СОФИЙСКИ УНИВЕРСИТЕТ „СВ. КЛИМЕНТ ОХРИДСКИ“

ПИСМЕН КОНКУРСЕН ИЗПИТ ПО МАТЕМАТИКА I

18 юни 2016 г.

Тема №1.

ОТГОВОРИ И ПРИМЕРНИ РЕШЕНИЯ НА ЗАДАЧИТЕ

Максималният брой точки от трите части на изпита е 100.

Правилно отбелязаният отговор на всяка задача от 1. до 10. се оценява с 2 точки, а на всяка задача от 11. до 20. – с 3 точки.

1.	~~А~~	Б	В	Г	11.	~~А~~	Б	В	Г
2.	А	Б	В	~~Г~~	12.	А	Б	В	~~Г~~
3.	~~А~~	Б	В	Г	13.	А	~~Б~~	В	Г
4.	А	Б	~~В~~	Г	14.	А	Б	~~В~~	Г
5.	~~А~~	Б	В	Г	15.	А	~~Б~~	В	Г
6.	А	Б	В	~~Г~~	16.	А	Б	~~В~~	Г
7.	А	~~Б~~	В	Г	17.	А	Б	В	~~Г~~
8.	А	Б	~~В~~	Г	18.	А	Б	~~В~~	Г
9.	А	~~Б~~	В	Г	19.	А	~~Б~~	В	Г
10.	А	Б	В	~~Г~~	20.	~~А~~	Б	В	Г

Правилно попълненият отговор на всяка задача от 21. до 25. се оценява с 4 точки.

21.	$\frac{3}{4}$
22.	$x = 2$, $x = 6$
23.	5 месеца
24.	6 см
25.	$CL = 5\sqrt{7}$

Пълното решение на всяка задача от 26. до 28. се оценява с 10 точки.

Задача 26. Да се реши уравнението $\left(x^2+2x\right)^2-2\left|x^2+2x\right|-3=0$.

Решение: Въвеждаме ново неизвестно $t=|x^2+2x|$ $(t\geqq 0)$, след което даденото модулно уравнение се свежда до квадратното уравнение $t^2-2t-3=0$, чиито корени са $t_1=-1$, $t_2=3$.

След връщане към неизвестното x получаваме уравненията $|x^2+2x|=-1$, $|x^2+2x|=3$. Уравнението $|x^2+2x|=-1$ няма корени $(t\geqq 0)$, а $|x^2+2x|=3$ е еквивалентно на $x^2+2x=-3$ $\cup$ $x^2+2x=3$. Първото от квадратните уравнения няма реални корени, а корените на второто са $x_1=1$, $x_2=-3$. Така окончателно получаваме, че числата $x_1=1$, $x_2=-3$ са решения на даденото модулно уравнение.

Задача 27. С помощта на цифрите $\{0,1,2,3,4\}$ е съставено четирицифрено число с неповтарящи се цифри. Колко такива числа могат да се образуват? Каква е вероятността съставеното число да е четно?

Решение: Броят на всички четирицифрени числа, които могат да се образуват с помощта на дадените цифри е:

I. $4\cdot4\cdot3\cdot2=96$ (за първата позиция– цифрата на хилядите имаме 4 възможности– всички цифри без 0, за цифрата на стотиците– 4 възможности– всички цифри без вече избраната цифра на хилядите и т.н.).

II. $V_5^4-V_4^3=5\cdot4\cdot3\cdot2-4\cdot3\cdot2=96$ (от броя на всички четирицифрени числа, записани с $\{0,1,2,3,4\}$ вадим броя на тези, които започват с 0, т.е. на трицифрените, образувани с цифрите $\{1,2,3,4\}$).

Броят на четните четирицифрени числа с неповтарящи се цифри, записани с помощта на $\{0,1,2,3,4\}$ се намира по следния начин:

I. Последната цифра на четно четирицифрено число, образувано с цифрите $\{0,1,2,3,4\}$ може да бъде някоя от $\{0,2,4\}$, т.е. три на брой. Така за последната цифра имаме три възможности, за предпоследната - 4 възможности (всичките 5 цифри без вече избраната последна) и т.н., т.е. броят на числата от този вид е $2\cdot3\cdot4\cdot3=72$, но тук сме броили и числата, започващи с нула. Сега от тази бройка трябва да извадим $2\cdot3\cdot2=12$- броят на трицифрените четни числа, съставени с цифрите $\{1,2,3,4\}$ (първата цифра на четирицифреното число е нула). Имаме $2\cdot3\cdot4\cdot3-2\cdot3\cdot2=72-12=60$.

II. Всички различни четни четирифрени числа с неповтарящи се цифри, които могат да се съставят с тези цифри са:

1) ако 0 е последна– $V_4^3=4\cdot3\cdot2=24$;

2) ако 2 или 4 е последна – по $V_4^3-V_3^2=4\cdot3\cdot2-3\cdot2=18$.

Следователно всички такива четни числа са: $24+2\cdot18=60$.

III. Всички различни четни четирифрени числа с неповтарящи се цифри, които могат да се съставят с тези цифри са:

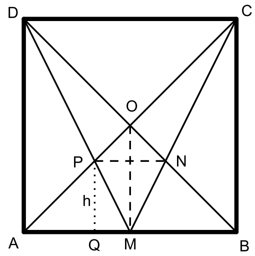
1) ако 0 е последна– $V_4^3=4\cdot3\cdot2=24$;

2) ако 2 или 4 е последна – тогава за първата (на хилядите) цифра имаме 3 възможности (всички цифри без тази на последно място и нулата), за следващата цифра – 3 (две цифри са вече избрани) и за последната (цифрата на десетиците) остават 2 възможности, т.е. броят на числата е $3\cdot3\cdot2=18$.

Следователно всички такива четни числа са: $24+2\cdot18=60$.

Окончателно търсената вероятност е:

$$P=\frac{\textit{бр. благоприятни възможности}}{\textit{бр. всички възможности}}=\frac{60}{96}=\frac{5}{8}=0,625.$$



Задача 28. Даден е квадрат $ABCD$ с лице $S_{ABCD} = 2016$, за който с M е означена средата на страната AB, а O, N и P са съответно пресечните точки на AC и BD, BD и CM и AC и DM. Да се намери лицето на четириъгълника $MNOP$.

Решение: Нека $AB = a$ и $S_{ABCD} = S$. Разглеждаме ΔABD в него отсечките AO и DM са медиани, следователно точката P е медицентър за този триъгълник и $DP : PM = 2 : 1$, аналогично имаме и $CN : NM = 2 : 1$. $\Big($ Последните две отношения следват още от $AM = MB$ и факта, че AP и BN са ъглополовящи, съответно в триъгълниците ΔAMD и ΔBMC. $\Big)$

I. От $CN : NM = 2 : 1$ и $DP : PM = 2 : 1$ имаме $\Delta CDM \sim \Delta NPM$, $PN || CD$ и $\dfrac{PN}{CD} = \dfrac{MP}{MD} = \dfrac{1}{3}$, т.е. $PN \overset{\parallel}{=} \dfrac{CD}{3}$. Понеже OM е средна отсечка в ΔABD , то $OM \overset{\parallel}{=} \dfrac{AD}{2}$.

Така в четириъгълника $MNOP$ имаме $OM \perp PN$ и за лицето му получаваме

$$S_{MNOP} = \frac{OM \cdot PN}{2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{AD}{2} \cdot \frac{CD}{3} = \frac{1}{12} S = \frac{2016}{12} = 168.$$

II. Нека $PQ = h$ е височина в ΔAMP. Тогава от $\Delta MPQ \sim \Delta MDA$ имаме $\dfrac{h}{AD} = \dfrac{MP}{MD} = \dfrac{1}{3}$, т.е. $h = \dfrac{a}{3}$ и $S_{AMP} = \dfrac{AM \cdot h}{2} = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{a}{2} \cdot \dfrac{a}{3} = \dfrac{S}{12}$. Аналогично $S_{BMN} = \dfrac{S}{12}$. За лицето на ΔABO имаме $S_{ABO} = \dfrac{AB \cdot OM}{2} = \dfrac{1}{2} \cdot a \cdot \dfrac{a}{2} = \dfrac{S}{12}$. Сега имаме $S_{MNOP} = S_{ABO} - S_{AMP} - S_{BMN} = \dfrac{S}{4} - \dfrac{S}{12} - \dfrac{S}{12} = \dfrac{S}{12}$. Следователно $S_{MNOP} = 168$.