2}{3}\right)^x > 0$. Тогава $\left(\frac{3}{2}\right)^x = \frac{1}{t}$ и t удовлетворява уравнението

$$t - \frac{3}{t} - 2 = 0, \qquad t^2 - 2t - 3 = 0.$$

Последното квадратно уравнение има корени $t_1 = -1$ и $t_2 = 3$.

Случаят $t_1 = -1$ не води до решение на даденото показателно уравнение.

При $t_2 = 3$ имаме

$$\left(\frac{2}{3}\right)^x = 3,$$

откъдето намираме решението на даденото уравнение

$$x = \log_{2/3} 3 = \frac{1}{\log_3 2 - 1}.$$

. . . .

Задача 14. Числата $a, b, c,$ взети в този ред, образуват растяща аритметична прогресия. Да се намерят числата $a, b, c,$ ако сумата им е равна на $12,$ а сумата от квадратите им е равна на $146.$

Решение: Нека разликата на аритметичната прогресия е d, $d > 0$. Тогава $a = b - d$, $c = b + d$ и условията

$$\begin{aligned} &a + b + c = 12,\\ &a^2 + b^2 + c^2 = 146 \end{aligned}$$

добиват вида

$$\begin{aligned} &(b-d) + b + (b+d) = 12,\\ &(b-d)^2 + b^2 + (b+d)^2 = 146, \end{aligned} \qquad \text{т.е.} \qquad \begin{aligned} &3b = 12,\\ &3b^2 + 2d^2 = 146. \end{aligned}$$

Намираме $b = 4$ и заместваме в последното уравнение:

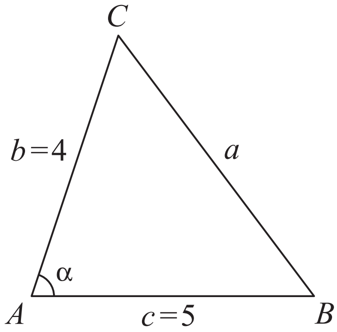
$$3\,.\,4^2 + 2d^2 = 146, \qquad 2d^2 = 98, \qquad d^2 = 49.$$

Тъй като $d > 0$ (прогресията е растяща), намираме $d = 7$ и членовете на аритметичната прогресия са:

$$a = 4 - 7 = -3, \qquad b = 4, \qquad c = 4 + 7 = 11.$$

Задача 15. За $\triangle ABC$ е дадено $AB = 5$, $AC = 4$ и радиусът на описаната окръжност $R = \sqrt{7}$. Да се намерят дължината на страната BC и лицето на триъгълника.

Използваме стандартни означения $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$ и $\sphericalangle BAC = \alpha$.



Прилагаме синусова и косинусова теорема за ъгъл α в $\triangle ABC$. Имаме съответно

$$a = 2R\sin\alpha = 2\sqrt{7}\sin\alpha \qquad \text{и} \qquad a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\,\cos\alpha = 41 - 40\cos\alpha.$$

Заместваме a от първото уравнение във второто и получаваме $28\sin^2\alpha = 41 - 40\cos\alpha$. Използвайки основното тригонометрично тъждество стигаме до уравнението

$$28\cos^2\alpha - 40\cos\alpha + 13 = 0, \qquad (2\cos\alpha - 1)(14\cos\alpha - 13) = 0,$$

откъдето $\cos\alpha = \dfrac{1}{2}$ или $\cos\alpha = \dfrac{13}{14}$.

1) При $\cos\alpha = \dfrac{1}{2}$ имаме $\sin\alpha = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ и тогава

$$a = 2\sqrt{7}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{21}, \qquad S_{ABC} = \frac{1}{2}\,bc\sin\alpha = \frac{4\,.\,5}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = 5\sqrt{3}.$$

2) При $\cos\alpha = \dfrac{13}{14}$ имаме $\sin\alpha = \dfrac{3\sqrt{3}}{14}$ и тогава

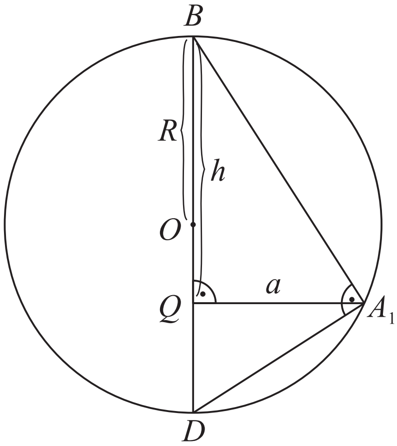
$$a = 2\sqrt{7}\cdot\frac{3\sqrt{3}}{14} = \frac{3\sqrt{21}}{7}, \qquad S_{ABC} = \frac{1}{2}\,bc\sin\alpha = \frac{4\,.\,5}{2}\cdot\frac{3\sqrt{3}}{14} = \frac{15\sqrt{3}}{7}.$$

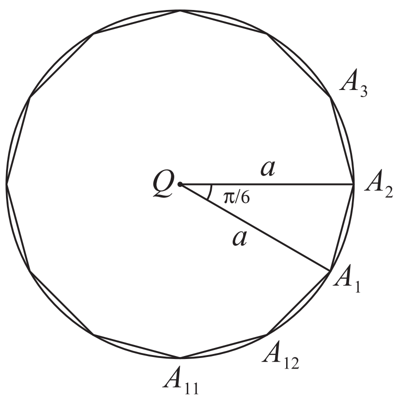
Отговор: $BC = \sqrt{21}$, $S_{ABC} = 5\sqrt{3}$ или $BC = \dfrac{3\sqrt{21}}{7}$, $S_{ABC} = \dfrac{15\sqrt{3}}{7}$.

Задача 16. В сфера с радиус $R = 3$ е вписана правилна дванадесетоъгълна пирамида с височина h. Намерете при каква стойност на h обемът на пирамидата е възможно най-голям.

Решение: Нека основата на пирамидата е правилния дванадесетоъгълник $A_1A_2...A_{12}$, върхът на пирамидата е B, неговата проекция върху равнината на основата е Q, диаметрално противоположната точка върху сферата на върха на пирамидата да е D и центърът на сферата е O. Имаме $BQ = h$, $h \in (0, 2R)$. Разглеждаме сечението на сферата и пирамидата с равнината (A_1BO). В тази равнина лежат и точките Q и D. Триъгълникът BDA_1 е вписан в окръжност и страната му BD е диаметър на тази окръжност. Тогава $\triangle BDA_1$ е правоъгълен и отсечката $QA_1 = a$ е височина към хипотенузата в този триъгълник. От формулата за дължина на височината чрез дължините на ортогоналните проекции на катетите върху хипотенузата на правоъгълен триъгълник имаме

$$a^2 = BQ\,.\,QD = h(2R - h) = h(6 - h).$$





Ако с S означим лицето на основата на пирамидата, за обема на пирамидата имаме

$$V = \frac{S\,.\,h}{3}.$$

Понеже $A_1A_2...A_{12}$ е правилен дванадесетоъгълник, лицето му е равно на

$$S = 12\,S_{QA_1A_2} = 12 \cdot \frac{a^2 \sin\frac{2\pi}{12}}{2} = \frac{12h(6-h)}{4} = 3h(6-h).$$

Тогава

$$V = V(h) = \frac{S\,.\,h}{3} = \frac{3h(6-h)\,.\,h}{3} = h^2(6-h).$$

Търсим най-голямата стойност на функцията $V(h) = -h^3 + 6h^2$ за $h \in (0, 6)$. Имаме

$$V'(h) = -3h^2 + 12h = 3h(4-h).$$

Тогава $V'(h) > 0$ за $h \in (0, 4)$ и $V'(h) < 0$ за $h \in (4, 6)$. Това означава, че $V(h)$ е растяща в интервала $(0, 4)$ и намаляваща в интервала $(4, 6)$. Следователно, функцията $V(h)$ достига най-голяма стойност в интервала $(0, 6)$ при $h = 4$.

Окончателно, обемът на дадената пирамида е възможно най-голям при $h = 4$ и

$$V_{\text{макс.}} = V(4) = 4^2.\,(6-4) = 32.$$