СОФИЙСКИ УНИВЕРСИТЕТ „СВ. КЛИМЕНТ ОХРИДСКИ“

Писмен конкурсен изпит по Математика I

2 април 2017 г.

Тема №2.

Отговорите на задачите от 1. до 20. включително отбелязвайте в листа за отговори!

Задача 1. Числото $(-\sqrt{7})^2 + (-0{,}7)^3$ е от интервала:

А) $(-\infty; -7]$ Б) $(-7; 0)$ В) $[0; 7]$ Г) $(7; \infty)$

Задача 2. Стойността на израза $\dfrac{a}{a^2 - b^2} \cdot \dfrac{a^3 + b^3}{b^4}$ при $a = 1{,}5$ и $b = -\dfrac{1}{2}$ е равна на:

А) -30 Б) 0 В) 20 Г) 39

Задача 3. Допустимите стойности на израза $\dfrac{x}{\sqrt{2-x}} + \dfrac{3}{x^2 + 5x}$ са:

А) $x \in (-\infty; -5) \cup (-5; 0) \cup (0; 2)$ Б) $x \in (-\infty; -5) \cup (-5; 2)$
В) $x \in (-\infty; 2)$ Г) $x \in (-\infty; -5) \cup (-5; 0) \cup (0; \infty)$

Задача 4. Решенията на неравенството $x + \dfrac{3x - 2}{x + 2} \geqq 3$ са:

А) $x \in (-\infty; -4) \cup [-2; 2)$ Б) $x \in [-4; -2) \cup [2; \infty)$
В) $x \in (-\infty; -2) \cup [2; 4)$ Г) $x \in [-4; 2) \cup [4; \infty)$

Задача 5. Ако $m = \lg 25$, то $\log_2 \sqrt[3]{625}$ е равно на :

А) $\dfrac{4m}{3(2-m)}$ Б) $\dfrac{4m}{3(m+2)}$ В) $\dfrac{3m}{2(3-2m)}$ Г) $\dfrac{6m}{3m+4}$

Задача 6. Броят на решенията на системата $\left| \begin{array}{l} x\,y = 8 \\ |x| + y = 6 \end{array} \right.$ е равен на:

А) 1 Б) 2 В) 3 Г) 4

Задача 7. Ако x_1 и x_2 са корените на уравнението $x(3x+1) - 2 = 0$, то стойността на израза $\dfrac{x_1}{x_2} + \dfrac{x_2}{x_1}$ е равна на:

А) $-\dfrac{13}{6}$ Б) $-\dfrac{5}{6}$ В) $\dfrac{5}{6}$ Г) $\dfrac{13}{6}$

Задача 8. Стойността на израза $\cos^2\varphi + 4\sin(45^\circ - \varphi) - 3\sin\dfrac{\varphi}{2}\cos\dfrac{\varphi}{2}$ при $\varphi = 30^\circ$ е равен на:

А) $\sqrt{6}$ Б) $\sqrt{6} - \sqrt{2}$ В) $\sqrt{6} + \sqrt{2}$ Г) $\sqrt{3} + \sqrt{2}$

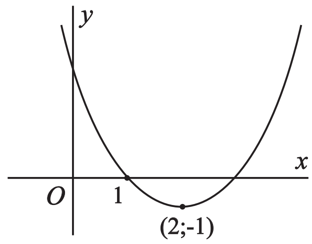
Задача 9. В $\triangle ABC$ е дадено $AC = BC$, BL е ъглополовяща на $\sphericalangle B$ и $AL : CL = 1 : 2$. Ако $s = P_{\triangle BLC} : P_{\triangle BLA}$ е отношението на периметрите на $\triangle BLC$ и $\triangle BLA$, то:

А) $s < 2$ Б) $s = 2$ В) $s > 2$ Г) $s > 3$

Задача 10. В правоъгълен триъгълник единият катет има дължина 6 и дължината на хипотенузата е $2\sqrt{13}$. Дължината на медианата към по-дългия катет е равна на:

А) 7 Б) 5 В) 3 Г) 2

Задача 11. На чертежа е изобразена графиката на функцията:



А) $x^2 - 3x + 4$ Б) $2x^2 + x - 11$

В) $-x^2 + 2x - 1$ Г) $x^2 - 4x + 3$

Задача 12. Редицата $\{a_n\}$ има общ член $a_n = 65 - 2n - n^2 - \dfrac{1}{2}\cos n$. Най-малкият положителен член на редицата е:

А) a_3 Б) a_5 В) a_6 Г) a_7

Задача 13. За аритметичната прогресия $\div\, a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ е дадено $a_3 = 12$ и $a_5 + a_9 = 60$. Първият член a_1 на прогресията е равен на:

А) 2 Б) 3 В) 4,5 Г) 7,5

Задача 14. Ако $\cos\left(2x - \dfrac{\pi}{4}\right) = \dfrac{1}{2}$, то за стойностите на x е изпълнено:

А) $x = \dfrac{\pi}{24} + k\pi$ или $x = -\dfrac{7\pi}{24} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$ Б) $x = \dfrac{7\pi}{12} + k\pi$ или $x = -\dfrac{\pi}{12} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$

В) $x = \dfrac{7\pi}{24} + k\pi$ или $x = -\dfrac{\pi}{24} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$ Г) $x = \dfrac{\pi}{12} + k\pi$ или $x = -\dfrac{7\pi}{12} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$

Задача 15. В кутия има бели, зелени и червени топки. Белите топки са 20, зелените са с 6 повече от червените и вероятността от кутията да се изтегли червена топка е $\dfrac{1}{3}$. Броят на всички топки в кутията е равен на:

А) 42 Б) 60 В) 72 Г) 78

Задача 16. Месечните разходи на семейство през една календарна година са били както следва: 950, 930, 1000, 1100, 1070, 1200, 1100, 1000, 1050, 1100, 1200, 1050 лв. За модата M, медианата P и средната стойност S на този статистически ред е изпълнено:

А) $P < S < M$ Б) $P < M < S$ В) $S < M < P$ Г) $M < S < P$

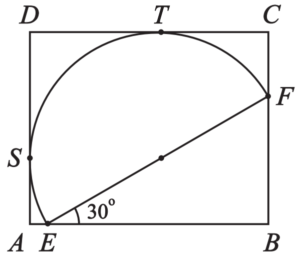
Задача 17. В $\triangle ABC$ е дадено $\sphericalangle A : \sphericalangle B : \sphericalangle C = 2 : 3 : 7$ и $BC = 8$. Диаметърът на описаната около $\triangle ABC$ окръжност има дължина:

А) 8 Б) 10 В) 16 Г) 20

Задача 18. В $\triangle ABC$ е дадено $AB = 5$, $BC = 6$ и $AC = 7$. Тангенсът на най-големия от ъглите в $\triangle ABC$ е равен на:

А) $-2\sqrt{6}$ Б) $\dfrac{1}{2\sqrt{6}}$ В) 24 Г) $2\sqrt{6}$

Задача 19. От правоъгълника $ABCD$ със страна $BC = 6$ е изрязан полукръг, който се загражда от диаметъра EF и полуокръжността $\widehat{ESTF}$, като $E \in AB$, $S \in AD$, $T \in CD$, $F \in BC$ и $\sphericalangle BEF = 30^\circ$. Лицето на правоъгълника $ABCD$ е равно на:



А) $12(4 + \sqrt{3})$ Б) $12(2 + \sqrt{3})$

В) $24(2 + \sqrt{3})$ Г) $12(2 - \sqrt{3})$

Задача 20. В изпъкналия четириъгълник $ABCD$ са дадени страните $AB = 5$, $BC = 4$, $AD = 2$, и $\sphericalangle BCA = 90^\circ$, $\sphericalangle CAD = 60^\circ$. Дължината на диагонала BD е равна на:

А) $\sqrt{35 - 8\sqrt{3}}$ Б) $\sqrt{26 + 4\sqrt{3}}$ В) $\sqrt{23 + 8\sqrt{3}}$ Г) $\sqrt{32 - 4\sqrt{3}}$

Отговорите на задачите от 21. до 25. включително запишете в листа за отговори!

Задача 21. Стойността на израза $6^{\frac{\lg 20-\lg 5}{\lg 2+\lg 3}}+\log_9\sqrt{27\sqrt[3]{9}}$ е равна на:

Задача 22. Решенията на уравнението $\sqrt{2x-1}-\dfrac{15}{\sqrt{2x-1}}+2=0$ са:

Задача 23. Две банки предлагат планове за тригодишни влогове при сложно олихвяване. Банка А: 6% годишен лихвен процент за първата година и 5% за всяка от следващите години. Банка Б: 8% годишен лихвен процент за първата година и 4% за всяка от следващите години. Коя от банките предлага по-изгоден за клиентите план за тригодишен влог и с колко лева ще се окаже по-добра офертата на тази банка в сравнение с другата при начален влог от 10 000 лв.?

Задача 24. Фирма се състои от три отдела: административен – 4 души със средна заплата 1400 лв., научен – 10 души със средна заплата 1300 лв. и производствен – 36 души със средна заплата 1100 лв. Средната заплата във фирмата е:

Задача 25. За $\triangle ABC$ центърът на вписаната окръжност е O и лицата на $\triangle AOB$, $\triangle BOC$ и $\triangle AOC$ са съответно 4, 9 и 11. Дължините на страните AB, BC и AC на $\triangle ABC$ са:

Пълните решения на задачи 26., 27. и 28. запишете в свитъка за решения!

Задача 26. Да се реши системата $\left|\begin{array}{l} 4x^2+5xy-2y^2=1 \\ x^2-4xy+y^2=-2 \end{array}\right.$.

Задача 27. Да се намери броят на четирицифрените числа, делящи се на 6 и с неповтарящи се цифри измежду $\{1,2,3,4,5,6\}$.

Задача 28. Измежду трапеците $ABCD$, за които $AB\|CD$, $\sphericalangle BAD=90^\circ$, $BC=10$, $AB=3CD$ и имащи лице $S=48$, да се намерят страните на този, който има най-голям периметър.

Време за работа 4 часа.

Драги кандидат-студенти,

- *номерирайте всички страници на беловата си;*
- *означавайте ясно началото и края на решението на всяка от задачите от 26. до 28. включително;*
- *решението на всяка от задачите от 26. до 28. включително трябва да започва на нова страница;*
- *не смесвайте белова и чернова;*
- *черновата не се проверява и не се оценява.*

Изпитната комисия ви пожелава успешна работа!