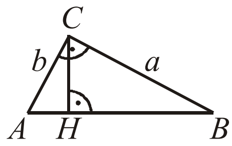
СОФИЙСКИ УНИВЕРСИТЕТ „СВ. КЛИМЕНТ ОХРИДСКИ“
ПИСМЕН КОНКУРСЕН ИЗПИТ ПО МАТЕМАТИКА
12 ЮЛИ 2012 г.

ЗАДАЧИ И ПРИМЕРНИ РЕШЕНИЯ – ТЕМА 2

1. Да се реши уравнението $\left|x^2-5x-6\right|=4x-14$.

Решение. При $x\in(-1;6)$ $x^2-5x-6<0$ и даденото уравнение е еквивалентно на $x^2-5x-6=14-4x$, откъдето $x^2-x-20=0$. Корените на квадратното уравнение са $x_1=-4$ и $x_2=5$. Понеже $5\in(-1;6)$, а $-4\notin(-1;6)$, то решение на първоначалното уравнение е $x=5$. При $x\in(-\infty;-1]\cup[6;+\infty)$ $x^2-5x-6\geq 0$ и даденото уравнение е еквивалентно на $x^2-5x-6=4x-14$, откъдето $x^2-9x+8=0$. Корените на квадратното уравнение са $x_1=1$ и $x_2=8$. Понеже $8\in(-\infty;-1]\cup[6;+\infty)$, а $1\notin(-\infty;-1]\cup[6;+\infty)$, то решение на първоначалното уравнение е $x=8$. Следователно решенията на модулното уравнение са 5 и 8.

2. Височината през върха на правия ъгъл в правоъгълен триъгълник дели хипотенузата на части с дължини 3 и 12. Да се намерят катетите на триъгълника.

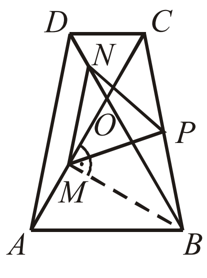


Решение. От свойството на височината в правоъгълен триъгълник имаме $CH^2=AH.BH$, откъдето $CH^2=3.12$, или $CH=6$. От питагорова теорема за $\triangle ACH$ имаме $AC=\sqrt{AH^2+CH^2}=\sqrt{45}$ и $AC=3\sqrt{5}$. Аналогично, от $\triangle BCH$ намираме $BC=6\sqrt{5}$.

3. Да се реши неравенството $\sqrt{x^2-4}>x-1$.

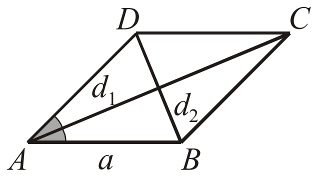
Решение. Ако $x\geq 1$, неравенството е еквивалентно на $x^2-4>(x-1)^2$, откъдето $x>\frac{5}{2}$. Ако $x<1$, неравенството е еквивалентно на $x^2-4\geq 0$, т.е. $x\in(-\infty;-2]\cup[2;+\infty)$. Следователно решенията на даденото неравенство са всички $x\in(-\infty;-2]\cup\left(\frac{5}{2};+\infty\right)$.

4. В равнобедрен трапец $ABCD$ $(AB\parallel CD)$ $BC=10$, диагоналите се пресичат в точка O и точките M, N и P са средите съответно на AO, DO и BC. Да се намери периметърът на триъгълника MNP, ако $\sphericalangle BMC=90^\circ$.



Решение. Тъй като MN е средна отсечка в $\triangle AOD$, то $MN=\frac{1}{2}AD=5$. От $\sphericalangle BMC=90^\circ$ следва $MP=\frac{1}{2}BC=5$. От $\triangle ABC\cong\triangle BAD$ (I пр.) получаваме, че $\sphericalangle BAC=\sphericalangle ABD$, откъдето $AO=BO$. Тъй като BM е медиана и височина в $\triangle AOB$ то $AB=OB$, т.е. $\triangle AOB$ е равностранен. Следователно и $\triangle DOC$ е равностранен, т.е. $CN\perp OD$. Така от правоъгълния $\triangle CNB$ намираме $NP=\frac{1}{2}BC=5$. Следователно $\triangle MNP$ е равностранен и периметърът му е 15.

5. Да се намери лицето на ромб $ABCD$, ако радиусите на окръжностите, описани около триъгълниците ABC и ABD, са съответно R и r.



Решение. Първи начин. Нека $AB = a$, $\sphericalangle BAD = \alpha$, $AC = d_1$ и $BD = d_2$. От синусова теорема за $\triangle ABC$ получаваме $2R = \frac{a}{\sin\frac{\alpha}{2}} = \frac{d_1}{\sin\alpha}$. От $\triangle ABD$ получаваме $2r = \frac{a}{\cos\frac{\alpha}{2}} = \frac{d_2}{\sin\alpha}$. Като разделим почленно първите две равенства намираме $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{r}{R}$. От тук намираме $\sin\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}} = \frac{2Rr}{R^2+r^2}$. Като умножим почленно равенствата, от синусова теорема, имаме $d_1 d_2 = 4Rr\sin^2\alpha$, откъдето $S = \frac{1}{2}d_1 d_2 = 2Rr\sin^2\alpha$. Така намираме $S = \frac{8R^3r^3}{\left(R^2+r^2\right)^2}$.

Втори начин. Нека $AB = a$, $\sphericalangle BAD = \alpha$, $AC = d_1$ и $BD = d_2$. От синусова теорема за $\triangle ABC$ получаваме $\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{a}{2R}$, а от $\triangle ABD$ – $\cos\frac{\alpha}{2} = \frac{a}{2r}$. Имаме $1 = \sin^2\frac{\alpha}{2} + \cos^2\frac{\alpha}{2}$ $= \left(\frac{a}{2R}\right)^2 + \left(\frac{a}{2r}\right)^2$, откъдето намираме $a^2 = \frac{4R^2r^2}{R^2+r^2}$. Така за лицето получаваме $S = a^2\sin\alpha = 2a^2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2} = 2a^2\frac{a^2}{4Rr} = \frac{8R^3r^3}{\left(R^2+r^2\right)^2}$.

6. Да се реши уравнението $x^2 - \pi x + 1 = \sin x - \frac{\pi^2}{4}$.

Решение. Първи начин. Записваме уравнението във вида
$f(x) = x^2 - \pi x + 1 + \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 = \sin x = g(x)$.

Имаме $g(x) \le 1$, като равенство се достига при $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$. За квадратната функция $f(x)$ получаваме $f_{\min} = 1$ при $x_0 = \frac{\pi}{2}$. Следователно $x_0 = \frac{\pi}{2}$ е корен на уравнението. Уравнението няма други корени понеже при $x < x_0$ $f(x) > f(x_0) = 1 \ge g(x)$ и за $x > x_0$ $f(x) > f(x_0) = 1 \ge g(x)$. Следователно при $x \ne x_0$ $f(x) > g(x)$, т.е. даденото уравнение има единствено решение $x_0 = \frac{\pi}{2}$.

Втори начин. Записваме уравнението във вида $\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^2 = \sin x - 1$. Имаме $\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^2 \ge 0$ и $\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^2 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2}$. Тъй като $\sin x - 1 \le 0$ и $\sin x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$, то единственото решение на уравнението е $x_0 = \frac{\pi}{2}$.

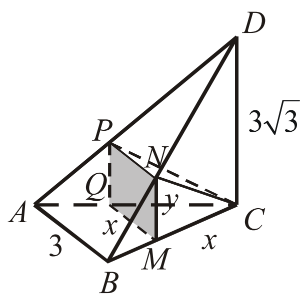
Трети начин. Записваме уравнението във вида $f(x) = x^2 - \pi x - \sin x + 1 + \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 = 0$. Имаме $f'(x) = 2x - \pi - \cos x$ и $f''(x) = 2 + \sin x$. Очевидно $f''(x) > 0$, което означава, че функцията $f'(x)$ е монотонно растяща. Понеже $f'(0) = -\pi - 1 < 0$, а $f'(\pi) = \pi + 1 > 0$, то уравнението $f'(x)=0$ има единствено решение. Лесно се вижда, че $f'\left(\frac{\pi}{2}\right)=0.$ Това означава, че функцията $f(x)$ има единствен минимум при $x_0=\frac{\pi}{2}.$ Очевидно $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=0,$ т.е. уравнението $f(x)=0$ има единствено решение $x_0=\frac{\pi}{2}.$

7. За кои стойности на реалните параметри a и b неравенството
$x^2-\left(b^2+ab\right)|x|+(a-1)^2\le 0$ има точно пет цели решения?

Решение. Функцията $f(x)=x^2-\left(b^2+ab\right)|x|+(a-1)^2$ е четна, т.е. ако x_0 е решение на неравенството, то и $-x_0$ е решение. Следователно $x=0$ е решение на неравенството. Така намираме $(a-1)^2\le 0,$ откъдето $a=1.$ Ясно е, че неравенството има точно пет цели решения, когато неравенството $x^2-\left(b^2+b\right)|x|\le 0$ има пет цели решения. Последното неравенство е еквивалентно на $|x|\left(|x|-\left(b^2+b\right)\right)\le 0.$ Следователно даденото неравенство има пет цели решения, когато $|x|\le\left(b^2+b\right)$ има пет цели решения. Последното е изпълнено, когато $b\in(-\infty;-1)\cup(0;+\infty)$ и $2\le b^2+b<3.$ Решението на системата неравенства е $b\in\left(\frac{-1-\sqrt{13}}{2};-2\right]\cup\left[1;\frac{-1+\sqrt{13}}{2}\right).$ Следователно даденото неравенство има точно пет цели решения при $a=1, b\in\left(\frac{-1-\sqrt{13}}{2};-2\right]\cup\left[1;\frac{-1+\sqrt{13}}{2}\right).$

8. Основата на триъгълна пирамида $ABCD$ е равностранен триъгълник ABC със страна $AB=3.$ Околният ръб CD е перпендикулярен на равнината на основата и има дължина $3\sqrt{3}.$ Пирамидата е пресечена с равнина успоредна на ръбовете AB и CD. Да се намери най-голямата стойност на обема на пирамидата с основа полученото сечение и връх C.

Решение. Тъй като равнината на сечението е успоредна на AB, то $MQ\parallel NP\parallel AB.$ Аналогично $MN\parallel PQ\parallel CD,$ т.е. сечението е успоредник. Понеже $DC\perp AB,$ $MN\perp MQ.$ Следователно сечението е правоъгълник. Освен това равнината (MNP) е перпендикулярна на равнината на основата, откъдето следва, че височината на пирамидата $MNPQC$ е височината h_c. в $\triangle MCQ.$ Нека $MQ=x$ и $MN=y.$ Така за обема V на пирамидата имаме $V=\frac{1}{3}S_{MNPQ}.h_c=\frac{\sqrt{3}}{6}x^2y.$ От $\triangle BMN\sim\triangle BCD$ имаме $\frac{y}{3\sqrt{3}}=\frac{3-x}{3},$



откъдето $y=\sqrt{3}(3-x).$ Следователно $V=\frac{1}{2}x^2(3-x),$ $x\in(0;3).$ Разглеждаме функцията $f(x)=x^2(3-x).$ Имаме $f'(x)=6x-3x^2$ и от $f'(x)=6x-3x^2=0$ намираме $x_1=0$ и $x_2=2.$ От изменението на знака на първата производна е ясно, че функцията $f(x)$ в интервала $(0;3)$ има най-голяма стойност при $x=2.$ Следователно $V_{max}=2.$